— text poskytuje informáciu o pojme kvadratická plocha, odvodením analytického vyjadrenia rotačnej kvadratickej plochy sa budeme zaoberať na prednáške
— text je doplnený o prehľadnú tabuľku rotačných kvadratických plôch, ktoré vznikli rotáciou kužeľosečiek
— na konci tejto kapitoly nájdete aj zadania úloh semestrálnej práce, vypracované úlohy (každú na osobitnom hárku papiera formátu $A4$) treba odovzdať najneskôr dva dni pred riadnym termínom skúšky

KAPITOLA VIII
KVADRATICKÉ PLOCHY

Teória plôch druhého stupňa v trojdimenzionálnom priestore je analógiou teórie kužeľosečiek v rovine. Plochy druhého stupňa nazývame aj **kvadratické plochy** (alebo stručne **kvadriky**).

Každá kvadrika je daná rovnicou typu

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0,$$

kde aspoň jeden z koeficientov A, B, C, D, E, F je rôzny od nuly.

Charakteristickou vlastnosťou kvadriky je, že prienikom kvadriky a priamky, ktorá nie je jej súčasťou, je maximálne dvojbodová množina.

Špeciálnym prípadom kvadrík sú tzv. **rotačné kvadriky**. Spôsob vytvárania rotačných plôch si ukážeme na prednáške. Najznámejšie rotačné kvadriky vznikajú rotáciou kužeľosečky okolo vhodne zvolenej priamky.

V tabuľke na nasledujúcej strane sú v druhom stĺpci zapísané analytické vyjadrenia rotačných kvadrík, ktoré vznikli rotáciou príslušnej kužeľosečky vhodne umiestnenej v súradnicovej rovine danej osami x a z, okolo súradnicovej osi z. V treťom stĺpci tabuľky sú zapísané analytické vyjadrenia nerotačných kvadrík, ktoré môžu vzniknúť z príslušných rotačných kvadrík afinnou transformáciou.
V poslednom riadku je ako príklad uvedené analytické vyjadrenie jednej z najznámejších kvadrík, ktorá nemá pôvod v rotačnej kvadrike.

Ak existuje priamka, ktorá je podmnožinou kvadriky, tak túto kvadriku nazývame **priamkovou plochou**.

Poznámka.

> V tabuľke je karteziánaska súradnicová sústava kvôli čo najjednoduchšiemu analytickému vyjadreniu kvadrík zvolená tak, že v prípade, že sa jedná o stredovú kvadriku, tak počiatok KSS je stredom kvadriky, v prípade kužeľovej plochy je počatok KSS vrcholom kužeľovej plochy, v prípade valcovej plochy je súradnicová os z osou valcovej plochy, pri paraboloide je pociatok KSS jeho vrcholom.

Prehľad kvadrík - - ktoré majú pôvod v príslušnej kužeľosečke

$x^2+z^2=r^2$ kružnica	$x^2+y^2+z^2=r^2$ guľová plocha	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsa	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ rotačný elipsoid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ trojosí elipsoid
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ hyperbola	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ rotačný 1-d.hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ trojosí 1-d. hyperboloid $\diamondsuit$
$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ hyperbola	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ rotačný 2-d.hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ trojosí 2-d. hyperboloid
$x^2=2pz$ parabola	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}-2z=0$ rotačný paraboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ trojosí eliptický paraboloid
$x^2-\frac{a^2}{c^2}z^2=0$ rôznobežky	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ rotačná kužeľová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0$ eliptická kužeľová plocha $\diamondsuit$
$x^2-a^2=0$ rôzne rovnobežky	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ rotačná valcová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ eliptická valcová plocha $\diamondsuit$

Jednou z najznámejších kvadrík, ktoré nemajú pôvod v rotačnej ploche je

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

hyperbolický paraboloid $\diamondsuit$

označením $\diamondsuit$ sú označené tie kvadriky v treťom stĺpci, ktoré sú priamkové plochy

