Michaela Chvojková

– časť bakalárskej záverečnej práce

MNOŽINY BODOV DANEJ VLASTNOSTI

Kapitola 1

Množiny bodov danej vlastnosti v euklidovskej rovine

1.1 Definície niektorých pojmov

Už na základnej škole sa stretávame s pojmami ako sú kružnica, kruh, os úsečky. Nespájame ich však s množinami bodov danej vlastnosti. S týmto pojmom prichádzame do styku až na strednej škole. Pripomeňme si najprv, čo rozumieme pod množinou bodov danej vlastnosti.

Definícia 1.1.1 *Pod množinou bodov danej vlastnosti rozumieme množinu bodov (z $\mathbb{E}_2$), ktorá spĺňa nasledujúce dve vlastnosti:*
(1) Každý bod množiny má danú vlastnosť.
(2) Každý bod (z $\mathbb{E}_2$), ktorý má danú vlastnosť, patrí do množiny.

Pripomeňme ešte na začiatok definície niektorých pojmov, s ktorými sa v práci budeme častejšie stretávať.

Nech $S(\in \mathbb{E}_2)$ je daný bod, nech r je úsečka. Pod *kružnicou* so stredom S a polomerom r rozumieme množinu všetkých bodov $X(\in \mathbb{E}_2)$, pre ktoré platí, že úsečka SX je zhodná s úsečkou r. Kružnicu so stredom S a polomerom r označujeme $k(S,r)$.
$k(S,r) := \{X \in \mathbb{E}_2, SX \cong r\}$

Nech $S(\in \mathbb{E}_2)$ je daný bod, nech r je úsečka. Pod *kruhom* so stredom S a polomerom r rozumieme množinu všetkých bodov $X(\in \mathbb{E}_2)$, pre ktoré platí, že úsečka SX je zhodná alebo menšia ako úsečka r. Kruh so stredom S a polomerom r označujeme $K(S,r)$.
$K(S,r) := \{X \in \mathbb{E}_2, SX \cong r \vee SX < r\}$

Nech AB je úsečka. Pod *stredom úsečky* rozumieme bod S úsečky AB, pre ktorý platí $SA \cong SB$. Stred úsečky AB budeme označovať S_{AB}.
$S_{AB} : S_{AB} \in AB \wedge AS_{AB} \cong BS_{AB}$

Nech AB je úsečka. *Os úsečky* AB je priamka, ktorá prechádza jej stredom a je na ňu kolmá. Os úsečky AB budeme označovať o_{AB}.
$o_{AB} : S_{AB} \in o_{AB} \wedge o_{AB} \perp AB$

Nech AVB je uhol. Pod *osou uhla* AVB rozumieme polpriamku $\overrightarrow{VP}$, ktorá uhol AVB rozpoľuje, t.j. $\sphericalangle AVP \cong \sphericalangle BVP$. Os uhla AVB budeme označovať $o_{\sphericalangle AVB}$.

Nech a, b sú rovnobežné rôzne priamky a nech $A \in a$, $B \in b$. Pod *rovinným pásom* s hraničnými priamkami a, b rozumieme prienik polrovín $\overrightarrow{aB} \cap \overrightarrow{bA}$.

Je daný rovinný pás s hraničnými priamkami a, b. Pod *osou rovinného pásu* rozumieme priamku o rovnobežnú s priamkami a, b rovnako vzdialenú od obidvoch týchto priamok.

1.2 Niektoré základné množiny bodov danej vlastnosti

Zopakujme si niektoré základné množiny bodov danej vlastnosti v planimetrii. Dôkazy pre niektoré z nich uvedieme na konci tejto časti práce ako riešené príklady, niektoré uvedieme ako úlohy na samostatnú prácu. V ďalšom už nebudeme vždy zdôrazňovať, že základnou množinou, ktorú uvažujeme v celej práci je euklidovská rovina.

(M_1) Množina všetkých bodov, ktoré majú od daného bodu S vzdialenosť rovnú danému kladnému reálnemu číslu r, je **kružnica** so stredom S a polomerom r.

(M_2) Množina všetkých bodov, ktoré majú od daného bodu S vzdialenosť rovnú alebo menšiu ako dané kladné reálne číslo r, je **kruh** so stredom S a polomerom r.

(M_3) Množina všetkých bodov, ktoré majú od danej priamky p vzdialenosť rovnú danému kladnému reálnemu číslu v, je **zjednotenie dvoch rôznych rovnobežiek**, ktoré sú rovnobežné s danou priamkou p a majú od nej vzdialenosť v.

(M_4) Množina všetkých bodov, ktoré majú od danej priamky p vzdialenosť rovnú alebo menšiu ako dané kladné reálne číslo v, je **rovinný pás**, ktorého osou je priamka p a vzdialenosť jeho hraničných priamok je $2v$.

(M_5) Množina všetkých bodov, ktoré majú od daných dvoch rôznych rovnobežiek a, b rovnakú vzdialenosť, je **os rovinného pásu** určeného rovnobežkami a, b.

(M_6) Množina všetkých bodov, ktoré majú od daných dvoch rôznobežiek a, b rovnakú vzdialenosť, je **zjednotenie dvoch kolmých priamok** o_1, o_2, kde o_1 rozpoľuje uhol rôznobežiek a, b a o_2 rozpoľuje jeho vedľajší uhol.

(M_7) Množina všetkých bodov, ktoré majú od daných dvoch rôznych bodov A, B rovnakú vzdialenosť, je **os úsečky** AB.

(M_8) Množina všetkých bodov, ktoré patria uhlu ABC a majú od jeho ramien rovnakú vzdialenosť je **os uhla** ABC.

(M_9) Množina všetkých bodov, ktoré majú od kružnice $k(S, r)$ vzdialenosť d, pričom

$d < r$, je zjednotenie dvoch sústredných kružníc $k_1(S, r+d)$ a $k_2(S, r-d)$. Tieto kružnice sa nazývajú **ekvidištanty kružnice** $k(S, r)$.

Príklad 1.2.1 *Dokážte, že množina všetkých bodov, ktoré majú od daných dvoch rôznych bodov A, B rovnakú vzdialenosť je os úsečky AB.*

Dôkaz. Na základe definície množiny bodov danej vlastnosti musíme dokázať, že os úsečky spĺňa obidve vlastnosti (1) aj (2) (definícia 1.1.1). Dôkaz teda urobíme v dvoch častiach.

I. Dokážeme, že každý bod osi úsečky AB má od krajných bodov A, B rovnakú vzdialenosť, t.j.

$X \in o_{AB} \stackrel{?}{\Longrightarrow} |AX| = |BX|$. (obr. 1.1 a)

Označme S stred úsečky AB.

Nech $X \in o_{AB}$. Potom $X = S$ alebo $X \in o_{AB} - \{S\}$.

a) Ak $X = S$, tak zrejme $AX \cong BX$, a tak $|AX| = |BX|$.

b) Ak $X \in o_{AB} - \{S\}$, tak môžeme uvažovať trojuholník ABX. Potom podľa vety (sus) o zhodnosti trojuholníkov platí

$\Delta ASX \cong \Delta BSX$, s: $AS \cong BS$ (lebo S je stred úsečky AB)
u: $\sphericalangle ASX \cong \sphericalangle BSX$ (lebo $o_{AB} \perp \overleftrightarrow{AB}$)
s: $SX \cong SX$ (lebo zhodnosť úsečiek je reflexívna relácia).

Preto aj pre tretiu dvojicu strán spomínaných trojuholníkov platí, že sú zhodné, t.j. $AX \cong BX$ a teda $|AX| = |BX|$.

II. Dokážeme, že ak má bod X rovnakú vzdialenosť od bodov A, B, tak bod X leží na osi úsečky AB, t.j.

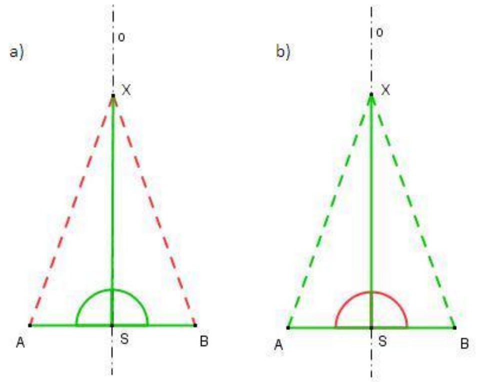
$|AX| = |BX| \stackrel{?}{\Longrightarrow} X \in o_{AB}$. (obr. 1.2 b)

Označme S stred úsečky AB.

Nech $|AX| = |BX|$. Ak A, B, X sú kolineárne body, tak $X = S_{AB}$ a potom zrejme $X \in o_{AB}$. Ak A, B, X sú nekolineárne, tak môžeme uvažovať trojuholník ABX. Potom podľa vety (sss) o zhodnosti trojuholníkov platí

$\Delta ASX \cong \Delta BSX$, s: $AS \cong BS$ (lebo S je stred úsečky AB)
s: $SX \cong SX$ (lebo zhodnosť úsečiek je reflexívna)
s: $AX \cong BX$ (lebo podľa predpokladu platí $|AX| = |BX|$).

Preto sa zhodujú aj prislúchajúce dvojice vnútorných uhlov trojuholníkov ASX a BSX. Takže $\sphericalangle ASX \cong \sphericalangle BSX$, keďže ide o vedľajšie uhly, tak sú pravé a teda priamka $\overleftrightarrow{SX}$ je kolmá na úsečku AB. Potom zrejme priamka $\overleftrightarrow{SX}$ je teda osou úsečky AB, takže $X \in o_{AB}$. □



Obrázok 1.1: Os úsečky

Príklad 1.2.2 *Dokážte, že množinou všetkých bodov, ktoré patria uhlu AVB a majú od jeho ramien $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ rovnakú vzdialenosť je os uhla AVB.*

Dôkaz.

