— text obsahuje znenia viet, ktoré budeme dokazovať na prednáškach
— text je doplnený aj o poznámky, ich cieľom je dopomôcť študentom k lepšiemu pochopeniu pojmov aj súvislostí medzi nimi
— text je tiež doplnený aj o niekoľko úloh, vyriešenie ktorých by tiež malo študentom pomôcť k lepšiemu pochopeniu prednášaných tém

G. Monoszová, Analytická geometria 2 - Kapitola IV

KAPITOLA IV
ZHODNÉ ZOBRAZENIA

IV. 1. ZHODNÉ ZOBRAZENIE - DEFINÍCIA, VLASTNOSTI, ANALYTICKÉ VYJADRENIE

Definícia.
Nech $\mathbb{E}(\mathcal{A};\mathbb{V};-)$, $\mathbb{E}'(\mathcal{A}';\mathbb{V}';-)$ sú euklidovské podpriestory. Zobrazenie

$$f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$$

nazývame **zhodné zobrazenie**, ak vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov euklidovského priestoru $\mathbb{E}$ sa v zobrazení f zachováva;
t.j.

$$\forall X,Y\in\mathcal{A}:\ |f(X)f(Y)|=|XY|.$$

Úloha 1.
Dokážte, že v euklidovskom priestore je nasledovná definícia deliaceho pomeru ekvivalentna s definíciou deliaceho pomeru v Kapitole I, časť I.7, str 9.

Definícia. Nech A, B, C, $A\neq B\neq C$, sú kolineárne body euklidovského priestoru. Potom pod deliacim pomerom usporiadanej trojice bodov A, B, C rozumieme

$$(ABC):=\begin{cases}\frac{|AC|}{|BC|}, & \text{ak } \neg\mu(ACB),\\ -\frac{|AC|}{|BC|}, & \text{ak } \mu(ACB).\end{cases}.$$

Veta 1.
Každé zhodné zobrazenie je prosté a afinné.

Veta 2.
Afinné zobrazenie je zhodné práve vtedy, keď jeho asociované zobrazenie zachováva normu vektorov.

Veta 3.
Afinné zobrazenie je zhodné práve vtedy, keď jeho asociované zobrazenie zachováva skalárny súčin vektorov.

Veta 4.
Afinné zobrazenie je zhodné práve vtedy, keď jeho asociované zobrazenie zachováva skalárny súčin na vektoroch bázy.

Veta 5.
Nech $B_0,B_1,\dots,B_n$ sú lineárne nezávislé body euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$. Afinné zobrazenie $f:\mathbb{E}_n\longrightarrow\mathbb{E}'$ je zhodným zobrazením práve vtedy, keď

$$(f(B_i)-f(B_0)).((f(B_j)-f(B_0))=(B_i-B_0).(B_j-B_0),\ i,j\in\{1,2,\dots,n\}.$$

Veta 6.
Nech $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sú lineárne nezávislé body euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$, nech $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n$ sú body euklidovského priestoru $\mathbb{E}'$. Potom existuje zhodné zobrazenie $f : \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}'$, také že $f(P_i) = P'_i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ práve vtedy, keď

$$|P'_i P'_j| = |P_i P_j|, \; i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Navyše takéto zobrazenie existuje jediné.

Úloha 2.
Použite vetu 6 špeciálne pre jedno, dvoj a trojrozmerný euklidovský priestor a doplňte nasledujúce tvrdenia tak, aby vznikol pravdivý výrok.
a) Zhodné zobrazenie $f : \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}'$ je jednoznačne určené obrazmi ... bodov, pričom ... .
b) Zhodné zobrazenie $f : \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}'$ je jednoznačne určené obrazmi ... bodov, pričom ... .
c) Zhodné zobrazenie $f : \mathbb{E}_3 \longrightarrow \mathbb{E}'$ je jednoznačne určené obrazmi ... bodov, pričom ... .

Poznámka.