Semestrálna práca

Geometria 3

úlohy č. 1 až č. 4 - by ste mali byť schopní vyriešiť po 10. týždni semestra
úlohy č. 5 až č. 7 - by ste mali byť schopní vyriešiť po 11. týždni semestra
úlohy č. 8 až č. 10 - by ste mali byť schopní vyriešiť po 13. týždni semestra

- vypracované úlohy (každú na osobitnom hárku papiera formátu $A4$) treba odovzdať <u>najneskôr</u> dva dni pred riadnym termínom skúšky

Semestrálna práca
Geometria 3

-prvá časť

Úloha č. 1 Dané sú tri navzájom rôzne body C, D, M . Zostrojte elipsu tak, aby C, D boli jej vedlajšie vrcholy a M bol jej bod.
(Urban I., Deskriptivní geometrie, SNTL/SVTL Praha 1965, str. 213)

Úloha č. 2 Daná je priamka a_1 a dva rôzne body S, B . Zostrojte hyperbolu tak, aby a_1 bola jej asymptota, S bol jej stred a B jej hlavný vrchol.

Úloha č. 3 Dané sú dve rôznobežky a_1, a_2 a úsečka veľkosti a . Zostrojte hyperbolu tak, aby a_1, a_2 boli jej asymptoty a a bola jej hlavná polos.

Úloha č. 4 Daná je priamka d a dva rôzne body A, B neležiace na d . Zostrojte parabolu tak, aby d bola jej riadiaca priamka a A, B boli jej body.

Semestrálna práca
Geometria 3

-druhá časť

Úloha č. 5 Zvolte perspektívnu kolineáciu $\mathcal{K}(S; o; u)$ tak, aby platilo $\mu(oSu)$ a zvolte kružnicu k tak, aby jej obrazom k' v kolinecii $\mathcal{K}$ bola parabola. Potom parabolu k' narysujte.

Úloha č. 6 Zvolte perspektívnu kolineáciu $\mathcal{K}(S; o; u)$ tak, aby platilo $\mu(Suo)$ a zvolte kružnicu k tak, aby jej obrazom k' v kolinecii $\mathcal{K}$ bola elipsa. Potom elipsu k' narysujte.

Úloha č. 7 Zvolte perspektívnu kolineáciu $\mathcal{K}(S; o; u)$ tak, aby platilo $\mu(Sou)$ a zvolte kružnicu k tak, aby jej obrazom k' v kolinecii $\mathcal{K}$ bola hyperbola. Potom hyperbolu k' narysujte.

Semestrálna práca
Geometria 3

-tretia časť

Úloha č. 8 Množina bodov $X[x;y]$ roviny $\mathbb{E}_2$, ktorých pomer vzdialeností od daných dvoch rôznych bdov A, B je dané kladné číslo k, $k \neq 1$ je ...

a) Doplňte a odvoďte analytické vyjadrenie spomínanej množiny bodov (ozn. $\mathfrak{K}$) pri vhodne zvolenej KSS (navrhujem, aby ste zvolili repér $\mathcal{R} = [A; \overline{e}_1 = B - A, \overline{e}_2])$.

b) Určte deliace pomery (ABY_1), (ABY_2), kde $\{Y_1, Y_2\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \mathfrak{K}$.

Úloha č. 9 Dokážte ekvivalentnosť definícií elipsy

- ako množiny bodov, ktorých súčet vzdialeností od dvoch pevne daných rôznych bodov je konštantný (väčší ako vzdialenosť daných dvoch bodov)
- ako množiny bodov, ktorých podiel vzdialeností od pevne zvoleného bodu a priamky ním neprechádzajúcej je konštantný menší ako 1.

Úloha č. 10 Dokážte ekvivalentnosť definícií hyperboly

- ako množiny bodov, ktorých rozdiel vzdialeností od dvoch pevne daných rôznych bodov je konštantný (menší ako vzdialenosť daných dvoch bodov)
- ako množiny bodov, ktorých podiel vzdialeností od pevne zvoleného bodu a priamky ním neprechádzajúcej je konštantný väčší ako 1.

Poznámka. Aj v úlohách č. 9 a č. 10 zvoľte vhodne KSS.