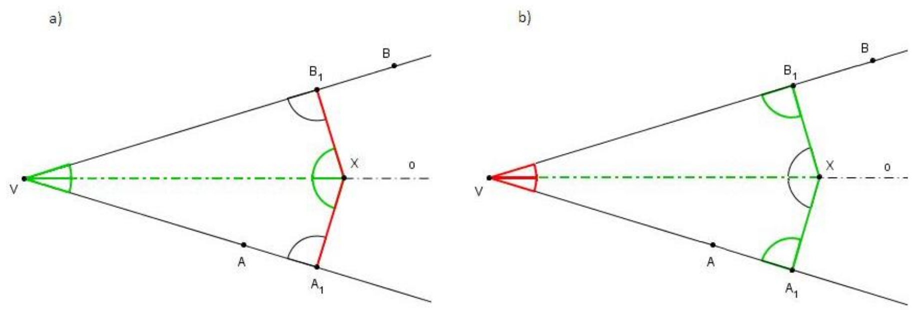
Nech $X \in o_{\sphericalangle AVB} - \{V\}$. Označme A_1 pätu kolmice z bodu X na polpriamku $\overrightarrow{VA}$ a B_1 pätu kolmice z bodu X na polpriamku $\overrightarrow{VB}$. Potom platí $|X, \overrightarrow{VA}| = |XA_1|$ a $|X, \overrightarrow{VB}| = |XB_1|$. Musíme dokázať, že pre každý bod X platí:
$X \in o_{\sphericalangle AVB} \iff |X, \overrightarrow{VA}| = |X, \overrightarrow{VB}|$.
I. Najprv dokážeme, že každý bod X osi uhla AVB má od obidvoch jeho ramnien rovnakú vzdialenosť, t.j.
$X \in o_{\sphericalangle AVB} \overset{?}{\Longrightarrow} |X, \overrightarrow{VA}| = |X, \overrightarrow{VB}|$. (obr. 1.2 a)
Nech $X \in o_{\sphericalangle AVB}$. Potom $X = V$ alebo $X \in o_{\sphericalangle AVB} - \{V\}$. Ak $X = V$, tak zrejme $|X, \overrightarrow{VA}| = 0 = |X, \overrightarrow{VB}|$.
Nech $X \in o_{\sphericalangle AVB} - \{V\}$. Uvažujme trojuholníky VA_1X a VB_1X. Keďže $\sphericalangle XVA_1 \cong \sphericalangle XVB_1$ a zároveň aj $\sphericalangle VA_1X \cong \sphericalangle VB_1X$, tak potom aj $\sphericalangle VXA_1 \cong \sphericalangle VXB_1$. Potom podľa vety (usu) o zhodnosti trojuholníkov platí
$\Delta VA_1X \cong \Delta VB_1X$, u: $\sphericalangle XVA_1 \cong \sphericalangle XVB_1$.
s: $VX \cong VX$
u: $\sphericalangle VXA_1 \cong \sphericalangle VXB_1$.
Preto aj pre dvojicu strán XA_1 a XB_1 uvažovaných trojuholníkov platí, že sú zhodné, t.j. $XA_1 \cong XB_1$, a teda $|XA_1| = |XB_1|$.
II. Dokážeme, že ak bod X má rovnakú vzdialenosť od obidvoch ramien uhla, potom leží na osi uhla AVB, t.j.
$|X, \overrightarrow{VA}| = |X, \overrightarrow{VB}| \overset{?}{\Longrightarrow} X \in o_{\sphericalangle AVB}$. (obr. 1.2 b)
Podľa predpokladu platí, že $|X, \overrightarrow{VA}| = |X, \overrightarrow{VB}| = 0$ alebo $|X, \overrightarrow{VA}| = |X, \overrightarrow{VB}| (\neq 0)$. Ak $|X, \overrightarrow{VA}| = |X, \overrightarrow{VB}| = 0$, tak zrejme $X = V \in o_{\sphericalangle AVB}$. Ak $|XA_1| = |XB_1| \neq 0$, potom $XA_1 \cong XB_1$. Uvažujme trojuholníky VA_1X a VB_1X. Podľa vety (Ssu) o zhodnosti trojuholníkov platí

$\Delta VA_1X \cong \Delta VB_1X$, S: $VX \cong VX$

s: $XA_1 \cong XB_1$

u: $\sphericalangle VA_1X \cong \sphericalangle VB_1X$.

Preto aj uhly A_1VX a B_1VX sú zhodné. Potom na základe definície osi uhla platí, že polpriamka $\overrightarrow{VX}$ je osou uhla A_1VB_1, a teda bod X leží na osi uhla AVB. $\square$



Obrázok 1.2: Os uhla AVB

Príklad 1.2.3 *Dokážte, že rovinný pás s hraničnými priamkami a, b je množinou bodov, ktoré majú od priamky a, zároveň aj od priamky b vzdialenosť menšiu alebo rovnú vzdialenosti priamok a, b.*

Dôkaz. Označme $|_a\ _b|$ rovinný pás s hraničnými priamkami a, b a vzdialenosť priamok $|a, b| = v$.

I. Dokážeme implikáciu

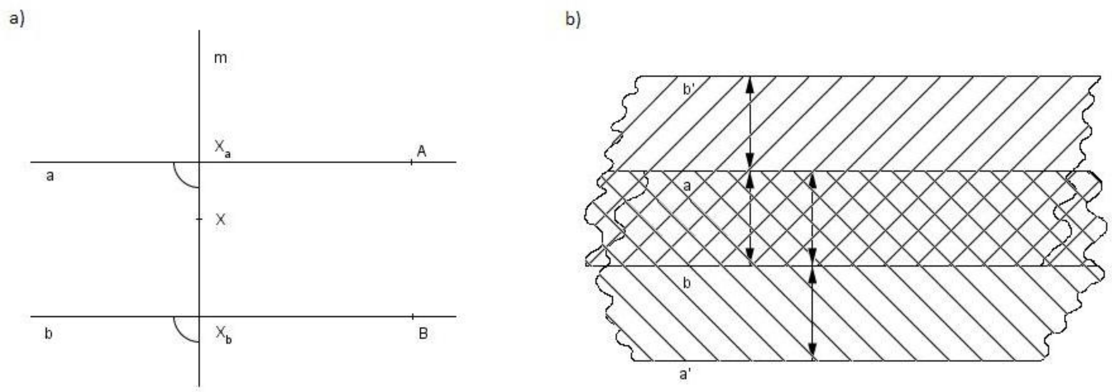
$X \in |_a\ _b| \overset{?}{\Longrightarrow} |X, a| \leq |a, b| \wedge |X, b| \leq |a, b|$ (obr. 1.3 a).

Nech X je bod rovinného pásu s hraničnými priamkami a, b. Zvoľme body $A \in a, B \in b$. Potom $X \in \overrightarrow{aB} \cap \overrightarrow{bA}$. Uvažujme bodom X priamku m kolmú na hraničné priamky a, b a označme X_a, X_b jej priesečníky s priamkami a, b. Potom $X \in \overrightarrow{X_aX} \cap \overrightarrow{X_bX} = X_aX_b = X_aX \cup XX_b$. Využijeme vlastnosti miery a dostaneme $|X_aX_b| = |X_aX| + |XX_b| < |X_aX|$, analogicky platí $|X_aX_b| < |X_bX|$.

II. Dokážeme implikáciu

$|X, a| \leq |a, b| \wedge |X, b| \leq |a, b| \overset{?}{\Longrightarrow} X \in |_a\ _b|$ (obr. 1.3 b).

Nech pre bod X platí $|X, a| \leq |a, b|$ a $|X, b| \leq |a, b|$. Množina bodov X, pre ktoré platí, že $|X, a| \leq |a, b|$ je rovinný pás $|_b\ _{b'}|$, ktorého osou je priamka a a vzdialenosť $|b, b'| = 2v$. Množina všetkých bodov X, pre ktoré platí, že $|X, b| \leq |a, b|$ je rovinný pás $|_a\ _{a'}|$, ktorého osou je priamka b a vzdialensoťť $|a, a'| = 2v$. Potom X patrí prieniku rovinných pásov $|_b\ _{b'}| \cap |_a\ _{a'}|$. Prienik týchto dvoch rovinných pásov je rovinný pás s hraničnými priamkami a, b, teda X patrí rovinnému pásu s hraničnými priamkami a, b.



Obrázok 1.3: Rovinný pás

□

Ďalšími známymi množinami bodov danej vlastnosti, ktoré sa veľmi často využívajú pri riešení konštrukčných aj dôkazových úloh, sú **Talesova kružnica** a takzvaná **množina $\mathcal{G}$**. Týmto množinám sa budeme venovať v ďalších častiach práce.

1.3 Talesova kružnica

Už starovekí Egypťania a Babylončania vedeli, že pokiaľ sú A, B, C tri rôzne body na kružnici a AC je jej priemer, potom uhol ABC je pravý. Keďže sa z tohto obdobia nezachovali žiadne dokumenty s dôkazom tohto tvrdenia, veta o tomto a aj obrátenom tvrdení dostala pomenovanie po Talesovi, ktorý túto vetu dokázal. V dôkaze použil svoje vlastné výsledky týkajúce sa uhlov pri základni rovnoramenného trojuholníka a o súčte vnútorných uhlov trojuholníka.

