UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI
Fakulta prírodných vied

Silvia Bargárová

Zbierka úloh zo stereometrie

Diplomová práca

Katedra matematiky
Banská Bystrica, 2008

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne pod odborným vedením konzultantky RNDr. Gabriely Monoszovej, CSc. Použitú literatúru uvádzam v zozname literatúry.

V Žiline dňa 20.marca 2008 ....

Poďakovanie

Touto cestou by som veľmi rada poďakovala svojej konzultantke RNDr. Gabriele Monoszovej, CSc. za odbornú pomoc pri vypracovaní diplomovej práce.

Abstrakt

Silvia Bargárová, Zbierka úloh zo stereometrie. Diplomová práca.
Univerzita Mateja Bela. Fakulta prírodných vied, Katedra matematiky.
Vedúca práce: RNDr. Gabriela Monoszová, CSc.

Práca je vytvorená ako zbierka úloh z vybraných tematických celkov stereometrie. Diplomová práca obsahuje 197 príkladov z oblasti stereometrie, ktorá sa zaoberá rovinnými rezmi hranatých telies, prienikom priamky a roviny, priesečnicou dvoch rovín a prienikom priamky a telesa.
125 príkladov je venovaných rezom hranatých telies, 19 príkladov určeniu priesečnice dvoch rovín. Na určenie prieniku priamky a roviny je zaradených 35 príkladov a 18 príkladov je na určenie prieniku priamky s hranatým telesom. V práci sú aj vzorové vyriešené úlohy, v každej zo zvolených tém jedna, prípadne dve úlohy. Spolu obsahuje diplomová práca 13 riešených úloh.

Kľúčové slová
stereometria, bod, priamka, rovina, rovinný rez telesa, priesečnica dvoch rovín, priesečník priamky a roviny, priesečník priamky a telesa

Abstrakt

Silvia Bargárová, Colctleion of stereometry. Graduation theses.
Matej Bel University. Fakulty of Natural Sciences, Department of Mathematics.
Supervisor: RNDr. Gabriela Monoszová, CSc.

Presented work is written as a collection of examples from chosen topics of solid geometry. Theses includes 197 examples regarding a planar section of angular entities, line-plain intersection, intersection of two plains and line-entity intersection.

125 exercises are attended to sections of angular entities, 19 to determining of two plains intersection. To line-plain intersection are devoted 35 examples and 18 examples deal with line-entity intersection designation. The theses also contains 13 solved exercises from each mentioned field of solid geometry.

Keywords:

solid geometry, point, straight line, plain, planar section, plains intersection, straight line and plain intersection, straight line and entity intersection

Obsah

ÚVOD

Diplomová práca je vypracovaná ako zbierka úloh zo stereometrie. Zbierka je určená predovšetkým študentom vysokej školy študujúcim v študijnom programe Učiteľstvo matematiky, ako aj všetkým tým, ktorí sa venujú deskriptívnej geometrii, stereometrii a jej úlohám. Predpokladajú sa vedomosti z učiva geometrie základnej a strednej školy.

Hlavným cieľom diplomovej práce je poskytnúť študentom dostatočné množstvo príkladov, ktoré sa zaoberajú rovinnými rezmi hranatých telies, prienikom priamky a roviny, priesečnicou dvoch rovín a prienikom priamky a telesa.

Touto formou sme chceli uľahčiť štúdium stereometrie, pretože nie je veľa dostupných zbierok zo stereometrie zaoberajúcich sa podobnými úlohami, ktoré by obsahovali aj vyriešené príklady a aj príklady na precvičenie. Preto sme sa rozhodli v rámci diplomovej práce takúto zbierku vytvoriť.

Diplomová práca má šesť kapitol, z čoho hlavnú časť práce tvorí zbierka úloh. V prvej kapitole uvádzame základné teoretické východiská.

Druhú až šiestu kapitolu tvorí samotná zbierka úloh. Pre lepšiu orientáciu sme ju rozdelili do štyroch častí (kapitola 2 až 5). Druhá kapitola je venovaná rovinným rezom hranatých telies. Táto kapitola je najrozsiahlejšia a je rozčlenená do šiestich podkapitol podľa toho, aké teoretické poznatky sú k určeniu rezu potrebné. Ďalšie tri kapitoly sú venované úlohám na určenie priesečnice dvoch rovín, priesečníka priamky s rovinou a prieniku priamky a telesa, kde sa na zostrojenie rezu využívajú poznatky z rezov hranatých telies.

V každej kapitole (podkapitole) uvádzame na začiatku prehľad definícií, viet a tvrdení nevyhnutných k riešeniu úloh, ktoré sú zaradené do tejto časti práce. Za nimi nasleduje vždy riešená úloha s podrobným postupom riešenia vrátane obrázka. Potom nasleduje súbor neriešených príkladov, ktoré slúžia na precvičenie danej problematiky. V tejto časti sme sa snažili zoradiť úlohy vždy v poradí od ľahších ku zložitejším. Na záver diplomovej práce je zaradená časť s výsledkami a návodmi pre riešenie úloh z jednotlivých kapitol, čo by malo študentom dopomôcť k správnemu riešeniu.

V úlohách sme sa výlučne zamerali na vzájomnú polohu rôznobežnosti objektov, teda situácie, kedy prienikom objektov je neprázdna množina. Dôkazové úlohy, ktorých riešením je dokázať rovnobežnosť daných objektov nie sú predmetom našej diplomovej práce. V diplomovej práci používame symboliku, ktorú uvádzame na začiatku práce.

Veríme, že naša diplomová práca bude výraznou pomocou študentom pri štúdiu stereometrie.

SYMBOLIKA

$\mathbb{E}_3$	euklidovský priestor
$\overline{\mathbb{E}}_3$	rozšírený euklidovský priestor
A, B, x, P, ...	bod (vlastný)
A_∞, B_∞ ...	bod (nevlastný)
a, p, t, ... ,$\overleftrightarrow{AB}$, ...	priamka (vlastná)
s_∞	nevlastná priamka
u, r, ...,AB, ...	úsečka
α, β ...	rovina (vlastná)
$\overleftrightarrow{ABC}$	rovina daná určujúcimi prvkami
$\overrightarrow{ABCD}$	polpriestor s hranicou $\overleftrightarrow{ABC}$
$\overleftarrow{ABCD}$	opačný polpriestor k polpriestoru ABC
μABC	bod B leží medzi bodmi A, C
(ABC)	deliaci pomer usporiadanej trojice bodov A, B, C
$\mathcal{A}(o; X, X')$	afinita
$\mathcal{K}(V; o; X, X')$	kolineácia
$X \in p$, $X \in \alpha$	bod X leží na priamke p, X leží v rovine α
$p \subset \omega$	priamka p leží v rovine ω
$\cap$	prienik
$\parallel$	rovnobežnosť objektov
$\nparallel$	rôznobežnosť objektov
$\&$	konjunkcia
$\mathbb{T}$	teleso

1 ZÁKLADNÉ TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ

Stereometria je časť geometrie, ktorá sa zaoberá priestorovými útvarmi. Budeme vychádzať z Hilbertovho axiomatického systému.

Za základné elementy (prvky) stereometrie považujeme bod, priamku a rovinu.

- Bod - budeme označovať veľkými písmenami abecedy, prípadne arabskými alebo rímskymi číslicami (A, B, C,..., príp. $1, 2, 3$, ..., I, II, III, ...)
- Priamku - budeme označovať malými písmenami abecedy (a, b, c, o, s, q, ...)
- Rovinu - budeme označovať malými písmenami gréckej abecedy (α, β, γ, ...)

Za primárnu relácie budeme považovať incidenciu. Namiesto "bod je incidentný s priamkou alebo rovinou, priamka je incidentná s rovinou", budeme hovoriť, že bod patrí priamke alebo rovine, priamka leží v rovine, prípadne, že priamka, rovina prechádza bodom, rovina prechádza priamkou.

Pripomeňme, že rovina môže byť určená štyrmi spôsobmi:

- troma nekolineárnymi bodmi,
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží,
- dvoma rôznobežnými priamkami,
- dvoma rôznymi rovnobežnými priamkami.