1. Nech $f : \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}'_m$ je zhodné zobrazenie a nech sú dané kartézske súradnicové sústavy v $\mathbb{E}_n$ repérom $\{P; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ a v $\mathbb{E}'_m$ repérom $\{Q; \overline{d}_1, \overline{d}_2, \ldots, \overline{d}_m\}$. Nech $f(P) = Q + \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \overline{d}_j$, $\overline{f}(\overline{e}_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} \overline{d}_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Keďže každé zhodné zobrazenie je afinným zobrazením (pozri vetu 1), tak analytické vyjadrenie zhodného zobrazenia f je nasledovné

$$\begin{aligned} f :\; x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_m &= a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n + b_m \end{aligned}$$

a zápis analytického vyjadrenia v maticovom tvare je

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots b_m, \end{pmatrix}$$

pripomeňme, že maticu

$$M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

nazývame maticou zobrazenia f.

Veta 7.
Afinné zobrazenie $f : \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}'_m$ je zhodným zobrazením práve vtedy, keď súčin matice zobrazenia f a transponovanej matice k nej je jednotková matica, t.j.

$$M_f.(M_f)^T = I_n.$$

Úloha 3.
Ak f je zhodné zobrazenie euklidovského priestoru do seba ($f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$), tak f je bijekcia. Zdôvodnite.

Definícia.
Zobrazenie euklidovského priestoru $\mathbb{E}$ do seba nazývame **zhodnosť** (v $\mathbb{E}$).

Veta 8.
Všetky zhodnosti euklidovského priestoru tvoria vzhľadom na skladanie grupu, tzv. grupu zodností.

Veta 9.
Absolútna hodnota determinantu matice zhodnosti sa rovná 1.

IV. 2. Samodružné prvky zhodnosti

Postup pri určovaní samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok zhodnosti je analogický ako pri určovaní samodružných prvkov afinného zobrazenia.

Úloha 4.
Čo viete povedať o charakteristickom čísle zhodnosti?

IV. 3. Súmernosť podľa nadroviny - definícia, analytické vyjadrenie

Úloha 5.
Nech ϱ je nadrovina euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$. Zdôvodnite, že existujú práve dve zhodnosti v $\mathbb{E}_n$, pri ktorých sú všetky body nadroviny ϱ samodružné.

Definícia.
Zhodnosť, ktorej množina samodružných bodov je nadrovina, nazývame **súmernosť podľa nadroviny**.

Veta 10.
Nech f je súmernosť podľa nadroviny $\varrho : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_0 = 0$. Potom analytické vyjdrenie zhodnosti f môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} f:\ x_1' &= x_1 + \lambda_1(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_0) \\ x_2' &= x_2 + \lambda_2(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_0) \\ &\vdots \\ x_n' &= x_n + \lambda_n(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_0) \end{aligned}$$

kde $\lambda_i = -\frac{2c_i}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Poznámka.

2. Každú zhodnosť v $\mathbb{E}_n$ môžeme dostať zložením maximálne z $n + 1$ súmerností podľa nadroviny.

Dohovor. Nakoľko nemôže dôjsť k nedorozumeniu, kvôli jednoduchosti nebudeme rozlišovať v zápise medzi uhlom a jeho veľkosťou.

Nech f je zhodnosť v $\mathbb{E}_2$. Potom máme dve možnosti pre analytické vyjadrenie f.

1. možnosť (analytického vyjadrenia zhodnosti f)

$$\begin{aligned} f:\ x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + p \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{aligned}$$

Potom pre `samodružné body` zobrazenia f platí:

$$\begin{aligned} (1-\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y - p &= 0 \\ (-\sin\alpha)x + (1-\cos\alpha)y - q &= 0 \end{aligned} \tag{sb}$$

pre determinant sústavy (sb) platí

$a)$ je rôzny od nuly	alebo	$b)$ je rovný nule
t.j.		t.j.
$(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha \neq 0$		$(1-\cos\alpha)^2 = -\sin^2\alpha$
$\cos\alpha \neq 1$		$\sin\alpha = 0\ \&\ \cos\alpha = 1$
		$b_1)$ ak $p \neq 0 \bigvee q \neq 0$
		$b_2)$ ak $p = q = 0$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

$a)$ V tomto prípade existuje jediný samodružný bod (označme ho P) zvoľme P za počiatok KSS[†] , potom $p = q = 0$. Ľahko ukážeme, že $\forall X \in \mathbb{E}_2;\ \sphericalangle(\overline{PX}, \overline{PX'}) = \alpha$.
Je zrejmé, že f je rotácia so stredom v bode P a uhlom rotácie f je orientovaný uhlol α; pre analytické vyjadrenie f platí
$f = \varrho_{P;\alpha}$, $\quad f: x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$
$\qquad\qquad\qquad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$

$b_1)$ V tomto prípade neexistujú samodružné body zobrazenia f.