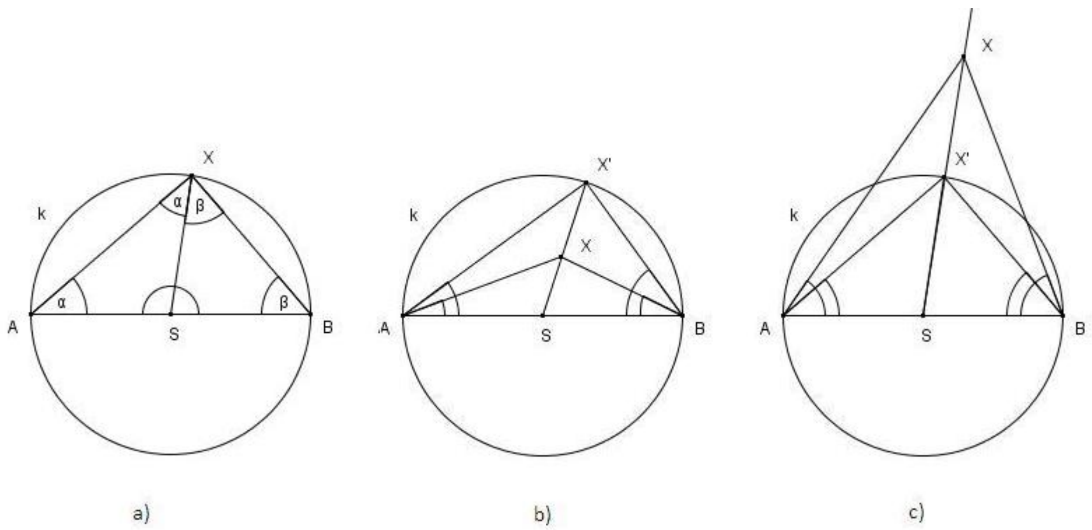
Veta 1.3.1 (Veta o Talesovej kružnici) *Nech A, B sú dva rôzne body. Množina vrcholov X pravých uhlov všetkých pravouhlých trojuholníkov ABX s preponou AB je kružnica k s priemerom AB okrem bodov A, B.*
*Kružnicu k nad priemerom AB nazývame **Talesova kružnica**.*

Dôkaz. I. Najprv dokážeme implikáciu
$X \in k - \{A, B\} \stackrel{?}{\Longrightarrow} |\sphericalangle AXB| = \frac{\pi}{2}$
Označme S stred a r polomer kružnice k nad priemerom AB.
Nech $X \in k - \{A, B\}$. Potom $|SX| = r$ a $|SA| = |SB| = r$, trojuholníky AXS (so základňou AX) a BXS (so základňou BX) sú rovnoramenné. Uhly pri základniach sú zhodné, t.j. $\sphericalangle SXA \cong \sphericalangle SAX$ a $\sphericalangle SXB \cong \sphericalangle SBX$ (obr. 1.4 a).
Označme $\alpha = |\sphericalangle SXA| = |\sphericalangle SAX|$
$\beta = |\sphericalangle SXB| = |\sphericalangle SBX|$.
Uhly ASX a BSX sú susedné, čiže súčet ich veľkostí je π. Využijeme aditívnosť miery a tiež, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je π. Potom
$\pi = |\sphericalangle ASX| + |\sphericalangle BSX| = (\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta)$,
z toho vyplýva, že $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.
Potom stačí, ak opäť využijeme aditívnosť miery.
Preto $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle SXA| + |\sphericalangle SXB| = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

II. Teraz dokážeme implikáciu
$X \notin k - \{A, B\} \stackrel{?}{\Longrightarrow} |\sphericalangle AXB| \neq \frac{\pi}{2}$
(čo je ekvivalentné tvrdenie k implikácii $|\sphericalangle AXB| = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow X \in k - \{A, B\}$).
Rozlíšime päť prípadov:
a) $X \in \{A, B\}$
Potom uhol AXB nie je definovný.
b) $\mu(AXB)$
Potom $\sphericalangle AXB$ je priamy, teda $|\sphericalangle AXB| \neq \frac{\pi}{2}$.
c) $\mu(XAB) \vee \mu(ABX)$
Potom $\sphericalangle$AXB je nulový, teda $|\sphericalangle AXB| \neq \frac{\pi}{2}$.
d) $X \in \operatorname{int} k - AB$ (bod X leží vnútri kružnice k a neleží na úsečke AB)

Označme $\{X'\} = \overrightarrow{SX} \cap k$ (obr. 1.4 b).
Potom dôsledkom aditívnosti miery dostaneme $|\sphericalangle SAX| < |\sphericalangle SAX'|$ a $|\sphericalangle SBX| < |\sphericalangle SBX'|$. Potom $|\sphericalangle SAX| + |\sphericalangle SBX| < |\sphericalangle SAX'| + |\sphericalangle SBX'|$. Keďže súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka je π a podľa I. časti dôkazu $|\sphericalangle AX'B| = \frac{\pi}{2}$, tak $|\sphericalangle AXB| > |\sphericalangle AX'B| = \frac{\pi}{2}$. Teda $|\sphericalangle AXB| \neq \frac{\pi}{2}$.
e) $X \in \operatorname{ext} k - \overleftrightarrow{AB}$ (bod X leží zvonku kružnice k a neleží na priamke $\overleftrightarrow{AB}$) Označme $\{X'\} = \overrightarrow{SX} \cap k$ (obr. 1.4 c). Využitím aditívnosti dostaneme $|\sphericalangle SAX| > |\sphericalangle SAX'|$ a $|\sphericalangle SBX| > |\sphericalangle SBX'|$. Potom $|\sphericalangle SAX| + |\sphericalangle SBX| > |\sphericalangle SAX'| + |\sphericalangle SBX'|$. Opäť využijeme, že súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka je π a že podľa I. časti dôkazu $|\sphericalangle AX'B| = \frac{\pi}{2}$, takže $|\sphericalangle AXB| < |\sphericalangle AX'B| = \frac{\pi}{2}$. Teda $|\sphericalangle AXB| \neq \frac{\pi}{2}$.

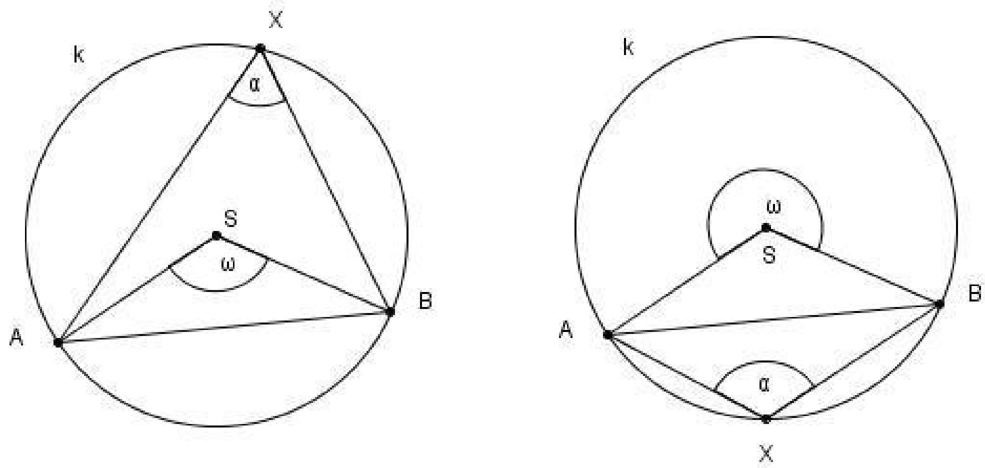
□



Obrázok 1.4: Talesova kružnica

1.4 Obvodový a stredový uhol

V tejto časti práce sa budeme zaoberať stredovým a obvodovým uhlom. Nech je daná kružnica $k(S, r)$ a nech A, B sú jej ľubovoľné dva body. Body A, B rozdeľujú kružnicu na dva kružnicové oblúky. Budeme hovoriť, že uhol ASB prislúcha k tomu kružnicovému oblúku kružnice k, ktorý je jeho podmnožinou. Nech X je bod kružnice rôzny od bodov A, B. Analogicky budeme hovoriť, že konvexný uhol AXB prislúcha tomu kružnicovému oblúku kružnice k, ktorý je jeho podmnožinou.
Uhol ASB (aj jeho doplňujúci uhol) nazývame **stredový uhol** a konvexný uhol AXB nazývame **obvodový uhol**. Budeme hovoriť, že stredový uhol ASB a obvodový uhol AXB si prislúchajú, ak obidva prislúchajú tomu istému kružnicovému oblúku kružnice k.



Obrázok 1.5: Obvodový a stredový uhol, ktoré si prislúchajú

Ďalej sa budeme zaoberať vzťahom medzi veľkosťou prislúchajúceho si obvodového a stredového uhla.

Veta 1.4.1 (Veta o obvodovom a stredovom uhle) *Nech $k(S, r)$ je kružnica a nech A, B, X sú tri navzájom rôzne body kružnice k. Potom veľkosť stredového uhla ASB je rovná dvojnásobku veľkosti prislúchajúceho obvodového uhla AXB.*

Dôkaz. 1) Nech úsečka AB je priemerom kružnice k.
Stredový uhol ASB je priamy uhol, teda $|\sphericalangle ASB| = \pi$. Potom podľa Talesovej vety (veta 1.3.1) $|\sphericalangle AXB| = \frac{\pi}{2}$ pre ľubovoľný bod $X \in k - \{A, B\}$ Teda platí, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle AXB|$.

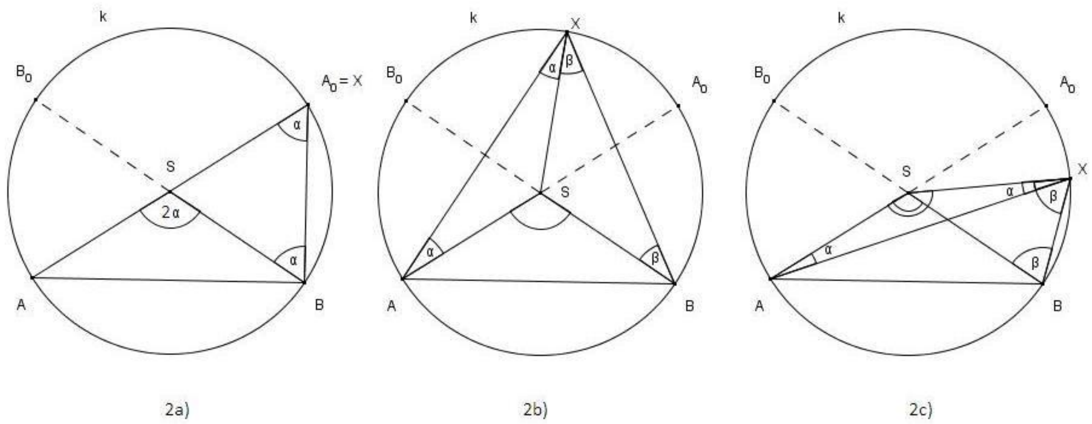
2) Nech AB je tetiva kružnice k, ktorá nie je jej priemerom. Dôkaz urobíme najprv pre prípad, keď stredový uhol ASB je konvexný.
Označme A_0, B_0 body kružnice k tak, aby AA_0 a BB_0 boli priemery kružnice. Nech

AXB je obvodový uhol prislúchajúci konvexnému stredovému uhlu ASB. Rozlíšime tri rôzne pozície vrchola X obvodového uhla AXB.