Tri navzájom rôzne roviny môžu mať vzájomnú polohu nasledujúcich piatich konfigurácií:

Konfigurácia (Kon1). *Všetky tri roviny sú navzájom rovnobežné, (obr. 1).*

$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$

Konfigurácia (Kon2). *Dve z daných rovín sú rovnobežné a tretia je s obidvoma rôznobežná, (obr. 2).*

$\alpha \parallel \beta \,\&\, \gamma \nparallel \alpha$

Konfigurácia (Kon3). *Každé dve z daných rovín sú rôznobežné a všetky tri priesečnice splývajú do jednej priamky, (obr. 3).*

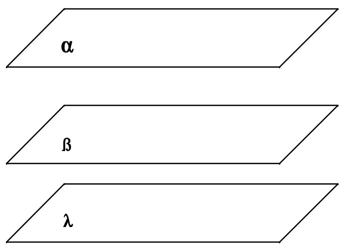
$\alpha \cap \beta = \beta \cap \gamma (= \alpha \cap \gamma)$

Konfigurácia (Kon4). *Každé dve z uvažovaných troch rovín sú rôznobežné a všetky tri priesečnice sú navzájom rovnobežné a rôzne, (obr. 4).*

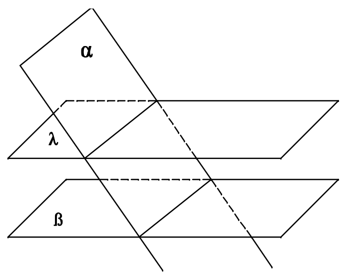
$(\alpha \cap \gamma) \parallel (\beta \cap \gamma) \;\&\; (\alpha \cap \gamma) \neq (\beta \cap \gamma)$

Konfigurácia (Kon5). *Každé dve z uvažovaných troch rovín sú rôznobežné a každé dve priesečnice sú tiež rôznobežné. Všetky tri roviny aj ich priesečnice prechádzajú tým istým bodom, (obr. 5).*

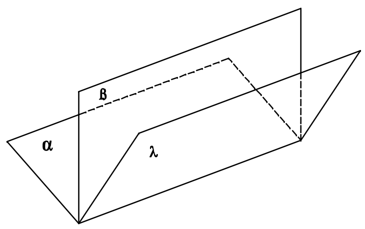
$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$



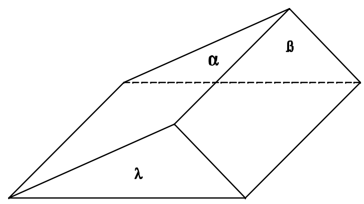
obr. 1 (Kon1)



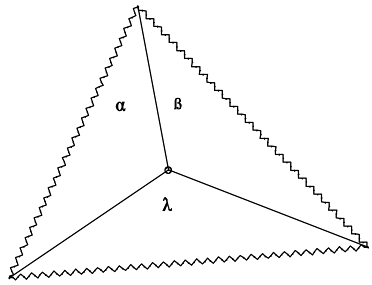
obr. 2 (Kon2)



obr. 3 (Kon3)



obr. 4 (Kon4)



obr. 5 (Kon5)

Keďže v predkladanej zbierke úloh sa vyskytujú aj úlohy na určenie prieniku telesa s polpriestorom, pripomenieme aj definície pojmov polpriestor a opačný polpriestor.

Definícia 1.1. *Nech A, B, C, D sú nekomplanárne body. Pod polpriestorom $ABCD$ rozumieme množinu všetkých bodov X, $(X \in \mathbb{E}_3)$, pre ktoré platí, že prienikom úsečky XD a roviny ABC je prázdna množina alebo jednoprvková množina, ktorej prvkom je práve bod X.*

Rovina ABC sa nazýva hraničnou rovinou polpriestoru.

$$\overrightarrow{ABCD} = \left\{X \in E_3; DX \cap \overleftrightarrow{ABC} = \emptyset\right\} \cup \overleftrightarrow{ABC}$$

Definícia 1.2. *Nech A, B, C, D sú dané nekomplanárne body. Pod opačným polpriestorom ku polpriestoru $ABCD$ rozumieme množinu všetkých tých bodov X, $(X \in \mathbb{E}_3)$, pre ktoré platí, že prienikom úsečky XD a roviny ABC nie je prázdna množina.*

$$\overleftarrow{ABCD} = \left\{X \in E_3; DX \cap \overleftrightarrow{ABC} \neq \emptyset\right\}$$

Z definícií vyplývajú nasledujúce vlastnosti:

Veta 1.1. *a) Ak je bod Y vnútorným bodom polpriestoru $ABCD$, tak platí $\overrightarrow{ABCD} = \overrightarrow{ABCY}$.*

b) Polpriestor je konvexná bodová množina.

c) Rovina ABC (ak jej prienikom s telesom nie je $\emptyset$ a ani podmnožina niektorej steny telesa) rozdelí teleso na dve jeho oblasti. Ak bod D neleží v rovine ABC, tak jednou zo spomínaných dvoch oblastí je prienik telesa s polpriestorom $ABCD$ a druhou oblasťou je prienik telesa s polpriestorom opačným k polpriestoru $ABCD$.

2 ROVINNÝ REZ TELESA

V tejto kapitole sa budeme venovať riešeniu úloh, ktorých cieľom je určiť (narysovať) rovinný rez telesa. Zameriame sa výlučne na hranaté telesá.

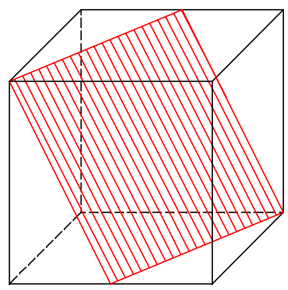
Úlohy sme rozdelili do siedmich podkapitol, ktoré sú vytvorené na základe toho, aké teoretické poznatky je potrebné využiť pri zostrojení rezu telesa.

Definícia 2.1. *Pod rovinným rezom telesa rozumieme prienik roviny a telesa, ak prienikom nie je prázdna množina, ani jednobodová množina, ani úsečka.*

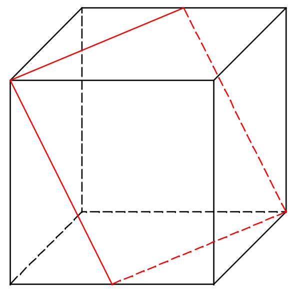
Z definície teda vyplýva, že rez hranatého telesa je mnohouholník, ktorého vrcholy sú priesečníky hrán s rovinou rezu a strany sú priesečnice stien s rovinou rezu. Je užitočné si uvedomiť, že vrcholy rovinného rezu hranatého telesa sú vždy prienikom troch rôznobežných rovín, a to roviny rezu a rovín tých dvoch stien hranatého telesa, ktorého priesečnica obsahuje príslušnú hranu telesa.

V literatúre sa môžeme stretnúť s dvoma najčastejšie vyskytujúcimi sa spôsobmi zobrazovania rezov vo voľnom rovnobežnom premietaní:

- Celý rez označíme plnou čiarou, bez ohľadu na viditeľnosť jednotlivých stien telesa. Takýto rez telesa sa zvykne šrafovať, (obr. 6).
- Rez na viditeľných stenách telesa vyznačíme plnou čiarou a na neviditeľných stenách telesa čiarkovane, (obr. 7).
- V prípade, keď úlohou je určiť prienik telesa s polpriestorom, najprv určíme rez telesa hraničnou rovinou polpriestoru. Rezom rozdelíme teleso na dve časti a vtedy vyznačíme viditeľnosť tej časti telesa ktoré vzniklo ako prienik telesa s polpriestorom.



obr. 6



obr. 7

2.1 Určenie rezu telesa využitím axiómy incidencie

K riešeniu najjednoduchších úloh na riešenie rovinného rezu telesa, ktoré sme zaradili do tejto časti, postačuje využívať niektoré axiómy incidencie.

Potrebné axiómy incidencie k riešeniu úloh uvádzame podľa Hilbertovej axiomatickej sústavy:

Axióma (Ax1). *Každými dvoma bodmi A, B prechádza aspoň jedna priamka.*

Axióma (Ax2). *Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza najviac jedna priamka.*

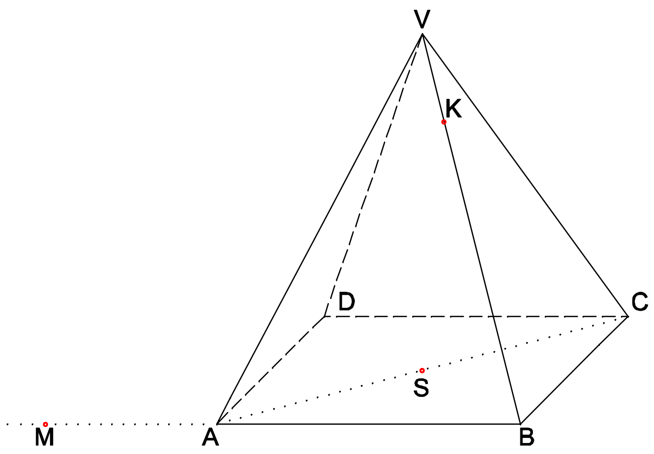
Axióma (Ax3). *Ak dva body A, B priamky p ležia v rovine α, potom každý bod priamky p leží v rovine α.*

Axióma (Ax4). *Ak dve roviny α, β majú spoločný bod A, potom majú spoločný ešte aspoň jeden bod B, rôzny od A.*

Pri konštrukcii rovinného rezu hranatého telesa postupujeme tak, že buď zostrojíme priesečnice (pokiaľ existujú) všetkých jeho stien s rovinou rezu, alebo zostrojíme priesečníky (ak existujú) všetkých jeho hrán s rovinou. Je teda zrejmé, že pri konštrukcii rovinného rezu telesa hľadáme postupne priesečnice jednotlivých rovín jeho stien s rezovou rovinou.

