Axiomatický systém geometrie podľa **Hilberta**

I. AXIÓMY INCIDENCIE

I_1 Každými dvoma bodmi prechádza aspoň jedna priamka.

I_2 Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza najviac jedna priamka.

I_3 Na každej priamke ležia aspoň dva rôzne body.
Existuje aspoň jedna trojica nekolineárnych bodov.

I_4 Ku každej trojici nekolineárnych bodov existuje rovina, v ktorej tieto body ležia.
V každej rovine leží aspoň jeden bod.

I_5 Ku každej trojici nekolineárnych bodov existuje najviac jedna rovina prechá dzajúca nimi.

I_6 Ak dva rôzne body priamky ležia v rovine, potom každý bod tejto priamky leží v spomínanej rovine.

I_7 Ak dve roviny majú spoločný bod P, potom majú spoločný aspoň jeden bod rôzny od P.

I_8 Existuje aspoň jedna štvorica nekomplanárnych bodov.

U. AXIÓMY USPORIADANIA

U_1 Ak platí $\mu(ACB)$, potom A, B, C sú navzájom rôzne kolineárne body a platí tiež $\mu(BCA)$.

U_2 Ku každej dvojici rôznych bodov A, B existuje na priamke $p = \overleftrightarrow{AB}$ aspoň jeden bod C tak, že platí $\mu(ABC)$.

U_3 Z troch rôznych bodov jednej priamky najviac jeden leží medzi zvyšnými dvoma.

U_4 (**Paschova axióma**)
Nech sú v rovine α dané tri nekolineárne body A, B, C a priamka p neprechádzajúca bodom C. Potom ak platí $\mu(ApB)$ tak platí $\mu(ApC)$ alebo $\mu(BpC)$.

Z. AXIÓMY ZHODNOSTI

Z_1 Ak u je úsečka a $\overrightarrow{OX}$ polpriamka s počiatkom v bode O, potom na $\overrightarrow{OX}$ existuje bod A taký, že $u \cong OA$.

Z_2 Ak $u_1 \cong u$ a $u_2 \cong u$, potom $u_1 \cong u_2$.

Z_3 Ak platí $\mu(ABC)$, $\mu(A'B'C')$ a $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, potom $AC \cong A'C'$.

Z_4 a) Ak je daný uhol KLM, polrovina $\overrightarrow{hA}$ a na jej hranici h je zvolená polpriamka $\overrightarrow{OX}$, potom existuje práve jedna polpriamka $\overrightarrow{OP}$ ležiaca v polrovine $\overrightarrow{hA}$ taká, že $\sphericalangle KLM \cong \sphericalangle XOP$.
b) Každý uhol je zhodný sám so sebou.

Z_5 Nech sú dané dva trojuholníky ABC, $A'B'C'$ a nech platí $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$, potom $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$.

S. AXIÓMY SPOJITOSTI

S (**Dedekindova axióma**)
Daná je úsečka AB. Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ je rozklad (množiny) úsečky AB, pričom platí

1. $A \in \mathcal{A}$ & $B \in \mathcal{B}$,
2. $X \in \mathcal{A}$ & $\mu(AX'X) \Longrightarrow X' \in \mathcal{A}$.

Potom existuje bod D taký, že všetky body medzi A, D patria do $\mathcal{A}$ a všetky body medzi B, D patria do $\mathcal{B}$.
(D sa nazýva Dedekindov bod)

Poznámka. Dedekindova axióma spojitosti sa zvykne nahrádzať dvoma axiómami, tzv. Archimedovou a Cantorovou axiómou.

S' (**Archimedova axióma**)
Nech sú dané úsečky AB, CD. Potom exituje prirodzené číslo n a postupnosť bodov $P_0, P_1, P_2, \dots P_n$ ležiacich na $\overrightarrow{AB}$ s nasledujúcimi vlastnosťami

1. $P_0 = A$, $P_{i-1}P_i \cong CD$, $i = 1, 2, \dots, n$,
2. $\neg\mu(ABP_{n-1})$ & $\mu(ABP_n)$.

S'' (**Cantorova axióma**, tzv. axióma úplnosti)
Je daná nekonečná postupnosť úsečiek u_1, u_2, u_3, ... taká, že $u_{n+1} \subset u_n$, pre každé n. Potom existuje bod spoločný všetkým úsečkám.

R. AXIÓMA ROVNOBEŽNOSTI (Euklidovská geometria)

R_E Bodom A neležiacim na priamke p prechádza najviac jedna priamka ležiaca v rovine $\overleftrightarrow{pA}$, ktorá nemá s priamkou p žiaden spoločný bod.

R. AXIÓMA ROVNOBEŽNOSTI (Lobačevského geometria)

R_L Bodom A neležiacim na priamke p prechádzajú aspoň dve priamky v rovine $\overleftrightarrow{pA}$, ktoré nemajú s p žiaden spoločný bod.