2a) $X = A_0$ (prípadne $X = B_0$) (obr. 1.6 2a)
Označme $\alpha = |\sphericalangle AXB|$. Platí $|SX| = |SB|$, pretože obe úsečky sú polomery kružnice k, a teda trojuholník SXB je rovnoramenný. Potom uhly pri základni sú zhodné, čiže aj $|\sphericalangle SBX| = \alpha$. Preto $|\sphericalangle XSB| = \pi - 2\alpha$ a pre stredový uhol ASB platí $|\sphericalangle ASB| = \pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha = 2|\sphericalangle AXB|$.

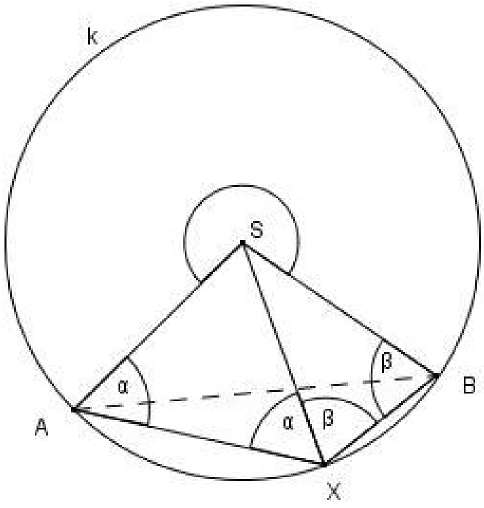
2b) $X \in \widehat{A_0B_0} - \{A_0, B_0\}$, (kde $\widehat{A_0B_0}$ sme označili ten kružnicový oblúk s krajnými bodmi A_0, B_0, pre ktorý platí, že s konvexným uhlom AA_0B má jediný spoločný bod A_0) (obr. 1.6 2b). Označme $|\sphericalangle AXS| = \alpha$ a $|\sphericalangle BXS| = \beta$. Trojuholníky ASX a BSX sú rovnoramenné (ich ramená sú polomery kružnice). Potom $|\sphericalangle XAS| = \alpha$ a $|\sphericalangle XBS| = \beta$. Pre veľkosť stredového uhla ASB platí $|\sphericalangle ASB| = 2\pi - (|\sphericalangle ASX| + |\sphericalangle BSX|) = 2\pi - ((\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta)) = 2(\alpha + \beta) = 2|\sphericalangle AXB|$.

2c) $X \notin \widehat{A_0B_0}$ (teda stred S kružnice k nie je vnútorným bodom obvodového uhla AXB) (obr. 1.6 2c). Označme $|\sphericalangle SXA| = \alpha$ a $|\sphericalangle SXB| = \beta$. Potom $|\sphericalangle AXB| = \beta - \alpha$. Pre rovnoramenné trojuholníky AXS, BXS platí, že $|\sphericalangle SAX| = \alpha$ a $|\sphericalangle SBX| = \beta$. Potom $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASX| - |\sphericalangle BSX| = (\pi - 2\alpha) - (\pi - 2\beta) = 2(\beta - \alpha) = 2|\sphericalangle AXB|$.



Obrázok 1.6:

3) Dôkaz pre prípad, keď stredový uhol ASB je nekonvexný (obr. 1.7), zapíšeme stručne. Je analogický ako v prípade $2b$.
Trojuholníky AXS a BXS sú rovnoramenné. Potom pre nekonvexný stredový uhol ASB platí $|\angle ASB| = 2\pi - (\pi - 2\alpha) - (\pi - 2\beta) = 2(\alpha + \beta)$. Pre prislúchajúci obvodový uhol AXB platí $|\sphericalangle AXB| = \alpha + \beta$. Teda $|\angle ASB| = 2|\sphericalangle AXB|$.



Obrázok 1.7:

□

1.5 Množina G

Ďalšou množinou bodov danej vlastnosti, ktorú často využívame pri riešení úloh je tzv. množina $\mathcal{G}$. Pod **množinou** $\mathcal{G}$ rozumieme množinu všetkých bodov v rovine, z ktorých vidíme danú úsečku AB pod daným uhlom $\gamma, \gamma \in (0°, 180°)$. Kvôli stručnejšiemu vyjadrovaniu budeme pre množinu všetkých bodov, z ktorých vidíme úsečku AB pod uhlom γ používať označenie $\mathcal{G}_{(AB,\gamma)}$. Z vety o obvodovom a stredovom uhle (veta 1.4.1) vyplýva, že množina $\mathcal{G}$ je zjednotenie dvoch kružnicových oblúkov k, k' s krajnými bodmi A, B, ktoré do množiny $\mathcal{G}$ nepatria.

Uvedieme konštrukciu množiny $\mathcal{G}_{(AB,\gamma)}$.

Zrejme pre $\gamma = 90°$, množinou bodov danej vlastnosti je Talesova kružnica k s priemerom AB okrem bodov A, B.

Pre ostatné hodnoty γ zostrojíme množinu $\mathcal{G}_{(AB,\gamma)}$ podľa nasledovného postupu:

1. Zostrojíme o_{AB} (os úsečky AB).

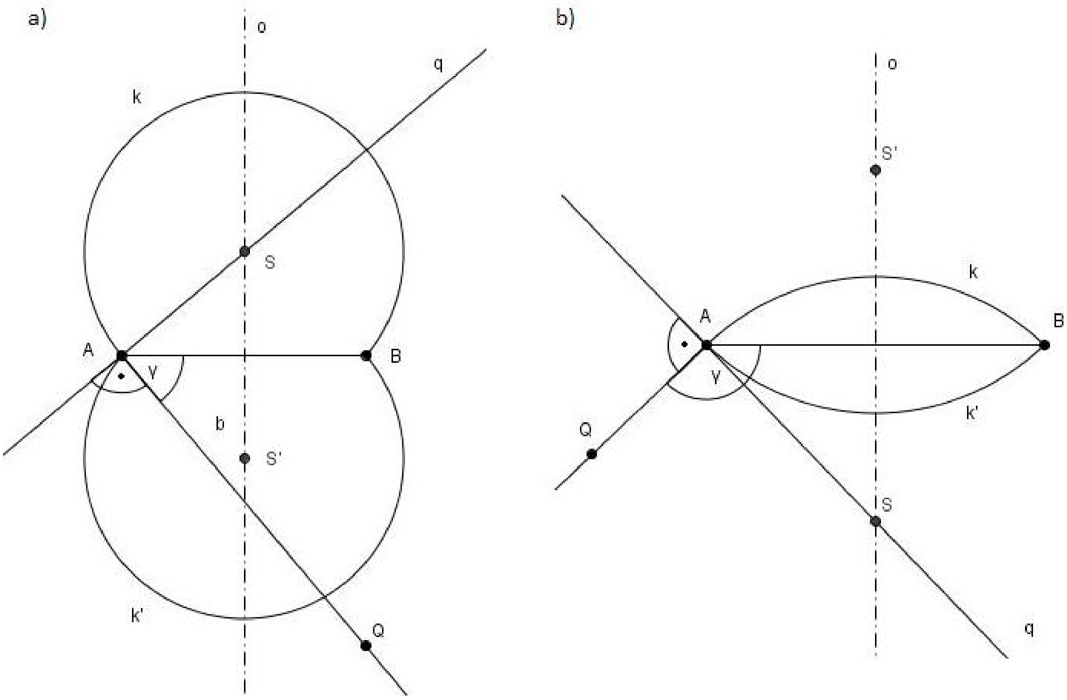
2. Zostrojíme uhol BAQ v jednej polrovine s hranicou $\overleftrightarrow{AB}$, kde $|\sphericalangle BAQ| = \gamma$.

3. Zostrojíme priamku q kolmú na $\overleftrightarrow{AQ}$ a prechádzajúcu bodom A.

4. Pre stred S hľadaného kružnicového oblúku k platí $\{S\} = q \cap o_{AB}$, polomer $r = |SA|$. Druhý kružnicový oblúk k' je súmerne združený s oblúkom k podľa priamky $\overleftrightarrow{AB}$.

5. a) Pre $\gamma < 90°$ zostrojíme tie kružnicové oblúky kružníc $k(S, SA)$, $k'(S', S'A)$ s krajnými bodmi A, B, ktoré prislúchajú k nekonvexným stredovým uhlom (obr. 1.8 a).

b) Naopak pre $\gamma > 90°$ zostrojíme tie kružnicové oblúky kružníc $k(S, SA)$, $k'(S', S'A)$ s krajnými bodmi A, B, ktoré prislúchajú ku konvexným stredovým uhlom (obr. 1.8 b).



Obrázok 1.8: Množina bodov G

Kapitola 2

Úlohy riešené s využitím množín bodov danej vlastnosti

2.1 Určenie množiny bodov danej vlastnosti v euklidovskej rovine

V súvislosti s množinami bodov danej vlastnosti riešime dva typy úloh. Jedným typom sú dôkazové úlohy. V tomto type úloh máme určiť hľadanú množinu bodov danej vlastnosti. Riešenie úlohy má tri časti. Najprv stanovíme hypotézu a v ďalších dvoch častiach dokážeme, že každý bod množiny stanovenej v hypotéze má danú vlastnosť a naopak, že bod, ktorý má danú vlastnosť, patrí množine stanovenej v hypotéze.