V nasledujúcich úlohách budeme poznať dva body rezovej roviny, ktoré zároveň ležia v rovine niektorej steny telesa. Ak takéto dva body existujú, určia priesečnicu roviny rezu s rovinou tej steny telesa, v ktorej ležia. Prienik priesečnice so stenou (ak obsahuje viac ako jeden bod), je jednou stranou rezového mnohouholníka. Využitím uvedených axióm (Ax1), (Ax2), (Ax3), (Ax4) nám je preto jasné, že postačuje nájsť postupne vždy dva rôzne body rezovej roviny s jednotlivými rovinami stien telesa.

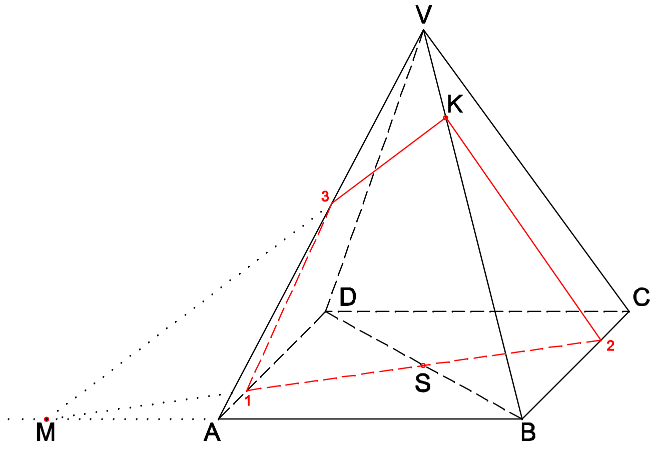
■ **Príklad 2.1.1** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ so stredom podstavy S. Pre body K, M platí, že $\mu(BKV)$, $\mu(MAB)$. Zostrojte rez ihlanu rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KSM}$.



obr. 8

Riešenie: Stačí, ak si uvedomíme, že body S a M ležia v rezovej rovine $\alpha = \overleftrightarrow{KSM}$ a zároveň v rovine podstavy $\overleftrightarrow{ABC}$, preto podľa axiómy (Ax4), str. 13, platí, $\overleftrightarrow{ABC} \cap \alpha = \overleftrightarrow{MS}$. Analogicky zdôvodníme, že $\overleftrightarrow{ABV} \cap \alpha = \overleftrightarrow{KM}$ (body K, M ležia v rovine prednej steny ABV a zároveň v rezovej rovine α). Potom zrejme časť rezu v podstave je úsečka, ktorá je prienikom priesečnice $\overleftrightarrow{MS}$ s podstavou $ABCD$ (na obrázku označíme $\overleftrightarrow{MS} \cap ABCD = 12$). Analogicky časť rezu v prednej stene ihlana je úsečka $K3$, $K3 = \overleftrightarrow{KM} \cap ABV$, (viď obr. 9). Na dokončenie rezu opäť stačí využitie axiómy (Ax4), str. 13.

Hľadaným rezom je štvoruholník $12K3$, (obr. 9).



obr. 9

■ **Príklad 2.1.2** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte jeho rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ACM}$, kde $(BVM) = -1$.

■ **Príklad 2.1.3** Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{IJK}$, kde $(DCI) = (DAJ) = -2$ a $(DVK) = -1$.

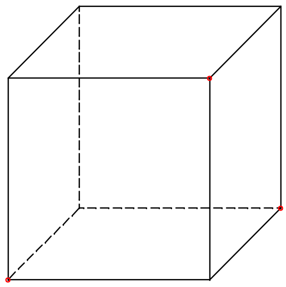
■ **Príklad 2.1.4** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KMG}$, ak pre body K a M platí $\mu(EKF)$, $\mu(FBM)$.

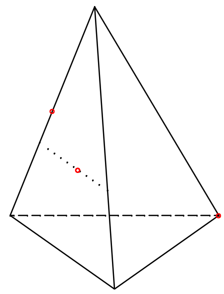
■ **Príklad 2.1.5** Daná je kocka $ABCDEFGH$ určte rez kocky rovinou EVW, kde pre body V a W platí $\mu(BVF)$, $(CGW) = 2$.

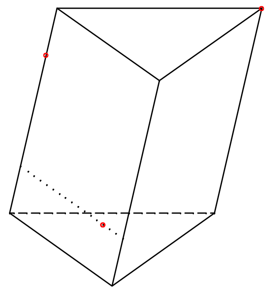
■ **Príklad 2.1.6** Zostrojte rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{A'LM}$, kde pre body L a M platí $(B'BL) = 2$, $(B'C'M) = 3$.

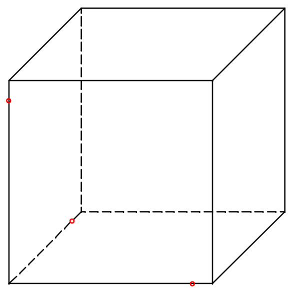
■ **Príklad 2.1.7** Daný je štvorsten $ABCD$. Zobrazte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$, ak $\mu(AKD)$, $\mu(BLD)$, $\mu(DCM)$.

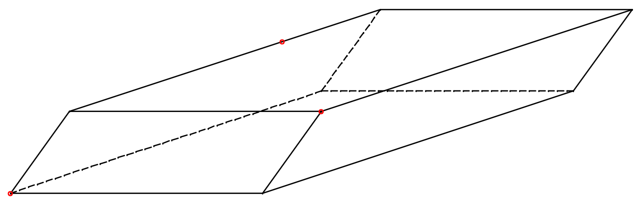
■ **Príklad 2.1.8** Zostrojte rezy telies rovinami určenými troma nekolineárnymi bodmi vyznačenými na obrázkoch obr. 10, obr. 11, obr. 12, obr. 13, obr. 14.


obr. 10


obr. 11


obr. 12


obr. 13


obr. 14

■ **Príklad 2.1.9** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte prienik polpriestoru $KLMB$ s telesom, ak pre body K, L, M platí $\mu(AKB)$, $\mu(VMB)$, $\mu(BLC)$.

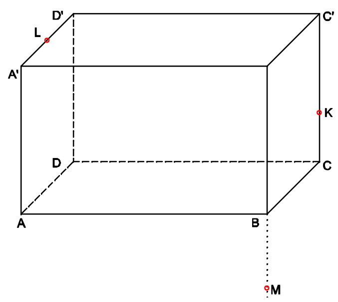
2.2 Určenie rezu telesa využitím rovnobežnosti stien telesa -1.časť

V tejto kapitole budeme využívať rovnobežnosť dvoch stien telesa. Pri riešení úloh je potrebné uvedomiť si nasledujúcu vetu (ktorá vypovedá o konfigurácii troch rovín, (Kon2), str.9).

Veta 2.2.1. (Kon2). *Ak α, β sú rovnobežné roviny a rovina γ je s nimi rôznobežná, potom priesečnice $\alpha \cap \gamma$ a $\beta \cap \gamma$ sú rovnobežné.*

V nasledujúcich úlohách pôjde vždy o uplatnenie predchádzajúcej vety pre roviny dvoch rovnobežných stien telesa. Potom podľa predchádzajúcej vety (Kon2) budú priesečnice rovín týchto stien s rezovou rovinou rovnobežné, a teda aj časti hľadaného rezu v týchto rovnobežných stenách telesa budú rovnobežné.

■ **Príklad 2.2.1** Zostrojte rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$, ak platí $(C'KC) = 3$, $(A'D'L) = -1$, $(B'MB) = -2$.



obr. 15

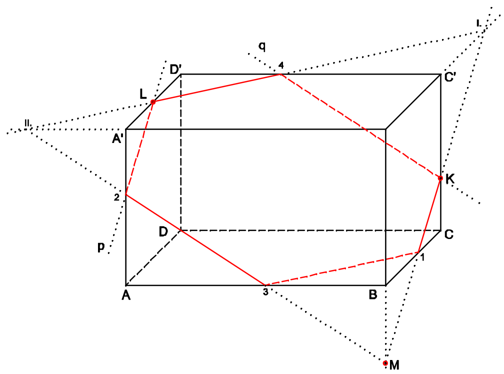
Riešenie: Body M a K patria rezovej rovine a súčasne rovine bočnej steny $BCC'B'$, preto podľa axiómy (Ax4), str. 13, platí, $\alpha \cap \overleftrightarrow{BCC'} = \overleftrightarrow{MK}$. Potom zrejme úsečka $1K$ je časťou rezu v bočnej stene $BCC'B'$ ($\overleftrightarrow{KM} \cap BCC'B' = 1K$), (obr. 16).

Steny kvádra $BCC'B'$ a $ADD'A'$ sú rovnobežné, teda aj ich roviny sú navzájom rovnobežné, preto môžeme využiť vetu (Kon2), str.9, podľa ktorej priesečnice rezovej roviny so spomínanými rovinami bočných stien kvádra sú rovnobežné. Vedieme bodom L, ktorý patrí stene $ADD'A'$ priamku p, ktorá je rovnobežná s priamkou MK. Prienik priamky p a steny $ADD'A'$ je úsečka $2L$, ktorá je časťou rezu bočnej stene $ADD'A'$. Body 2 a M patria rezovej rovine a zároveň aj rovine presnej steny $ABB'A'$, preto podľa axiómy (Ax4), str. 13, $\alpha \cap \overleftrightarrow{ABB'} = \overleftrightarrow{2M}$. Zrejme úsečka označená na obrázku 23 je časťou rezu prednej steny $ABB'A'$ ($\overleftrightarrow{2M} \cap ABB'A' = 23$). Analogicky, ako pri priamke p zdôvodnime, že priesečnica q rezovej roviny a roviny zadnej steny kvádra je rovnobežná s priamkou $2M$. Priamka q zrejme prechádza bodom K. Prienikom priamky q a zadnej steny $DCC'D'$ je úsečka $4K$, ktorá určuje časť rezu na zadnej stene kvádra.