$b_2)$ V tomto prípade sú všetky body samodružné v zobrazení f.

[†]KSS - kartézska súradnicová sústava

Pozrime sa teraz, čo platí pre <u>`samodružné smery`</u> zobrazenia f;

$$\begin{aligned} \lambda x &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ \lambda y &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \tag{ss1}$$

Potom charakteristická rovnica má tvar

$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \lambda - \cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

po úprave

$$(\lambda - \cos\alpha)^2 = -\sin^2\alpha$$

Zrejme riešenie charakteristickej rovnice (v obore reálnech čísel)

1) existuje, ak $\sin\alpha = 0$
$$\Downarrow$$
$$\cos\alpha = +1 \bigvee \cos\alpha = -1$$

2) neexistuje, ak $\sin\alpha \neq 0$

1_1) $\sin\alpha = 0$ & $\cos\alpha = -1$
teda $\lambda_1 = -1$
podľa (ss1)
$$\begin{aligned} -x &= -x \\ -y &= -y \end{aligned}$$
t.j. všetky smery sú samodružné

1_2) $\sin\alpha = 0$ & $\cos\alpha = 1$
teda $\lambda_2 = 1$
podľa (ss1)
$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \end{aligned}$$
t.j. všetky smery sú samodružné

Vzhľadom na samodružné body a samodružné smery môžu pre zobrazenie f nastať teda nasledovné štyri možnosti:

ak platia zároveň prípady

a) a 1_1), potom f je <u>STREDOVÁ SÚMERNOSŤ</u>

$f = \varrho_{P;180^\circ} = \varrho_P$

$$\begin{aligned} f:\ x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

a) a 2), potom f je <u>ROTÁCIA</u>

$f = \varrho_{P;\alpha},\ \alpha \neq 180^\circ$

$$\begin{aligned} f:\ x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$

b_1) a 1_2), potom f je <u>TRANSLÁCIA</u>

$f = \tau_{\overline{w}},\ \overline{w} = (p,q)$

$$\begin{aligned} f:\ x' &= x + p \\ y' &= y + q \end{aligned}$$

b_2) a 1_2), potom f je <u>IDENTITA</u>

$f = \iota$

$$\begin{aligned} f:\ x' &= x \\ y' &= y \end{aligned}$$

2. možnosť (analytického vyjadrenia zhodnosti f)

$$\begin{aligned} f:\ x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + p \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + q \end{aligned}$$

Potom pre <u>`samodružné smery`</u> zobrazenia f platí:

$$\begin{aligned} \lambda x &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ \lambda y &= x\sin\alpha - y\cos\alpha \end{aligned} \qquad \text{(ss2)}$$

a charakteristická rovnica má tvar

$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \lambda + \cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \\ \lambda^2 = 1 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = -1$
označme $\overline{u}$ charakteristický vektor	označme $\overline{v}$ charakteristický vektor
prislúchajúci ku charakteristickému číslu λ_1	prislúchajúci ku charakteristickému číslu λ_2
$\overline{f}(\overline{u}) = \overline{u}$	$\overline{f}(\overline{v}) = -\overline{v}$

Ľahko možno ukázať, že vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ zvierajú pravý uhol,
môžeme teda zvoliť
za smer osi x vektor $\overline{u}$, teda $\overline{u} = (1;0)$
za smer osi y vektor $\overline{v}$, teda $\overline{v} = (0;1)$
Pre obrazy vektorov $\overline{u}$ a $\overline{v}$ platí
$\overline{u} \overset{\overline{f}}{\mapsto} \overline{u}$

$$\begin{aligned} 1 &= 1.\cos\alpha + 0.\sin\alpha \\ 0 &= 1.\sin\alpha - 0.\cos\alpha \end{aligned}$$

$\overline{v} \overset{\overline{f}}{\mapsto} -\overline{v}$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.\cos\alpha + 1.\sin\alpha \\ -1 &= 0.\sin\alpha - 1.\cos\alpha \end{aligned}$$