Úloha 2.1.1 *Dokážte, že rovinný pás s hraničnými priamkami a, b je množina všetkých bodov, ktorých súčet vzdialeností od priamok a, b sa rovná vzdialenosti priamok a, b.*

Úloha 2.1.2 *Nájdite množinu stredov všetkých úsečiek, ktoré majú krajné body na dvoch rôznych rovnobežných priamkach a,b.*

Úloha 2.1.3 *Úsečka KL je priemer kružnice k. Koľko existuje na kružnici k takých bodov M, že trojuholník KLM je rovnostranný?*

Úloha 2.1.4 *Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré majú daný polomer r a prechádzajú daným bodom A.*

Úloha 2.1.5 *Je daná priamka p a na nej bod V. Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky p v bode V.*

Úloha 2.1.6 *Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú danej kružnice $k(S, r)$ v bode T.*

Úloha 2.1.7 *Dané sú dva body A, B. Nájdite množinu vrcholov V všetkých*
a) ostrých uhlov AVB,
b) tupých uhlov AVB.

Úloha 2.1.8 *Daný je trojuholník KLM. Nájdite množinu všetkých bodov X, pre ktoré platí $|KX| \geq |LX|$ a zároveň $|MX| \geq |LX|$.*

Úloha 2.1.9 *Daná je priamka p a bod A. Po priamke p sa pohybuje bod X. Nájdite množinu stredov všetkých úsečiek AX.*

Úloha 2.1.10 *Daná je úsečka PR. Určte množinu ťažísk všetkých pravouhlých trojuholníkov s preponou PR.*

Príklad 2.1.1 *Daná je úsečka AB dlhá $3\,\mathrm{cm}$. Určte množinu stredov všetkých kosoštvorcov so stranou AB.*

Riešenie

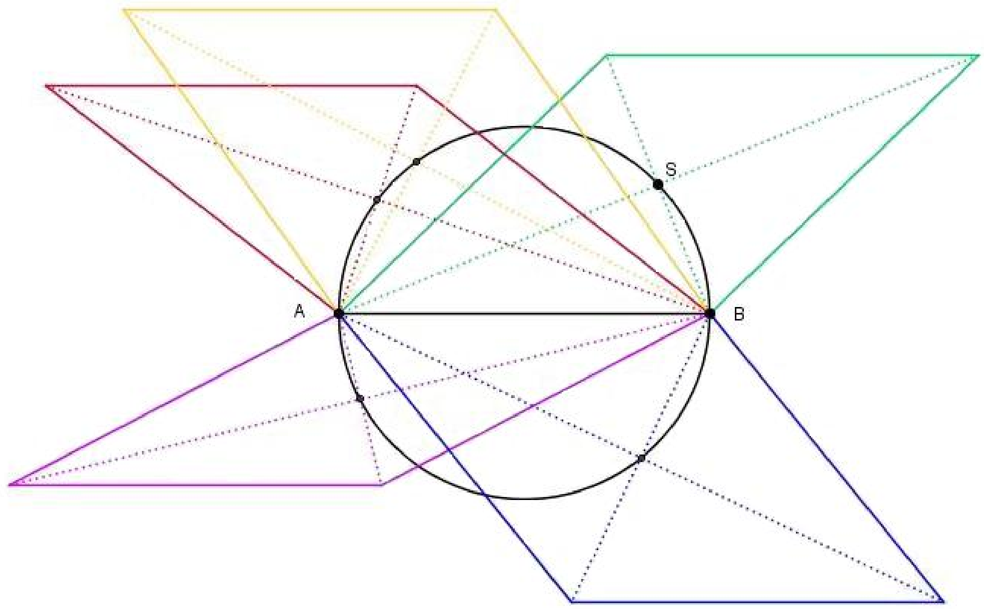
Stred kosoštvorca S je prienikom jeho uhlopriečok. Uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé, takže môžeme uvažovať pravouhlý trojuholník ABS s pravým uhlom pri vrchole S a preponou AB.

Hypotéza:

Množina vrcholov S všetkých pravouhlých trojuholníkov ABS s preponou AB je kružnica k nad priemerom AB okrem bodov A, B. Takže množina stredov všetkých kosoštvorcov so stranou AB je kružnica nad priemerom AB okrem bodov A, B.

Dôkaz hypotézy:

Dôkaz je priamym dôsledkom vety o Talesovej kružnici. 1.3.1



Obrázok 2.1: Množina stredov kosoštvorcov

Úloha 2.1.11 *Nech trojuholník ABC má strany $a = 5\,\mathrm{cm}, b = 5\,\mathrm{cm}, c = 6\,\mathrm{cm}$. Určte množinu bodov $X \in \overrightarrow{ABC}$, pre ktoré platí:*

a) $|AX| \leq 4\,\mathrm{cm} \wedge |BX| \leq 5\,\mathrm{cm}$,
b) $|AX| \leq 4\,\mathrm{cm} \wedge |BX| \geq 3\,\mathrm{cm}$.

Úloha 2.1.12 *Daná je úsečka AB. Určte nasledujúce množiny bodov danej vlastnosti.*
a) $\mathcal{M}_1 = \{X, |AX| = \frac{1}{3}|AB|\}$,
b) $\mathcal{M}_2 = \{X, |AX| = \frac{2}{3}|AB| \wedge |BX| \leq \frac{2}{3}|AB|\}$,
c) $\mathcal{M}_3 = \{X, |AX| \leq \frac{2}{3}|AB| \wedge |BX| < \frac{2}{3}|AB|\}$,
d) $\mathcal{M}_4 = \{X, |AX| \geq \frac{1}{2}|AB| \wedge |BX| \leq \frac{5}{6}|AB|\}$.

Úloha 2.1.13 *Daná je kružnica $k(S, r_1)$. Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré majú daný polomer r_2, pričom $r_2 < r_1$ a s kružnicou $k(S, r_1)$ majú*
a) vnútorný dotyk,
b) vonkajší dotyk,
c) vnútorný alebo vonkajší dotyk.

Úloha 2.1.14 *Nech $k_1(S, r_1)$, $k_2(S, r_2)$ sú sústredné kružnice. Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú obidvoch sústredných kružníc.*

2.2 Konštrukčné úlohy s využitím množín bodov danej vlastnosti v euklidovskej rovine

Druhým typom úloh, ktoré riešime v súvislosti s množinami bodov danej vlastnosti sú konštrukčné úlohy. Riešenie konštrukčnej úlohy pozostáva zo štyroch častí. Rozbor, konštrukcia, dôkaz a diskusia. V rozbore popíšeme, ktoré údaje poznáme a aké množiny bodov danej vlastnosti môžeme využiť pri konštrukcii neznámych bodov. Súčasťou rozboru je náčrt. V druhej časti zostrojíme hľadaný objekt a zapíšeme postup konštrukcie. V tretej časti zdôvodníme, že zostrojený objekt vyhovuje požiadavkám zo zadania. V diskusii určíme počet riešení vzhľadom na zadané prvky.

Úloha 2.2.1 *Je daná kružnica $k(S, r)$ a na nej bod A. Zostrojte bod, ktorý má od kružnice k danú vzdialenosť x a od bodu A danú vzdialenosť y.*

Úloha 2.2.2 *Narysujte rovnostranný trojuholník ABC so stranou dĺžky* 6 cm*. Zostrojte množinu všetkých jeho vnútorných bodov, pre ktoré platí, že*
a) sú vzdialené aspoň 3 cm *od každého z jeho vrcholov,*
b) nie sú vzdialené viac ako 5 cm *od žiadneho z jeho vrcholov.*

Úloha 2.2.3 *Daná je úsečka EF. Zostrojte množinu bodov, z ktorých vidíme úsečku EF pod uhlom:*
a) $\alpha = 40°$,
b) $\beta = 90°$,
c) $\gamma = 130°$.

Príklad 2.2.1 *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané AB, v_c a γ.*

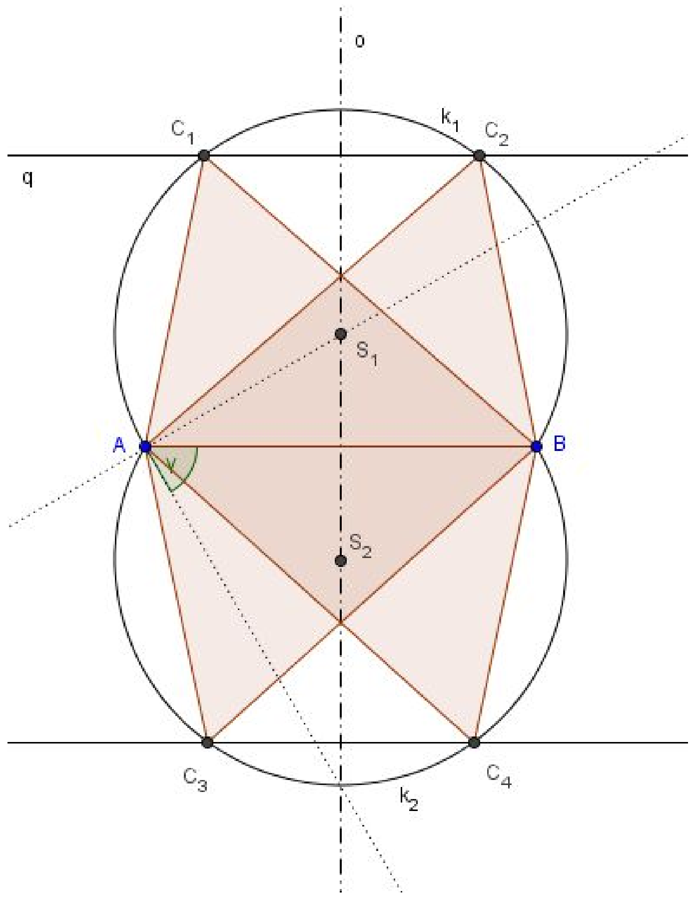
Riešenie

Rozbor

Hľadáme vrchol C trojuholníka ABC, pre ktorý platí $|\sphericalangle ACB| = \gamma$ a $|C, \overleftrightarrow{AB}| = v_c$. Potom $C \in \mathcal{G}_{(AB,\gamma)} \cap q$, ($\mathcal{G}_{(AB,\gamma)}$ je množina všetkých bodov, z ktorých vidíme úsečku AB pod uhlom γ), priamka q je rovnobežná s priamkou $\overleftrightarrow{AB}$ a $|q, \overleftrightarrow{AB}| = v_c$.