Na dokončenie rezu v hornej a dolnej podstave kvádra stačí využiť opäť axiómu (Ax4).

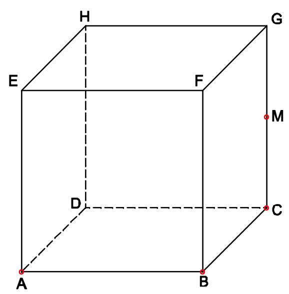
Rezom kvádra rovinou α je šesťuholník $K132L4$, (obr. 16).

(Ako kontrola môže poslúžiť veta (Kon2), str.9, podľa ktorej úsečky 13 a $4L$ musia byť rovnobežné.)



obr. 16

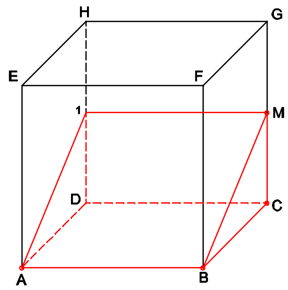
■ **Príklad 2.2.2** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte prienik kocky s polpriestorom $ABMC$, kde $(CGM) = -1$.



obr. 17

Riešenie: Rovina AMB je hraničnou rovinou polpriestoru $ABMC$. Najskôr určíme využitím vety (Kon2) rez kocky rovinou AMB. Rezom je rovnobežník $ABM1$, kde $A1$ je časť rezu v stene $ADHE$.

Prienikom kocky s daným polpriestorom bude trojboký hranol $AD1BCM$, (obr. 18).



obr. 18

■ **Príklad 2.2.3** Zostrojte rez kvádra $ABCDEFGH$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{BQC}$, ak $\mu(EQG)$.

■ **Príklad 2.2.4** Daná je kocka $ABCDEFGH$, určte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{HBM}$, pričom $(AEM) = -1$.

■ **Príklad 2.2.5** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$, ak pre body M, N, P platí $\mu(EMF)$, $\mu(ANB)$, $\mu(CPG)$.

■ **Príklad 2.2.6** Zostrojte rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$. Pre body M, N, P platí $(BMB') = 2$, $(B'NC') = 3$, $(A'PD') = 4$.

■ **Príklad 2.2.7** Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$. Zobrazte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{A'MN}$, ak pre body M, N platí $(ABM) = (CC'N) = -1$.

■ **Príklad 2.2.8** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Narysujte rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XYH}$, kde $(EAX) = (GCY) = -2$.

■ **Príklad 2.2.9** Zobrazte rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{BNM}$. Pre body M, N platí $\mu(AMB)$ a $\mu(CNC')$.

■ **Príklad 2.2.10** Pre bod P, kocky $ABCDEFGH$ platí, že $\mu(BPC)$. Zostrojte rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{EHP}$.

■ **Príklad 2.2.11** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XGZ}$, kde pre body X, Z platí $(EZA) = 5$, $(EHX) = -\frac{3}{5}$.

■ **Príklad 2.2.12** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou ϱ, ak:

a) $\varrho = \overleftrightarrow{KLM}$, kde $(ABK) = -\frac{1}{3}$, $(GHL) = -1$, $(EHM) = -\frac{1}{3}$,

b) $\varrho = \overleftrightarrow{RST}$, kde $(BFR) = -\frac{1}{3}$, $(ADS) = -1$, $(CGT) = -\frac{1}{3}$.

■ **Príklad 2.2.13** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$, kde pre body X, Y, Z platí $(HXG) = \frac{5}{4}$, $(ADZ) = -2$, $(FGY) = -1$.

■ **Príklad 2.2.14** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body P, Q tak, že platí $(BCP) = (EHQ) = -1$. Zostrojte rez kocky rovinou ϱ:

a) $\varrho = \overleftrightarrow{CQG}$,

b)$\varrho = \overleftrightarrow{ACQ}$,

c)$\varrho = \overleftrightarrow{APQ}$.

■ **Príklad 2.2.15** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{AHX}$, kde $\mu(BXG)$.

■ **Príklad 2.2.16** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ECX}$, kde X je vnútorný bod steny $ABFE$.

■ **Príklad 2.2.17** Zobrazte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XYF}$, kde X je vnútorný bod steny $ABFE$ a Y je vnútorný bod steny$BCGF$.

■ **Príklad 2.2.18** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{HPQ}$, kde $\mu(CPG)$ a Q je vnútorným bodom steny $ABFE$.

■ **Príklad 2.2.19** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$, kde pre body X, Y, Z platí $(ABX) = (CGY) = -1$, $(EAZ) = 3$.

■ **Príklad 2.2.20** Zostrojte rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{BNM}$, kde pre body M, N platí $\mu(B'MC')$, $\mu(NA'B')$.

■ **Príklad 2.2.21** Daný je kváder $ABCDEFGH$. Narysujte rez kvádra rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$, ak $(BFZ) = -\frac{1}{7}$, $(EXA) = 3$, $(YFG) = -\frac{1}{2}$.

■ **Príklad 2.2.22** Daný je kváder $ABCDEFGH$ a rovina $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$, kde $\mu(CDX)$, $\mu(AZB)$, $\mu(GYH)$. Zostrojte rez danou rovinou α.

■ **Príklad 2.2.23** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body X, Y, Z tak, že $\mu(EXH)$, $(FBY) = 5$ a $(FEZ) = 4$. Zostrojte rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$.

■ **Príklad 2.2.24** Zostrojte prienik kvádra $ABCDEFGH$ s polpriestorom $HPQF$, pričom pre bod P platí $\mu(CPG)$ a bod Q je vnútorný bod steny $ABFE$.

■ **Príklad 2.2.25** Zostrojte prienik kocky $ABCDEFGH$ s polpriestorom $EPQD$,ak pre body P, Q platí $(ABP) = (GHQ) = -1$.

■ **Príklad 2.2.26** Zobrazte kvádra $ABCDA'B'C'D'$. Zostrojte prienik kvádra s polpriestorom $A'PMB'$, ak $(ABP) = 3$, $(CC'M) = -1$.

2.3 Určenie rezu telesa využitím rovnobežnosti stien telesa - 2. časť

V úlohách na určenie rezu telesa sa vyskytujú aj také zadania, kde rezová rovina nie je určená jedným zo spomínaných štyroch spôsobov, (str.9), ale je daná nejakými vlastnosťami. V týchto prípadoch je zrejme potrebné učiť rezovú rovinu a až potom hľadať rez telesa touto rovinou. V takýchto úlohách budeme využívať kritérium rovnobežnosti priamky a roviny (KRpr) a kritérium rovnobežnosti dvoch rovín (KRrr) pomocou ktorých určíme rezovú rovinu.

Definícia 2.3.1. *Priamka je rovnobežná s rovinou práve vtedy, keď ich prienikom je prázdna množina.*

Veta 2.3.1. (KRpr). ***K****ritérium* ***R****ovnobežnosti* ***p****riamky a* ***r****oviny*

Priamka je rovnobežná s rovinou práve vtedy, keď v rovine leží aspoň jedna priamka, ktorá je rovnobežná s danou priamkou.

$$m \| \varrho \quad \Leftrightarrow \quad \exists r : \quad r \subset \varrho \quad \& \quad r \| m$$

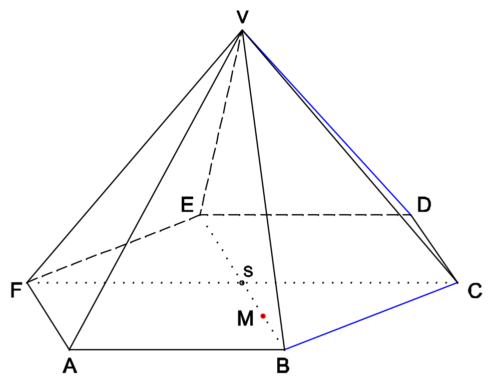
Definícia 2.3.2. *Dve roviny sú rovnobežné, ak sú totožné, alebo ak ich prienikom je prázdna množina.*

Veta 2.3.2. (KRrr). ***K**ritérium **R**ovnobežnosti dvoch **r**ovín*

Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď v jednej z nich existujú dve rôznobežky, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou.

$$\alpha \| \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists p, q: \quad p \not\| q \quad \& \quad p, q \subset \alpha \quad \& \quad p \| \beta \quad \& \quad q \| \beta$$

