Analytická geometria 1

- nutné zopakovať z *Lineárnej algebry*

súvislosť medzi riešením **nehomogénnej** a prislúchajúcej **homogénnej** lineárnej sústavy rovníc

---

Úloha 1.

a) Riešte danú nehomogénnu sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + 2y + 3r &= 1 \\ 4x + 4y + 2z + 3r &= 3 \\ 2x + y + z - r &= 0 \\ -x + 2r &= 2 \end{aligned}$$

b) Riešte k nej prislúchajúcu homogénnu sústavu.

c) Zapíšte súvislosť medzi riešením v časti a) a b).

Riešenie.

Uvedieme riešenie danej nehomogénnej sústavy a potom aj riešenie k nej prislúchajúcej homogénnej sústavy a poukážeme na súvislosť medzi riešeniami obidvoch spomínaných sústav.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3r &= 1 \\ 4x + 4y + 2z + 3r &= 3 \\ 2x + y + z - r &= 0 \\ -x + 2r &= 2 \end{aligned} \qquad \text{(NSR)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

riešime teda ekvivalentnú sústavu (NSR*)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3r &= 1 \\ 2y + 5r &= 3 \\ \underline{2z + r} &\underline{= 5} \end{aligned} \qquad \text{(NSR*)}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} r &= -2z + 5 \\ y &= 5z - 11 \\ x &= 8 - 4z \end{aligned}$$

takže

riešenie sústavy (NSR*) a teda aj sústavy (NSR) je: $\underline{\underline{\{[8 - 4t; 5t - 11; t; -2t + 5],\ t \in \mathbb{R}\}}}$

zrejme jedno z riešení sústavy (NSR) je napr. $\underline{\underline{[8; -11; 0; 5]}}$

b) Prislúchajúca homogénna sústava rovníc k danej nehomogénnej sústave je

$$\begin{aligned} x+2y+3r&=0\\ 4x+4y+2z+3r&=0\\ 2x+y+z-r&=0\\ -x+2r&=0 \end{aligned} \tag{HSR}$$

z predchádzajúcich úprav matice sústavy (NSR) je zrejmé, že k sústave (HSR) je ekvivalentna (HSR*)

$$\begin{aligned} x+2y+3r&=0\\ 2y+5r&=0\\ \underline{\;2z+r}&\underline{=0\;} \end{aligned} \tag{HSR*}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} x&=2r\\ y&=-\frac{5}{2}r\\ z&=-\frac{r}{2} \end{aligned}$$

takže
riešenie sústavy (HSR*) a teda aj sústavy (HSR) je:
$\{(2t;-\frac{5}{2}t;-\frac{t}{2};t),\ t\in\mathbb{R}\} = \underline{\underline{\{(-4t;5t;t;-2t),\ t\in\mathbb{R}\}}}$

c) *Súvislosť medzi riešením danej nehomogénnej sústavy a príslušnej homogénnej sústavy:*

Riešenie nehomogénnej sústavy (NSR) ... ozn. $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} = \{[8-4t; 5t-11; t; -2t+5],\ t \in \mathbb{R}\}$
– tvorí **afinný podpriestor** afinného priestoru $\mathbb{A}_4 = (\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^4; -)$,
jeden bod z $\mathcal{A}$, t.j. jedno z riešení sústavy (NSR) (ozn. B) je napr. $B = [8; -11; 0; 5]$

afinný podpriestor
$\mathcal{A} = \{[8-4t; 5t-11; t; -2t+5],\ t \in \mathbb{R}\} \overset{\text{možno doplniť na af pr.}}{\rightsquigarrow} \mathbb{A}' = (\mathcal{A}; \mathbb{V}'; -)$

Riešenie homogénnej sústavy (HSR) ... ozn. $\mathbb{V}'$

$\mathbb{V}' = \{(-4t; 5t; t; -2t),\ t \in \mathbb{R}\}$
– tvorí **vektorový podpriestor**, ktorý je zameraním afinného priestoru $\mathbb{A}'$.

Súvislosť (NSR) $\leftrightsquigarrow$ (HSR):

$\mathbb{A}' = [B; \mathbb{V}']$
pre každý bod $X \in \mathcal{A}$ platí $X = B + \overline{u}$, kde $\overline{u} \in \mathbb{V}'$
$\{[8-4t; 5t-11; t; -2t+5],\ t \in \mathbb{R}\} = \{[8; -11; 0; 5] + (-4t; 5t; t; -2t),\ t \in \mathbb{R}\}$

Vyriešte podľa predchádzajúcej úlohy 1 nasledujúcu úlohu.

Úloha 2.

a) Riešte danú nehomogénnu sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= 1 \\ 7x - 3y + 5z &= 3 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

b) Riešte k nej prislúchajúcu homogénnu sústavu.

c) Zapíšte súvislosť medzi riešením v časti a) a b).