Postup konštrukcie

1. Zvolíme zadanie
2. $\mathcal{G}_{(AB,\gamma)}$
3. $q; |q, \overleftrightarrow{AB}| = v_c$
4. $C; C \in \mathcal{G}_{(AB,\gamma)} \cap q$
5. ΔABC



Obrázok 2.2:

Dôkaz

Zostrojený trojuholník ABC má požadované vlastnosti, čo priamo vyplýva z využitých množín bodov danej vlastnosti, množiny $\mathcal{G}_{(AB,\gamma)}$ a množiny všetkých bodov rovnako vzdialených od priamky $\overleftrightarrow{AB}$.

Diskusia

Počet riešení úlohy závisí od veľkosti uhla γ a výšky v_c.

1) Ak $\gamma = 90°$ a

1a) $v_c < \frac{c}{2}$, úloha má 4 riešenia,

1b) $v_c = \frac{c}{2}$, úloha má 2 riešenie,

1c) $v_c > \frac{c}{2}$, úloha nemá riešenie.

2) Ak $0° < \gamma < 90°$ a

2a) $v_c < \frac{c}{2}(\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma})$, úloha má 4 riešenia,

2b) $v_c = \frac{c}{2}(\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma})$, úloha má 2 riešenie,

2c) $v_c > \frac{c}{2}(\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma})$, úloha nemá riešenie.

3) Ak $90° < \gamma < 180°$ a

3a) $v_c < \frac{c}{2}(\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma})$, úloha má 4 riešenia,

3b) $v_c = \frac{c}{2}(\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma})$, úloha má 2 riešenie, 3c) $v_c > \frac{c}{2}(\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma})$, úloha nemá riešenie.

Úloha 2.2.4 *Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná strana AB, v_a a v_b.*

Úloha 2.2.5 *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané a, t_b, t_c.*

Úloha 2.2.6 *Nech S, D, T sú nekolineárne body. Zostrojte trojuholník ABC, ak S je stred kružnice jemu opísanej, D je stred strany AB a T je ťažisko ΔABC.*

Úloha 2.2.7 *Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom je daná strana c, uhol α a polomer r kružnice opísanej danému trojuholníku.*

Úloha 2.2.8 *Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom je daná strana b, uhol α a polomer ρ kružnice vpísanej danému trojuholníku.*

Úloha 2.2.9 *Narysujte trojuholník PQR, ak je dané QR, PR a ťažnica na stranu PR.*

Úloha 2.2.10 *Daná je úsečka AB. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:*
b) $\gamma, |BC|$,
a) v_c, t_c.

Úloha 2.2.11 *Narysujte množinu bodov X, ktorých vzdialenosť od priamky $\overleftrightarrow{AB}$ je rovná dĺžke úsečky AB, a z ktorých vidíme úsečku AB pod uhlom $45°$.*

Úloha 2.2.12 *Nech A, B, C sú tri nekolineárne body. Zostrojte všetky body, z ktorých vidíme úsečku AB pod uhlom $45°$ a zároveň úsečku BC pod uhlom $35°$.*

Úloha 2.2.13 *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané a, b, t_b.*

Úloha 2.2.14 *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané b, t_b a obsah $\Delta BCB'$, kde B' je stred strany AC.*

Úloha 2.2.15 *Znázornite množinu všetkých bodov v rovine, pre ktoré platí:*
a) $(x < 1) \wedge (y < 4) \wedge (y \geq 4 - x)$,
b) $(0 < x < 3) \wedge (y < 2) \wedge (y > x - 1)$.

Úloha 2.2.16 *Daná je kružnica $k(C, 2\,\mathrm{cm})$ a bod A tak, že $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$. Zostrojte všetky kružnice, ktoré prechádzajú bodom A, dotýkajú sa kružnice k a majú polomer*
a) $r_1 = 1\,\mathrm{cm}$,
b) $r_2 = 2\,\mathrm{cm}$,
c) $r_3 = 5\,\mathrm{cm}$.

Príklad 2.2.2 *Daná je kružnica $k(A, r_1)$ a priamka p. Zostrojte kružnicu g s polomerom r_2 ($r_2 < r_1$), ktorá sa dotýka priamky p a zároveň kružnice k.*

Riešenie

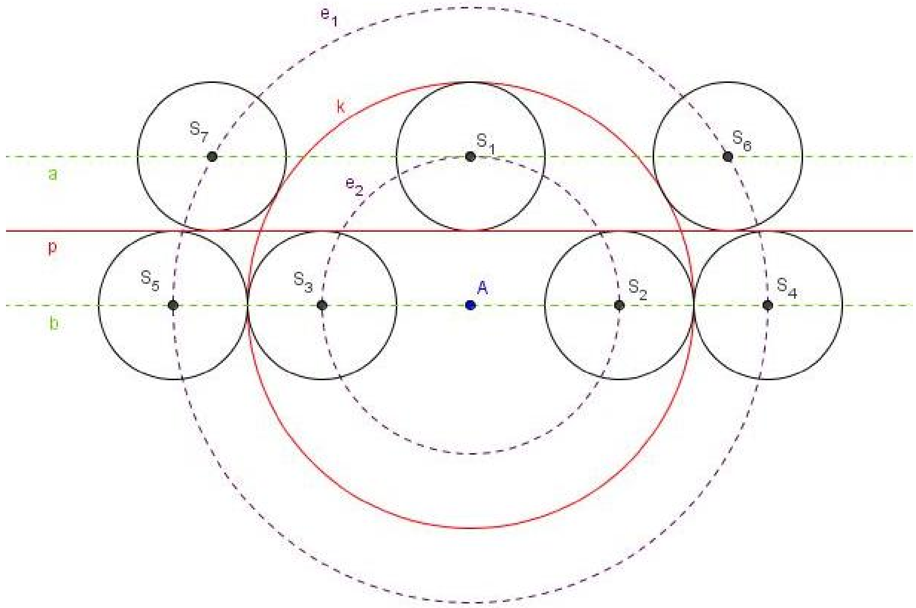
Rozbor

(Pred tým, ako začneme príklad riešiť, musíme si uvedomiť, čo budeme hľadať). Kružnice s polomerom r_2 sa majú dotýkať priamky p a zároveň aj kružnice k, čiže budeme hľadať ich stredy, ktoré sú od oboch útvarov vo vzdialenosti r_2. Množina všetkých bodov X, ktorých vzdialenosť od priamky p je r_2 je zjednotenie dvoch rôznych rovnobežiek, označme ich a, b, ktoré sú rovnobežné s priamkou p a vzdialenosť $|p, a| = |p, b| = r_2$. Množinu všetkých bodov X, ktoré sú od kružnice k vo vzdialenosti r_2 tvoria ekvidištanty danej kružnice k, označme ich e_1, e_2.

Aby sa kružnice s polomerom r_2 dotýkali kružnice k a zároveň priamky p, musia ich stredy patriť súčasne do prvej aj do druhej množiny bodov. Hľadáme teda prienik týchto dvoch množín.

Konštrukcia

1. $k(A, r_1)$, p
2. $a, b; a \parallel b \parallel p \wedge a \neq b \wedge |a, p| = |b, p| = r_2$
3. $e_1, e_2; e_1(A, r_1 + r_2), e_2(A, r_1 - r_2)$
4. $S; S \in (a \cup b) \cap (e_1 \cup e_2)$
5. $g(S, r_2)$



Obrázok 2.3: Kružnice

Dôkaz

Na základe rozboru a konštrukcie je zrejmé, že nájdené stredy kružníc spĺňajú požadovanú vlastnosť. Kružnice sa dotýkajú priamky p a kružnice k a majú polomer r_2.

Diskusia

Počet riešení danej úlohy závisí od vzdialenosti priamky p od stredu S kružnice k a od polomeru r_2 kružníc, ktoré máme zostrojiť.
1) Ak priamka p je sečnica kružnice k a
1a) polomer $r_2 < \frac{1}{2}(r_1 - |Sp|)$, úloha má 8 riešení,
1b) polomer $r_2 = \frac{1}{2}(r_1 - |Sp|)$, úloha má 7 riešení,
1c) polomer $r_2 > \frac{1}{2}(r_1 - |Sp|)$, úloha má 6 riešení.
2) Ak priamka p je dotyčnica ku kružnici k, úloha má 4 riešenia.
3) Ak priamka p je nesečnica kružnice k a
3a) polomer $r_2 < \frac{1}{2}(|Sp| - r_1)$, úloha nemá ani jedno riešenie,
3b) polomer $r_2 = \frac{1}{2}(|Sp| - r_1)$, úloha má 1 riešenie,
2c) polomer $r_2 > \frac{1}{2}(|Sp| - r_1)$, úloha má 2 riešenia.

Úloha 2.2.17 *Narysujte taký obdĺžnik $ABCD$, ktorého šírka sa rovná dĺžke jemu vpísaného obdĺžnika $EFGH$, pričom E, G sú stredy strán AB, CD.*

Úloha 2.2.18 *Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak $|\sphericalangle DAB| = 60°$ a vzdialenosť ťažiska T trojuholníka ΔABD od jeho strán AB, AD je v poradí* 2 cm *a* 1 cm.

Úloha 2.2.19 *Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, ak dĺžka jeho uhlopriečky AC je* $8\,\mathrm{cm}$ *a dĺžka úsečky AE, kde E je stred strany CD je* $5\,\mathrm{cm}$.