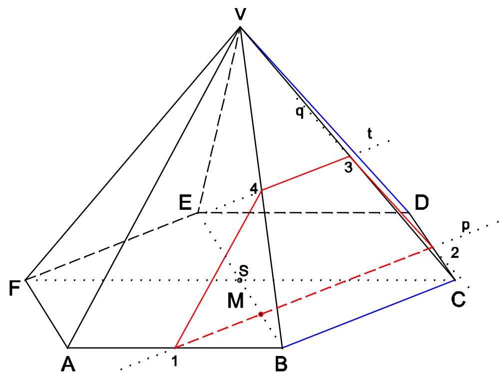
■ **Príklad 2.3.1** Daný je pravidelný šesťboký ihlan $ABCDEFV$, stred S podstavy a pre bod M platí $\mu(SMB)$. Zostrojte rez ihlana rovinou, ktorá prechádza bodom M a je rovnobežná s priamkou BC a priamkou DV.



obr. 19

Riešenie: Najprv určíme rezovú rovinu na základe rovnobežnosti priamky a roviny (KRpr), str.21, rezová rovina bude určená rôznobežkami p, q, kde p je rovnobežka s priamkou BC prechádzajúca bodom M a q je rovnobežka s priamkou DV. Zrejme p leží v rovine podstavy a q v rovine steny CDV, (obr. 20). Potom zrejme prienik podstavy ihlana s priamkou p je úsečka 12, ktorá tvorí časť rezu ihlana v podstave. Prienikom priamky q a steny CDV je zrejme úsečka 23, ktorá je časťou hľadaného rezu v bočnej stene DCV. Pri dokončení rezu využijeme vetu (Kon4), str.10, o vzájomnej polohe troch rovín. Vetu aplikujeme na rovinu podstavy, rovinu bočnej steny BCV a rezovú rovinu. Podľa spomínanej vety musia byť všetky tri priesečnice týchto troch rovín navzájom rovnobežné, preto priesečnica priamky t a steny BCV je úsečka 34, ktorá tvorí časť rezu v spomínanej stene ihlana. Na dokončenie rezu v stene ABV využijeme axiómu (Ax4), str.13.

Hľadaným rezom danou rovinou je štvoruholník 1234, (obr. 20).



obr. 20

■ **Príklad 2.3.2** Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$ a body M, N tak, že $(CC'M) = -2$, $(AA'N) = -\frac{1}{2}$. Bodom N veďte rovinu α rovnobežnú s rovinou $\beta = \overleftrightarrow{ABM}$.

■ **Príklad 2.3.3** Zostrojte rez trojbokého hranola $ABCA'B'C'$ rovinou α, ktorá prechádza bodom N a je rovnobežná s rovinou $\beta = \overleftrightarrow{ABC'}$. Bod N leží vnútri steny ABC.

■ **Príklad 2.3.4** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Pre bod M platí, že $(CMV) = 2$. Bodom M veďte rovinu α rovnobežnú s rovinou $\beta = \overleftrightarrow{ADV}$ a určte jej rez ihlanom.

■ **Príklad 2.3.5** Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$ a pre bod M platí $(ABM) = -1$. Veďte bodom N rovinu α, ktorá je rovnobežná s rovinou $A'MC$, ak :

a) Pre bod N platí $(A'B'N) = -1$,

b) Pre bod N platí $(AB'N) = -1$.

■ **Príklad 2.3.6** Zostrojte rez trojbokého hranola $ABCA'B'C'$ rovinou, ktorá je :

a) rovnobežná s rovinou ABC a prechádza bodom X, pre ktorý platí $\mu(AXA')$,

b) rovnobežná s rovinou BCC' a prechádza bodom R, ktorý je vnútorným bodom steny ABC,

c) rovnobežná s rovinou ABC' a prechádza daným vnútorným bodom P trojuholníka $BC'B'$.

■ **Príklad 2.3.7** Zostrojte rez trojbokého hranola $ABCA'B'C'$ rovinou α rovnobežnou s $\alpha \parallel \overleftrightarrow{ABC'}$:

a) ak R patrí rovine α a $\mu(ARA')$,

b) ak P patrí rovine α a $\mu(PAC)$,

c) Q patrí rovine α a $\mu(A'C'Q)$.

■ **Príklad 2.3.8** Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ rovinou, ktorá prechádza bodom P rovnobežne s priamkou AB a s priamkou CV. Bod P je daný $\mu(BPV)$.

■ **Príklad 2.3.9** Daná je kocka $ABCDA'B'C'D'$ a pre body K, L platí $(BB'K) = (BCL) = -1$. Určte rez kocky rovinou α, ktorá prechádza bodmi K, L a je rovnobežná s priamkou $A'C'$.

■ **Príklad 2.3.10** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou, ktorá:

a) prechádza priamkou BG rovnobežne s priamkou CH,

b) prechádza bodmi B, F a je rovnovbežná s priamkou HG,

c) prechádza priamkou GB rovnobežne s priamkou CP, pričom $\mu(APD)$.

■ **Príklad 2.3.11** Daný je pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$. Pre bod M platí $(ABM) = -\frac{1}{2}$. Zostrojte rez hranola rovinou, ktorá prechádza bodom M rovnobežne s priamkami AC a BC'.

■ **Príklad 2.3.12** Zostrojte rez kvádra $ABCDEFGH$ rovinou, ktorá obsahuje body X, Y a je rovnobežná s hranou DH. Body X, Y sú dané $(AXF) = (BYG) = 2$.

2.4 Určenie rezu telesa pomocou vzájomnej polohy troch rovín

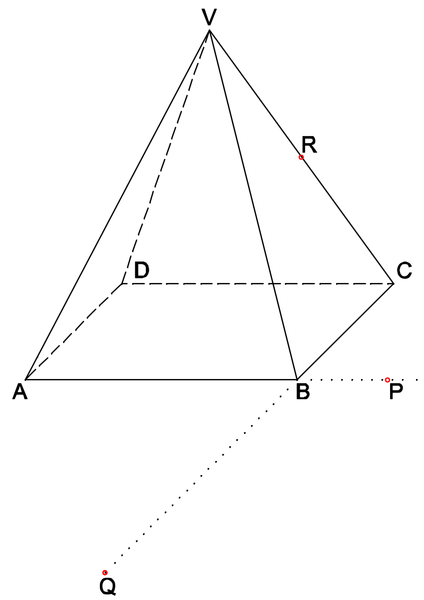
V tejto podkapitole sú zaradené úlohy, pri ktorých je potrebné využívať nasledujúce dve vety. Jedná sa o tvrdenia o konfiguráciách troch rovín (Kon4), (Kon5), (str.9).

Veta 2.4.1. (Kon4). *Ak α, β sú rôznobežné roviny a rovina γ je rovnobežná s priamkou $\alpha \cap \beta$, potom ak existujú priesečnice $\alpha \cap \gamma$ a $\beta \cap \gamma$, tak sú tiež rovnobežné s $\alpha \cap \beta$.*

Veta 2.4.2. (Kon5). *Nech roviny α, β, γ sú navzájom rôznobežné a nech priesečnice $\alpha \cap \gamma$ a $\beta \cap \gamma$ sú tiež rôznobežné. Potom priesečnica $\alpha \cap \beta$ prechádza spoločným bodom rôznobežiek $\alpha \cap \gamma$ a $\beta \cap \gamma$.*

Poznámka 2.4.1. Ak v predchádzajúcej vete zameníme predpoklad rôznobežnosti priesečníc $\alpha \cap \gamma$, $\beta \cap \gamma$ a budeme predpokladať, že sú rovnobežné (rôzne), tak aj tretia priesečnica $\alpha \cap \beta$ bude s nimi rovnobežná (opäť ide o konfiguráciu (Kon4)).

■ **Príklad 2.4.1** Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde pre body P, Q, R platí $(ABP) = 4$, $(VRC) = 2$, $(CBQ) = \frac{3}{2}$.



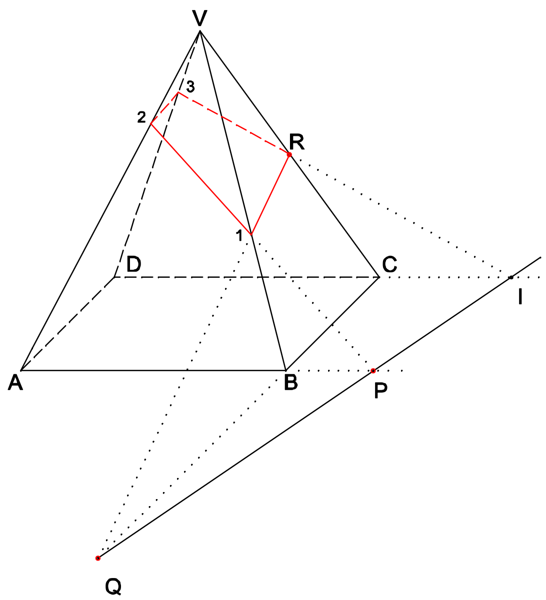
obr. 21

Riešenie: Pri konštrukcii rezu si treba uvedomiť že, body Q a P patria rovine podstavy a zároveň rezovej rovine. Preto podľa axiómy *(Ax4), str.13*, $\alpha \cup \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{QP}$. Ako zistíme, v tomto prípade prienikom podstavy ihlana a priamky QP je prázdna množina, preto rez ihlana danou rovinou neprechádza podstavou ihlana. Body R a Q patria stene BCV, preto na základe axiómy *(Ax4)* $\alpha \cup \overleftrightarrow{BCV} = \overleftrightarrow{RQ}$. Prienikom priamky RQ so stenou BCV je úsečka $R1$, ktorá je časťou rezu steny BCV, (obr. 22). Analogickým spôsobom nájdeme časť rezu v prednej stene ABV, $\overleftrightarrow{P1} \cap ABV = 12$.