Pre uhol α teda platí

$$\begin{aligned} \cos\alpha = 1 \\ \sin\alpha = 0 \end{aligned}$$

a pre analytické vyjadrenie zobrazenia f dostávame

$$\begin{aligned} f:\ x' &= x + p \\ y' &= -\,y + q \end{aligned}$$

Čo môže nastať pre `samodružné body` zobrazenia f, ľahko zistíme rozlíšením parametra p:

1) ak $p = 0$

$x = x$

$\underline{y = -y + q}$

$\mathrm{Fix}_f = \{[x; \frac{q}{2}], x \in R\}$

t.j. samodružné body tvoria (silnosamodružnú) priamku $y = \frac{q}{2}$

zvoľme počiatok KSS na tejto priamke $y = \frac{q}{2}$

potom $q = 0$

pre tento prípad zobrazenie f je

<u>OSOVÁ SÚMERNOSŤ</u>

$$f = \sigma_x$$

$$f : \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

2) ak $p \neq 0$

$x = x + p$

$\underline{y = -y + q}$

$\mathrm{Fix}_f = \emptyset$

t.j. samodružné body neexistujú,

ale existuje slabosamodružná priamka $y = \frac{q}{2}$

zvoľme počiatok KSS na tejto priamke $y = \frac{q}{2}$

potom $q = 0$

pre tento prípad zobrazenie f je

<u>POSUNUTÁ SÚMERNOSŤ</u>

$$f = \sigma_x \circ \tau_{\overline{u}}, \quad \overline{u} = (p, 0)$$

$$f : \begin{aligned} x' &= x + p \\ y' &= -y \end{aligned}$$

Na záver uvedieme ešte prehľadné tabuľky zhodností v dvoj a trojdimenzionálnom euklidovskom priestore.

PREHĽAD ZHODNOSTÍ V $\mathbb{E}_2$

	ss: $\nexists$	**ss: dva navzájom kolmé**	**ss: všetky**
sb: $\nexists$		$x' = x + p$ $y' = -y$ $p \neq 0$ *posunutá súmernosť*	$x' = x + p$ $y' = y + q$ $(p, q) \neq (0, 0)$ *posunutie (neidentické)*
sb: $\exists!$	$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha$ $y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$ *otočenie (neidentické)*		$x' = -x$ $y' = -y$ *stredová súmernosť*
sb: tvoria priamku		$x' = x$ $y' = -y$ *osová súmernosť*	
sb: všetky			$x' = x$ $y' = y$ *identita*

sb - samodružné body
ss - samodružné smery

Prehľad zhodností v $\mathbb{E}_3$

	ss: $\exists!$	**ss: jeden a všetky na tento smer kolmé**	**ss: všetky**
sb: $\nexists$	$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = z + b_3$ $\sin\alpha \neq 0$ $b_3 \neq 0$ *otočenie okolo priamky zložené s posunutím v smere tejto priamky*	$x' = x + b_1$ $y' = y + b_2$ $z' = -z$ $(b_1, b_2) \neq (0,0)$ *súmernosť podľa roviny zložená s posunutím v smere tejto roviny* $x' = -x$ $y' = -y$ $z' = z + b_3$ $b_3 \neq 0$ *súmernosť podľa priamky zložená s posunutím v smere tejto priamky*	$x' = x + b_1$ $y' = y + b_2$ $z' = z + b_3$ $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$ *posunutie(neidentické)*
sb: $\exists!$	$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = -z$ $\sin\alpha \neq 0$ *otočenie okolo priamky zložené so súmernosťou podľa roviny kolmej na túto priamku*		$x' = -x$ $y' = -y$ $z' = -z$ *stredová súmernosť*
sb: tvoria priamku	$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = z$ $\sin\alpha \neq 0$ *otočenie okolo priamky*	$x' = -x$ $y' = -y$ $z' = z$ *súmernosť podľa priamky*	
sb: tvoria rovinu		$x' = x$ $y' = y$ $z' = -z$ *súmernosť podľa roviny*	
sb: všetky			$x' = x$ $y' = y$ $z' = z$ *identita*

sb - samodružné body
ss - samodružné smery