Úloha 2.2.20 *Zostrojte konvexný štvoruholník $PQRS$, pre ktorý platí:* $|PQ| = 10\,\mathrm{cm}$, $|QR| = |XY| = 4\,\mathrm{cm}$, *kde X, Y sú stredy strán PQ a RS a trojuholníky PQR, PQS sú pravouhlé s preponou PQ.*

2.3 Príklady z matematickej olympiády

V poslednej časti tejto kapitoly si uvedieme ešte niekoľko úloh, ktoré sme vybrali spomedzi príkladov Matematickej olympiády kategórie Z8 a Z9.

Úloha 2.3.1 (I. kolo 21. ročníka MO Z8) *V rovine je daná kružnica $k(S, 6cm)$ a bod $M, |MS| = 2cm$. Zostrojte trojuholník ABC s vrcholmi ležiacimi na k tak, aby bod M bol stredom úsečky AB a priamka $\overleftrightarrow{BS}$ bola ťažnicou trojuholníka ABC. Určte aj počet riešení.*

Úloha 2.3.2 (I. kolo 23. ročníka MO Z8) *Daný je pravouhlý trojuholník ABC, kde $|AB| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 3\,\mathrm{cm}$. Opíšte mu štvorec $AKLM$ tak, aby platilo, že bod $B \in KL$ a bod $C \in LM$.*

Úloha 2.3.3 (I. kolo 24. ročníka MO Z9) *Je daný rovnostranný trojuholník ABC so stranou a. Zostrojte bod O taký, že O je priesečník výšok a bod P súmerne združený s bodom O podľa BC. Dokážte, že štvoruholníku $ABPC$ môžeme vpísať aj opísať kružnicu a určte polomery kružníc.*

Úloha 2.3.4 (I. kolo 25. ročníka MO Z8) *Je daný obdĺžnik $ABCD$ a prirodzené číslo n. Zostrojte vo vonkajšej oblasti obdĺžnika po rade na priamkach $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}$ a $\overleftrightarrow{DA}$ body A', B', C', D' tak, aby $|AA'| = |CC'| = \frac{1}{n}|AB|$ a $|BB'| = |DD'| = \frac{1}{n}|BC|$.*
1. Dokážte, že A', B', C', D' sú vrcholy rovnobežníka.
2. Vyjadrite $S_{A'B'C'D'}$ pomocou n a obsahu obdĺžnika $ABCD$.
3. Pre ktoré $n \in N$ má rovnobežník $A'B'C'D'$ najväčší možný obsah?

Úloha 2.3.5 (I. kolo 33. ročníka MO Z8) *Daný je štvorec $KLMN$ so stranou $a = 6\,\mathrm{cm}$. Zostrojte trojuholník ABC, pre ktorý platí, že*
$A \in \overleftrightarrow{KL}$,
$C \in \overleftrightarrow{KN}$
$|MA| = |MC| = 7\,\mathrm{cm}$
$|AB| : |BC| : |CA| = 1,5 : 2 : 1$.

Príklad 2.3.1 (I. kolo 26. ročníka MO Z8) *Zostrojte rovnoramenný lichobežník s ramenom dĺžky b, ktorému je vpísaná kružnica k s polomerom r.*

Riešenie

Rozbor

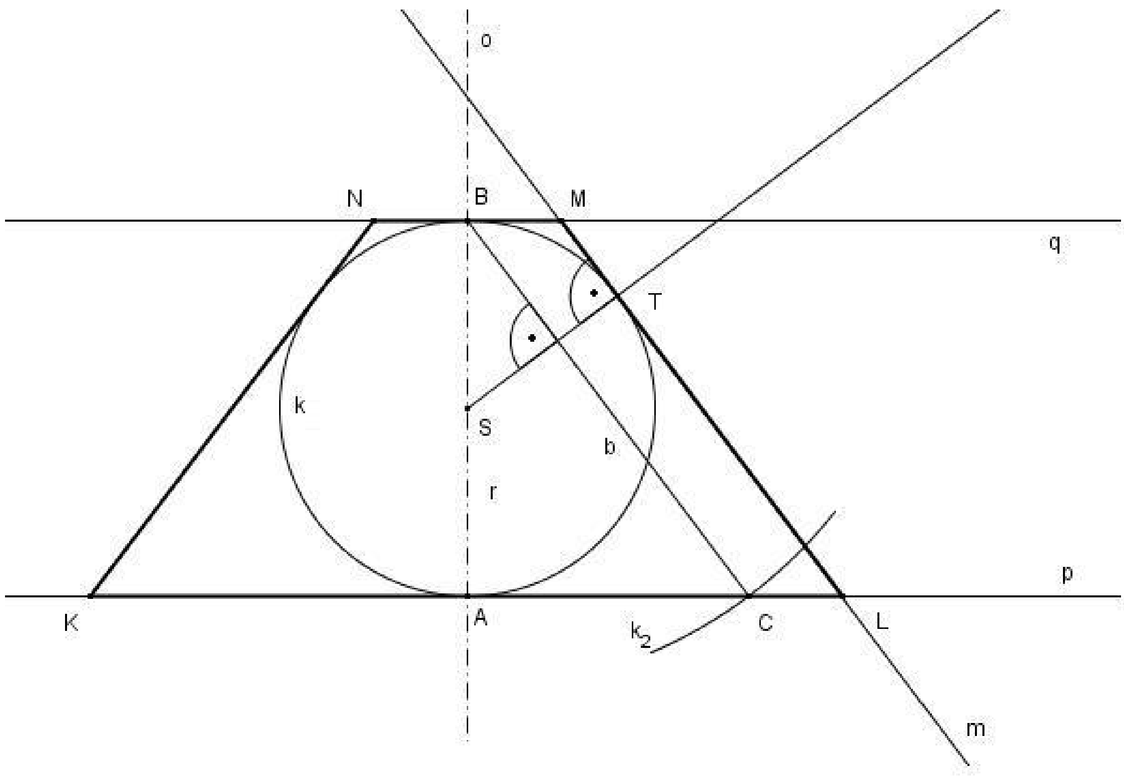
Lichobežníku je vpísaná kružnica k s polomerom r, takže lichobežník má výšku $2r$. Priamky, na ktorých ležia strany lichobežníka sú dotyčnice ku kružnici. Strany KL a MN ležia na rovnobežných priamkach p, q a dotýkajú sa kružnice k. Priamka

m je dotyčnicou ku kružnici k, krajné body ramena ML sú prienikom priamky m s priamkami p, q, kde $p \parallel q$ a dĺžka ramena $|ML| = b$. Keďže lichobežník je rovnoramenný, jeho osou súmernosti je o_{KL} (os základne KL).

Postup konštrukcie

1. zvolíme zadanie b, r
2. ΔBAC ($|BC| = b, |BA| = 2r, |\sphericalangle BAC| = 90°$)
3. $k(S, r)$, kde S je stred AB
4. m; m je dotyčnica ku k rovnobežná s BC
5. $L; L \in \overleftrightarrow{AC}$
6. $M; M \in q \cap m$, kde $B \in q \wedge q \parallel \overleftrightarrow{AC}$
7. $KN; KN = \sigma_o(LM)$
8. lichobežník $KLMN$

Konštrukcia



Obrázok 2.4: Lichobežník

Dôkaz

Z vlastností lichobežníka a z postupu konštrukcie priamo vyplýva dôkaz.

Diskusia

Ak je dĺžka ramena lichobežníka b menšia alebo rovná priemeru kružnice $d = 2r$, tak na základe trojuholníkovej nerovnosti sa pomocný trojuholník BAC nedá zostrojiť, a teda úloha nemá riešenie. Inak má úloha vždy jedno riešenie.

Úloha 2.3.6 *Zostrojte štvoruholník $KLMN$, ktorému je opísaná kružnica k s polomerom $4\,\mathrm{cm}$ a pre vnútorné uhly platí $|\sphericalangle KLM| = 124°$, $|\sphericalangle LMN| = 72°$, $|\sphericalangle MNK| = 56°$ a $|\sphericalangle NKL| = 108°$.*

Úloha 2.3.7 *Je daný pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$. Určte veľkosť vnútorných uhlov trojuholníkov ABG, BEH a BGI, ktorých vrcholy sú zároveň vrcholmi osemuholníka.*

Úloha 2.3.8 *Je daný pravidelný dvanásťuholník $ABCDEFGHIJKL$. Určte uhol priamky $\overleftrightarrow{CH}$ s priamkami $\overleftrightarrow{HK}$, $\overleftrightarrow{JE}$, $\overleftrightarrow{LG}$ a $\overleftrightarrow{BK}$.*

Úloha 2.3.9 *V rovine daného vypuklého štvoruholníka $ABCD$ nájdi všetky body X, ktorých súčet vzdialeností od A, B, C, D je najmenší.*

Kapitola 3

Výsledky a návrhy riešení úloh s využitím množín bodov danej vlastnosti

Cieľom poslednej kapitoly je pomôcť čitateľovi pri riešení úloh. Rozhodli sme sa, že k úlohám z podkapitoly 2.1 uvedieme výsledky. K podkapitolám 2.2 a 2.3 uvedieme stručný návod, ako by mal čitateľ postupovať pri riešení, prípadne aké množiny bodov danej vlastnosti môže vo svojom riešení využívať. Každý čitateľ by sa mal snažiť vyriešiť úlohy samostatne. Túto pomôcku by mal použiť až vo chvíli, ak je niektorá úloha príliž zložitá a on nevie, ako pokračovať. Táto kapitola slúži hlavne na porovnanie výsledkov, prípadne postupov využitých pri riešení.

3.1 Výsledky úloh na určenie množiny bodov danej vlastnosti v $\mathbb{E}_2$

2.1.1 Nech X je ľubovoľný bod a nech priamka m prechádzajúca bodom X je kolmá na priamky a, b. Označme $\{X_a\} = m \cap a, \{X_b\} = m \cap b$. Dôkážeme ekvivalenciu $X \in |_{a\,b}| \iff |X_aX| + |XX_b| = |X_aX_b|$, pričom využijeme aditívnosť miery.
Ak $X \in |_{a\,b}|$, tak $\mu(X_aXX_b)$, a teda $|X_aX \cup XX_b| = |X_aX| + |XX_b| = |X_aX_b|$.
Ak $X \notin |_{a\,b}|$, tak $\mu(XX_aX_b)$, a teda $|XX_a| + |XX_b| = |XX_a| + (|XX_a| + |XX_b|) > |X_aX_b|$.