Keďže už žiadne dva zo zadaných a doteraz získaných bodov nepatria rovine jednej steny, na určenie ďalších časti rezu už nepostačuje využívať axiómu incidencie. Nemôžeme ani využívať vetu (Kon2), str.9, ako v úlohách v predchádzajucej podkapitole 2.3, nakoľko žiadne dve steny ihlana niesú rovnobežné. Pri zostrojení časti rezu v zadnej stene CDV využijeme vetu (Kon5), str.10, o vzájomnej polohe troch rovín. Určíme spoločný bod rezovej roviny, roviny podstavy a roviny zadnej steny DCV, ktorý získame ako priesečník priamky QP a priamky DC ($\overleftrightarrow{QP} = \overleftrightarrow{ABC} \cap \alpha$, $\overleftrightarrow{DC} = \overleftrightarrow{ABC} \cap DCV$, na obr. 22 označený ako I. Prienikom roviny DCV a α je teda priamka IR a časť rezu v stene DCV bude zrejme úsečka $R3$.

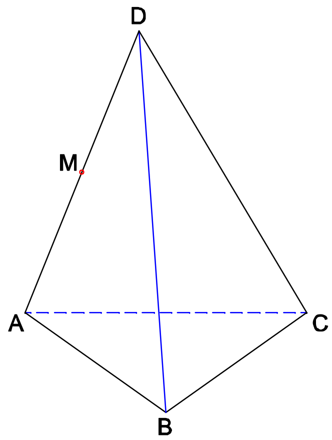
Hľadaný rez ľahko dokončíme v stene ADV využitím axióny (Ax4).

Rezom pravidelného štvorbokého ihlana je štvoruholník $R123$, (obr. 22).



obr. 22

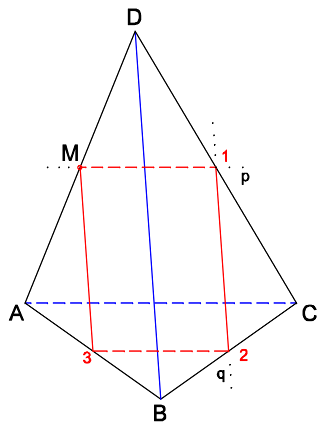
■ **Príklad 2.4.2** Daný je štvorsten $ABCD$. Zostrojte rez rovinou α, ktorá prechádza bodom M, $(AMD) = -1$, pričom α je rovnobežná s priamkami AC a BD.



obr. 23

Riešenie: Na základe kritéria rovnobežnosti priamky a roviny (KRpr) bude rezová rovina určená priamkami p, q, kde p je rovnobežka s priamkou AC a prechádza bodom M. Priamka p zrejme leží v rovine steny ACD a zároveň v rezovej rovine preto prienikom priamky p a steny ACD je úsečka $M1$. Priamka q je rovnobežná s priamkou BD a prechádza bodom 1. Priamka q zrejme leží v rovine steny BCD a zároveň v rezovej rovine, preto prienikom priamky q a steny BCD dostaneme časť rezu 12 ihlana v stene BCD. Pri zostrojovaní časti rezu v podstave možno využiť vetu (Kon4), str.10, o vzájomnej polohe troch rovín, ktorá hovorí, že ak dve roviny sú rôznobežné a tretia je rovnobežná s ich priesečnicou, potom všetky tri priesečnice rovín (ak existujú) sú rovnobežné. Preto priesečnica rezovej roviny s rovinou ABC zrejme prechádza bodom 2 a je rovnobežná s priamkami $M1, AC$. Prienik tejto priamky a steny podstavy vytvorí časť rezu 23 v podstve ABC. Rez v prednej stene ABD ľahko dokončíme využitím axiómy (Ax4), str.13.

Rezom ihlana je rovnobežník $M321$, (obr. 24).



obr. 24

■ **Príklad 2.4.3** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body X, Y, Z tak, že $\mu(BXC)$, $\mu(CYG)$, $\mu(GZH)$. Určte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$.

■ **Príklad 2.4.4** Zostrojte rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{pL}$, pričom priamka p leží v rovine ABC a neprechádza žiadnym vrcholom podstavy. Pre bod L platí $\mu(DLD')$.

■ **Príklad 2.4.5** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a body X, Y, Z tak že $(ABX) = (CDY) = -1$ a $(F'ZF) = \frac{3}{2}$. Zostrojte rez hranola rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$.

■ **Príklad 2.4.6** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body K, P tak, že $(AKB) = 2$ a $(BCP) = -\frac{1}{2}$. Zostrojte rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{HKP}$.

■ **Príklad 2.4.7** Zostrojte rez pravidelného šesťbokého ihlana $ABCDV$ rovinou:
a) $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$, kde $(ABK) = (CDL) = -\frac{1}{3}$, $(DVM) = -2$,
b) $\beta = \overleftrightarrow{OPQ}$, kde $(ABO) = -2$, $(CVP) = -\frac{1}{3}$, $(DVQ) = -3$,
c) $\gamma = \overleftrightarrow{RST}$, kde $(ABR) = -2$, $(CVS) = -\frac{1}{3}$, $(AVT) = -1$,
d) $\delta = \overleftrightarrow{XYZ}$, kde $(ADX) = -1$, $(CDY) = -\frac{1}{3}$, $(BVZ) = -3$.

■ **Príklad 2.4.8** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{SQR}$, kde $\mu(GSH)$, $\mu(HQE)$, $\mu(BRF)$.

■ **Príklad 2.4.9** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte rez kocky rovinou $\delta = \overleftrightarrow{UVW}$, kde pre body U, V, W platí $\mu(AUE)$, V leží vnútri trojuholníka HCG a $\mu(AWB)$.

■ **Príklad 2.4.10** Daný je kváder $ABCDEFGH$. Pre body M, P, N platí $\mu(FMG)$, $\mu(APB)$, $\mu(BNF)$. Zostrojte rez kvádra rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$.

■ **Príklad 2.4.11** Daná je kocka $ABCDA'B'C'D'$ a pre body P, Q platí $(A'D'P) = (C'D'Q) = -1$. Nájdite rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQB}$.

■ **Príklad 2.4.12** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ABM}$, ak $(CVM) = -1$.

■ **Príklad 2.4.13** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{UVW}$, ak pre body U, V, W platí $(BCU) = -2$, $(AVB) = 2$ a $(DD'W) = -\frac{1}{2}$.

■ **Príklad 2.4.14** Zostrojte rez pravidelného šesťbokého ihlana $ABCDEFV$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{BCM}$, pričom $(FVM) = -1$.

■ **Príklad 2.4.15** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinami:
a) $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$, kde $\mu(FKG)$, $\mu(GLH)$ a $\mu(AMD)$,
b) $\beta = \overleftrightarrow{XYZ}$, kde $\mu(AXD)$, $\mu(AYB)$ a $\mu(CZG)$.

■ **Príklad 2.4.16** Daný je šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, ktorý nemá ani jednu dvojicu rovnobežných podstavných hrán. Narysujte rez hranola rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ABD'}$.

■ **Príklad 2.4.17** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a body X, Y tak, že $\mu(F'E'X)$, $\mu(EDY)$. Určte rez hranola rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{AXY}$.

■ **Príklad 2.4.18** Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$, rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{BPQ}$, pričom pre body P, Q platí $(APV) = (QAD) = 2$.

■ **Príklad 2.4.19** Daný je kváder $ABCDEFGH$ a body X, Y tak, že $\mu(AXB)$, $\mu(BYC)$. Určte rez telesa rovinou α, ktorá prechádza bodom B a je rovnobežná s rovinou $\beta = \overleftrightarrow{XYH}$.

■ **Príklad 2.4.20** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou α, ktorá prechádza bodmi M, N a je rovnobežná s priamkou GP. Body M, N sú určené $(GHM) = -1$, $\mu(BNC)$ a $(BEP) = -\frac{1}{3}$.

■ **Príklad 2.4.21** Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$ a bod M tak, že $(ABM) = -1$. Zostrojte rez rovinou α, ktorá je rovnobežná s priamokou AC a prechádza bodmi D' a M.

■ **Príklad 2.4.22** Daný je štvorboký ihlan $ABCDV$. Pre body S a Q platí $(ACS) = (DSQ) = -1$. Bodom Q veďte rovinu α rovnobežnú s priamkami DV a CS a zostrojte rez ihlana rovinou α.

■ **Príklad 2.4.23** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Zostrojte prienik hranola s polpriestorom $ABME$, ak bod M je daný $(DD'M) = -1$.

■ **Príklad 2.4.24** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte prienik ihlana s polpriestorom $MNPD$, ak pre body M, N, P platí $(ABM) = (BCN) = (CVP) = -1$.

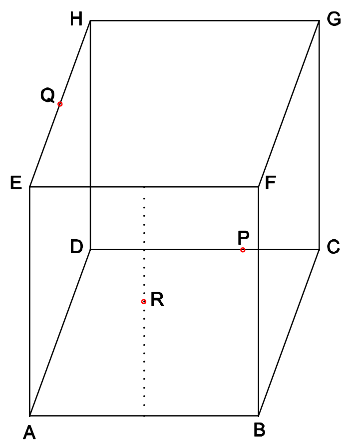
■ **Príklad 2.4.25** Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$ a body X, Y tak, že $(CDX) = (ABY) = 2$. Zostrojte prienik polpriestoru $D'XYC'$ s kvádrom.

■ **Príklad 2.4.26** Zostrojte prienik polpriestoru $KLMD$ s kockou $ABCDEFGH$, ak pre body K, L, M platí $(GKH) = (ELH) = (FMC) = 2$.

2.5 Určenie rezu telesa pomocou nájdenia spoločného bodu (bodov) rezovej roviny s rovinou podstavy telesa

V niektorých úlohách nie je možné začať určovať rez telesa pomocou axiómy (Ax3), ak ale poznáme jeden spoločný bod rezovej roviny a roviny podstavy telesa, tak na určenie rezu v tejto skupine úloh je väčšinou výhodné nájsť ešte jeden ďalší spoločný bod rezovej roviny a roviny podstavy. Tento bod môžeme určiť ako priesečník priamky ležiacej v rezovej rovine s rovinou podstavy.

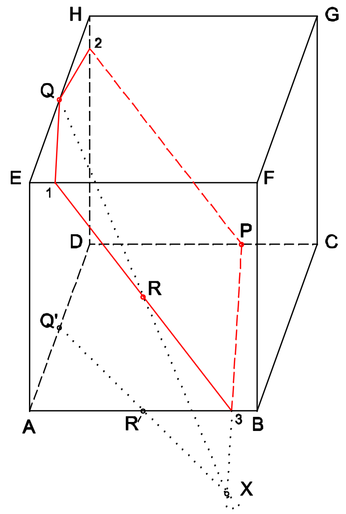
■ **Príklad 2.5.1** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde pre body P, Q, R platí $(CDP) = -2$, $(EHQ) = (AFR) = -1$.



obr. 25

Riešenie: Kedže žiadne dva z bodov P, Q, R, ktoré určujú rezovú rovinu, neležia spoločne ani v jednej z rovín stien kocky, nevieme zatiaľ určiť priesečnicu rezovej roviny so žiadnou z rovín stien kocky (tak ako to bolo v predchádzajúcich úlohách, kedy sme mohli využiť axiómu incidencie). Nájdime preto ešte jedne bod (okrem bodu P), ktorý patrí rezovej rovine a zároveň rovine podstavy $ABCD$, na obr. 26 je označený ako bod X, je to priesečník priamky RQ s rovinou podstavy. Ak označíme Q', R' kolmé priemety bodov Q, R do roviny podstavy v poradí, tak zrejme $\{X\} = \overleftrightarrow{RQ} \cap \overleftrightarrow{R'Q'} = \overleftrightarrow{RQ} \cap \overleftrightarrow{ABC}$ a kedže $X \in \overleftrightarrow{RQ} \subset \overleftrightarrow{PQR}(= \alpha)$ a zároveň $X \in \overleftrightarrow{ABC}$. Teraz už môžeme využiť axiómu incidencie (Ax4), str.13. Priamka PX je priesečnicou rezovej roviny α s rovinou podstavy $ABCD$ a úsečka $P1$ určuje časť rezu v podstave $ABCD$. V hornej podstave $EFGH$ časť rezu určuje úsečka Q2, ktorá je rovnobežná s časťou rezu v spodnej podstave kocky. Využitím axiómy (Ax4) úsečka 12 tvorí časť rezu stene $ABFE$. Na určenie časti rezu v zadnej stene $DCGF$ môžeme využiť vetu (Kon2), str.9, podľa ktorej priesečnice rezovej roviny s rovinou prednej a zadnej steny sú rovnobežné ($\overleftrightarrow{12} \parallel \overleftrightarrow{P3}$). K dokončeniu rezu (časť rezu $Q3$ v ľavej bočnej stene) opäť využijeme axiómu (Ax4).

Rezom kocky rovinou α je päťuholník $1P3Q2$, (obr. 26).



obr. 26

■ **Príklad 2.5.2** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Pre body M, N, P platí, že $\mu(AMB)$, $\mu(FNG)$, $\mu(CPG)$. Nájdite rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$.

■ **Príklad 2.5.3** Daná je kocka $ABCDEFGH$ body M, N, P, kde $\mu(ANB)$, $\mu(FNG)$, $\mu(CPG)$. Nájdite rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$.

■ **Príklad 2.5.4** Daný je rovnobežnosten $ABCDA'B'C'D'$. Zostrojte rovinný rez rovnobežnostena rovinou $\alpha = XYZ$, kde X, Y, Z sú vnútorné body stien ABE, BCG, ABG v tomto poradí.

■ **Príklad 2.5.5** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte rez ihlana rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNK}$, kde $\mu(AMV)$, $\mu(BNC)$, $\mu(DKV)$.

■ **Príklad 2.5.6** Zobrazte rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$, kde body M, N, P sú dané $(C'D'M) = (AA'N) = (BC'P) = -1$.

■ **Príklad 2.5.7** Zostrojte rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$, kde pre body K, L, M platí $\mu(AKB)$, $\mu(B'LC')$, $\mu(DMD')$.

■ **Príklad 2.5.8** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Pre body M, N, P platí $\mu(EMH)$, $\mu(ANB)$, $\mu(CPG)$. Nájdite rez kocky rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$.

■ **Príklad 2.5.9** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body K, L, M, N tak, že $(ABK) = (ADL) = (AEM) = (GHN) = -1$. Zostrojte rez kocky rovinami:
a) $\alpha = \overleftrightarrow{LMN}$,
b) $\beta = \overleftrightarrow{KLN}$.

■ **Príklad 2.5.10** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ a body L, M, N sú dané $(AVL) = \frac{1}{2}$, $(VBM) = 5$, $(ADN) = -1$. Zostrojte rez ihlana rovinou LMN.

■ **Príklad 2.5.11** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinami:
a) $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$, kde $(ABX) = (FGY) = (DHZ) = -1$,
b) $\beta = \overleftrightarrow{SPQ}$, kde $(AES) = (CDP) = (FGQ) = -1$,
c) $\gamma = \overleftrightarrow{IJK}$, kde $(AEI) = (BCJ) = (GHK) = -1$,
d) $\delta = \overleftrightarrow{LMN}$, kde $(ADL) = (BFM) = (GHN) = -1$.

■ **Príklad 2.5.12** Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinnou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde pre body P, Q, R platí:
a) $(BCP) = (EHQ) = (AFR) = -1$,
b)$(BCP) = 3$, $(EHQ) = (AFR) = -1$.

■ **Príklad 2.5.13** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte rez rovinou $\zeta = \overleftrightarrow{UVW}$, kde pre body U, V, W platí $\mu(EUD)$, $\mu(AVB)$, $\mu(CWG)$.

■ **Príklad 2.5.14** Zostrojte rez štvorstena $ABCD$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, ak $\mu(ABP)$, $\mu(ARD)$ a Q leží vnútri trojuholníka PCD.

2.6 Určenie rezu telesa využitím osovej afinity

V tejto podkapitole budeme pri riešení úloh využívať osovú afinitu. Preto si pripomenieme definíciu osovej afinity a vetu, ktorá opisuje využitie osovej afinity pri určení rezu.

Osová afinita je príbuznosť definovaná v projektívnom rozšírení euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$.

Definícia 2.6.1. *Euklidovský priestor $\mathbb{E}_3$ doplnený o prvky, ako nevlastný (ideálny) bod, nevlastná (ideálna) priamka, nevlastné (ideálna) rovina, nazývame rozšíreným euklidovským priestorom. Označujeme ho $\overline{\mathbb{E}}_3$.*

V projektívnom rozšírení euklidovského priestoru $\overline{\mathbb{E}}_3$ je daný útvar M, ktorý leží v rovine ρ, ďalej rovina π, ktorá je s rovinou ρ rôznobežná a smer s rôznobežný s obidvoma rovinami. Ak útvar M premietneme v smere s do roviny π, dostaneme útvar M'. Hovoríme potom, že útvary M a M' sú vo vzťahu osovej priestorovej afinity.

Definícia 2.6.2. *Nech ρ a π sú dané vlastné rôznobežné roviny v projektívnom rozšírení euklidovského priestoru $\overline{\mathbb{E}}_3$ a nech s je daný smer rôznobežný s oboma rovinami. Zobrazenie, ktoré zobrazuje bod X z roviny ρ do bodu X' z roviny π tak, že pre obraz X' platí $X' \in \overleftrightarrow{SX} \cap \pi$, sa nazýva osová afinita.*

Priesečnica o rovín ρ, π sa nazýva os afinity. Smer s sa nazýva smer afinity (smer afinity s je jej nevlastným stredom). Takto danú osovú afinitu budeme označovať $\mathcal{A}(S_\infty; \pi, \rho)$. Osovú afinitu budeme stručne nazývať len afinitou.