2.1.2 os rovinného pásu $|_{a\,b}|$

2.1.3 žiadny (vyplýva z Pytagorovej vety)

2.1.4 kružnica $k(A, r)$

2.1.5 priamka q, $q \perp p \wedge V \in a$

2.1.6 priamka $\overleftrightarrow{ST}$

2.1.7 a) $\operatorname{ext} k(S_{AB}, |AS_{AB}|)$

b) $\operatorname{int} k(S_{AB}, |AS_{AB}|)$

2.1.8 konvexný uhol $S_{KL}VS_{LM}$, kde $V \in o_{KL} \cap o_{LM}$

2.1.9 priamka $a; a \parallel p, |a, p| = \frac{1}{2}|A, p|$

2.1.10 kružnica $k(S_{PR}, |PS_{PR}|)$

2.1.11 a) prienik kruhov určených kružnicami $k_1(A, 4\,\text{cm})$ a $k_2(B, 5\,\text{cm})$

b) analogicky ako v možnosti a)

2.1.12 a) kružnica $k(A, \frac{1}{3}|AB|)$

b) kružnicový oblúk prislúchajúci konvexnému uhlu PQR, kde $P, Q \in k_1(A, \frac{2}{3}|AB|) \cap k_2(B, \frac{2}{3}|AB|)$

c) prienik kruhov určených kružnicami $k_1(A, \frac{2}{3}|AB|)$ a $k_2(B, \frac{2}{3}|AB|)$ okrem kružnice $k_2(B, \frac{2}{3}|AB|)$

d) kruh určený kružnicou $k_1(B, \frac{5}{6}|AB|)$ okrem vnútra kruhu určeného kružnicou $k_2(A, \frac{1}{2}|AB|)$

2.1.13 a) $k_1(S, r_1 - r_2)$

b) $k_2(S, r_1 + r_2)$

c) $k_1(S, r_1 - r_2) \cup k_2(S, r_1 + r_2)$

2.1.14 $k_1(S, \frac{r_1+r_2}{2}) \cup k_2(S, \frac{r_1-r_2}{2})$

3.2 Návody na riešenie konštrukčných úloh s využitím množín bodov danej vlastnosti v $\mathbb{E}_2$

2.2.1 Využijeme ekvidištanty kružnice e_1, e_2 a kružnicu $k(A, y)$.

2.2.2 Využijeme množinu bodov rovnako vzdialených od A, B, C.

2.2.3 a) Využijeme množinu bodov $\mathcal{G}_{(EF, 40^\circ)}$,

b) využijeme Talesovu kružnicu,

c) využijeme množibu bodov $\mathcal{G}_{(EF, 130^\circ)}$.

2.2.4 Trojuholníky ABV_a a ABV_b sú pravouhlé (V_a, V_b je päta výšky z vrcholu A, B).

2.2.5 Vzdialenosť ťažiska T od vrcholov je $|TB| = \frac{2}{3}t_b$ a $|TC| = \frac{2}{3}t_c$.

2.2.6 D je stred strany c. Ťažnica t_c prechádza ťažiskom trojuholníka a aj stredom strany c, tak $t_c \subset \overrightarrow{DT}$, pričom $t_c = \frac{3}{2}|DT|$. AB je tetiva opísanej kružnice k. Os tetivy prechádza stredom AB a stredom kružnice. Priamka $\overleftrightarrow{SD}$ je osou tetivy AB, čiže $AB \perp \overleftrightarrow{SD}$.

2.2.7 Stred O kružnice opísanej trojuholníku leží na osi strany c, pričom platí $|O, A| = |O, B| = r$.

2.2.8 Stred S kružnice vpísanej trojuholníku leží na osi uhla α, $|S, b| = \rho$. Poplriamka $\overrightarrow{CS}$ je osou uhla γ, takže $|\sphericalangle ACS| = \frac{1}{2}\gamma$.

2.2.9 $Q \in k_1(R, |RQ|) \cap k_2(S_{PR}, t_{PR})$, kde t_{PR} je ťažnica na stranu PR.

2.2.10 a) Využijeme množinu bodov $\mathcal{G}$.

b) Využijeme množinu bodov rovnako vzdialených od úsečky AB a množinu bodov rovnako vzdialených od S_{AB}.

2.2.11 Využijeme ekvidištanty priamky $\overleftrightarrow{AB}$ vo vzdialenosti $|AB|$ a množinu $\mathcal{G}$.

2.2.12 Využijeme množiny bodov $\mathcal{G}_{(AB,45^\circ)}$ a $\mathcal{G}_{(BC,35^\circ)}$.

2.2.13 Bod B vznikne prienikom kružníc $k_1(C, 5\,\text{cm})$ a $k_2(B', 6\,\text{cm})$, kde B' je stred strany b.

2.2.14 Z obsahu trojuholníka BCB' vypočítame výšku trojuholníka na stranu b.

2.2.15 a) $(\Delta ABC - (BC \cup AC)) \cup \{A, B\}$, kde $A[0, 4], B[1, 3], C[1, 4]$.

b) ΔABC bez hraničných priamok, pričom $A[0, -1], B[3, 2], C[0, 2]$.

2.2.16 Využívame ekvidištanty kružnice k a množinu bodov rovnako vzdialených od bodu A.

2.2.17 Zvolíme si úsečku BC, jej stred označíme G. Zostrojíme polpriamky $\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{CY}$ a $\overrightarrow{GZ}$ kolmé na BC, ležiace v jednej polrovine s hraničnou priamkou $\overleftrightarrow{BC}$. Bod $H \in k \cap \overrightarrow{CY}$, kde $k(G, |BC|)$.

2.2.18 Zostrojíme $\alpha = |\sphericalangle XAY|$, ťažisko $T \in p \cap q$, kde $p \parallel \overleftrightarrow{AX} \wedge |p, \overleftrightarrow{AX}| = 2\,\text{cm}$ a $q \parallel \overleftrightarrow{AY} \wedge |q, \overleftrightarrow{AY}| = 1\,\text{cm}$. Vrchol $C \in \overrightarrow{AT}$, pričom $|AC| = 3|AT|$.

2.2.19 Označme S stred uhlopriečky AC. Uhol SEC je pravý, takže bod E leží na Talesovej kružnici nad priemerom SC a $|E, A| = 5\,\text{cm}$. Uhlopriečky v obdĺžniku sa rozpoľujú a majú rovnakú veľkosť. Uhol pri vrchole D je tiež pravý, čiže bod D vznikne prienikom Talesovej kružnice nad priemerom AE a kružnice $k_2(S, 4\,\text{cm})$.

2.2.20 $\Delta PQR, \Delta PQS$ sú pravouhlé, čiže vrcholy R, S ležia na Talesovej kružnici k nad priemerom PQ. Strana RS je tetivou kružnice k. Priamka XY prechádza stredom kružnice k a stredom tetivy RS, takže $XY \perp RS$. To znamená, že bod Y leží na Talesovej kružnici g nad priemerom XR.

3.3 Návody na riešenie úloh z matematickej olympiády

2.3.1 Úsečka AB je tetiva kružnice k. Priamka $\overleftrightarrow{MS}$ je jej osou, čiže $\overleftrightarrow{MS} \perp AB$. Ťažnica t_b leží na priamke $\overleftrightarrow{BS}$, pričom $t_b = \frac{3}{2}|BS|$.

2.3.2 Platí $|\sphericalangle BQC| = 90°, |\sphericalangle BQA| = 45°$. Pri konštrukcii využijeme Talesovu kružnicu a množinu bodov $\mathcal{G}$.

2.3.3 Stred vpísanej kružnice leží na osiach uhlov CAB, BPC, ABP, PCA, čiže na polpriamkach $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BR}, \overrightarrow{CR}$ (v poradí). Všetky štyri osi sa pretínajú na úsečke AP v bode R, a to je stred kružnice vpísanej štvoruholníku $ABPC$. Trojuholník OBP je rovnostranný, všetky osi úsečiek AB, AC, BP, CP prechádzajú bodom O, ktorý je stredom kružnice opísanej štvoruholníku $ABPC$.

2.2.4 (1) Najprv treba dokázať, že $\Delta A'B'B \cong \Delta C'D'D \wedge \Delta CC'B' \cong \Delta AA'D'$, pričom musí platiť, že $A'C'$ a $B'D'$ sú uhlopriečky rovnobežníka, a teda body $A', B,' C,' D'$ sú súmerné podľa priesečníka uhlopriečok AC, BD.

(2) Označme $|AB| = a, |BC| = b$. Pre obsah S_n rovnobežníka $A'B'C'D'$ platí: $S_n = S_{ABCD} + 2(S_{A'B'B} + S_{CC'B'})$. Treba si uvedomiť, že $|AA'| = \frac{1}{n}a$ a $|BB'| = \frac{1}{n}b$.

(3) Uvažujme trojuholník $A'B'B$. Pre ktoré n je dĺžka strany BA' najväčšia, ak $|BA'| = a + \frac{1}{n}$?

2.3.5 Body A, C ležia na kružnici $k(M, 7\,\text{cm})$, $|AB| = 1,5|AC|$ a $|BC| = 2|AC|$.

2.2.6 Osemuholníku opíšeme kružnicu a využijeme vetu o obvodovom a stredovom uhle.

2.3.7 Dvanásťuholníku opíšeme kružnicu a využijeme vetu o obvodovom a stredovom uhle.

2.2.8 Využijeme vetu o obvodovom a stredovom uhle.

2.2.9 Hľadáme X také, že $AX + BX + CX + DX = (AX + CX) + (BX + DX) \geq AC + BD$. Rovnosť nastáva vtedy, ak $X \in \text{int}\, AC, BD$, $X = S, S = BD \cap AC$. Treba ešte dokázať, že existuje jediný takýto bod.