Z definície je jasné, že ak sa roviny ρ a π rovnajú, je afinita identitou. Taktiež z nej vyplýva, že inverzné zobrazenie ku osovej afinite roviny ρ na rovinu π je osová afinita roviny π na rovinu ρ. Ďalej je zrejmé, že body patriace osi osovej afinity sú jej samodružnými bodmi.

Osová afinita (v priestore $\overline{\mathbb{E}}_3$) medzi dvoma rovinami je jednoznačne určená ak poznáme jej os a dvojicu odpovedajúcich si bodov v osovej afinite, prípadne ak poznáme tri dvojice odpovedajúcich si bodov. Takto danú osovú afinitu budeme označovať $\mathcal{A}(o; A, A')$, prípadne $\mathcal{A}(A, A'; B, B'; C, C')$. V úlohách o určení rovinného rezu hranatého telesa sa najčastejšie využíva práve druhá možnosť.

Veta 2.6.1. (AFIN). *Medzi rezovou rovinou a rovinou podstavy telesa, ktorého nositeľky bočných hrán telesa sa pretínajú v nevlastnom bode, platí vzťah osovej afinity, jej stred, tj. jej smer, je nevlastný bod daný smerom bočných hrán telesa a osou je priesečnica rezovej roviny s rovinou podstavy telesa.*

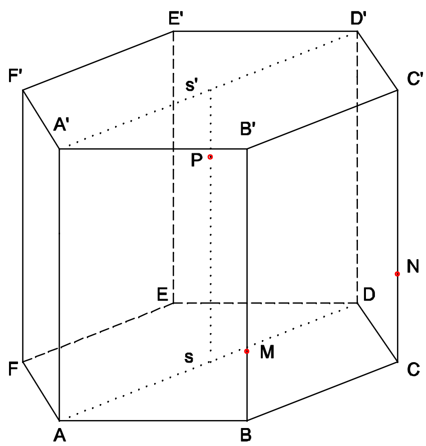
Poznámka 2.6.1. Môže nastať prípad, keď rezová rovina je rovnobežná s rovinou podstavy telesa, potom medzi rezovou rovinou a rovinou podstavy platí vzťah translácie ako špeciálneho prípadu osovej afinity. Osou afinity je potom ideálna priamka.

Poznámka 2.6.2. Telesám, ktorých bočné hrany sa pretínajú v nevlastnom bode (napríklad kocka, kváder, hranol), hovoríme aj, že ich hlavný vrchol, tj. vrchol, ktorý neleží v podstave telesa je nevlastný bod.

Osovú afinitu charakterizujú nasledovné vlastnosti:

- incidencia sa zachováva,
- spojnice odpovedajúcich bodov sú navzájom rovnobežné (určujú smer s afinity),
- odpovedajúce priamky sa pretínajú na jednej priamke (na osi afinity).

■ **Príklad 2.6.1** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$, kde pre body M, N, P platí $(BMB') = 4$, $(CNC') = 3$, $\mu(SPS')$. Body S, S' sú po sebe idúce stredy hornej a dolnej podstavy hranola.

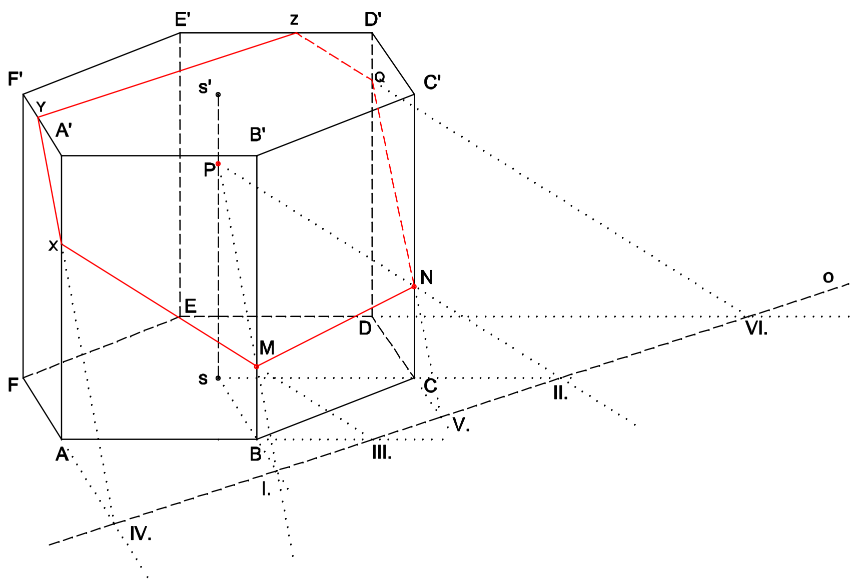


obr. 27

Riešenie: Keďže ide o rez hranola, môžeme výhodne využuť podľa vety (AFIN), str.34, osovú afinitu medzi rezovou rovinou α a rovinou podstavy hranola. Afinita je určená troma dvojicami odpovedajúcich si bodov $\mathcal{A}(B, M; C, N; S', P)$. Os o osovej afinity určíme nájdením dvoch jej samodružných bodov. Pretože samodružné body sú prieniky odpovedajúcich si priamok v osovej afinite $\mathcal{A}$, sú to napríklad body I a II, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{SB} \cup \overleftrightarrow{PM}$ a $\{II\} = \overleftrightarrow{SC} \cap \overleftrightarrow{PN}$, (viď obr. 28). Potom os $o = \overleftrightarrow{I.II}$. Všetky časti rezu v jednotlivých stenách hranola určíme pomocou ďalších samodružných bodov III až VI. Bodom III je samodružný bod priamky AB, preto týmto bodom musí prechádzať aj obraz priamky AB v osovej afinite $\mathcal{A}$. Teda časť rezu XM v prednej stene určíme ako prienik priamky $MIII$ so stenou $ABB'A'$.

Analogicky postupujeme pri určení ostatných častí rezu v jednotlivých stenách hranola. ($\overleftrightarrow{FA} \cap \overleftrightarrow{XY} \in o, \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{NQ} \in o, \overleftrightarrow{QZ} \cap \overleftrightarrow{ED} \in o$.)

Rezom je šesťuholník $MNQZYX$, (obr. 28).



obr. 28

■ **Príklad 2.6.2** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XDY}$, kde pre body X, Y platí $(EFX) = -1$ a $(FBY) = -2$.

■ **Príklad 2.6.3** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body X, Y, Z tak, že $\mu(AEX)$, $(HYG) = 4$, $(BZC) = \frac{3}{2}$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$.

■ **Príklad 2.6.4** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte rez kocky $\delta = \overleftrightarrow{UVW}$, kde pre body U, V, W platí $\mu(AUE)$, V leží vnútri steny $CDGH$, W leží vnútri steny $BCGF$.

■ **Príklad 2.6.5** Zostrojte rez roviny $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$ pravidelným šesťbokým hranolom $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, kde pre body K, L, M platí, že $\mu(AKA')$, $\mu(CMC')$, $\mu(ELE')$.

■ **Príklad 2.6.6** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{CSG}$, kde $(AA'G) = (E'B'S) = -1$.

■ **Príklad 2.6.7** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{F'YZ}$, kde body Y, Z sú dané $(AA'Y) = (CC'Z) = -1$.

■ **Príklad 2.6.8** Daný je pravidelný päťboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$. Pre body K, L, M platí, že $(AA'K) = -3$, $(DD'M) = -3$, $(CC'L) = -\frac{1}{3}$. Zostrojte rez hranola rovinou KLM.

■ **Príklad 2.6.9** Zostrojte rez kolmého štvorbokého hranola $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\rho = \overleftrightarrow{PQR}$, kde pre body P, Q, R platí, že $\mu(A'PA)$, bod Q leží vnútri steny CDD' a bod R leží vnútri steny BCC'.

■ **Príklad 2.6.10** Zostrojte rez kolmého päťbokého hranola $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\rho = \overleftrightarrow{PQR}$, kde pre body P, Q, R platí, že $(EPE') = 3$, bod Q leží vnútri steny ABB' a bod R leží vnútri steny.

■ **Príklad 2.6.11** Daný je štvorboký nepravidelný hranol $A'B'C'D'ABCD$. Zostrojte rez roviny $\alpha = \overleftrightarrow{LMN}$, pričom $\mu(B'LB)$, bod M patrí rovine ABC a bod N patrí rovine $A'AD$.

■ **Príklad 2.6.12** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez kocky rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$, ak $(AEK) = (EHL) = (CGM) = -1$.

■ **Príklad 2.6.13** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Zostrojte rez hranola rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLC}$, kde $\mu(AKA')$, $\mu(ELE')$.

■ **Príklad 2.6.14** Daný je päťboký hranol $A'B'C'D'E'ABCDE$. Zostrojte rez roviny $\delta = \overleftrightarrow{PQR}$, pričom P leží v stene $ABB'A'$, bod Q v stene $EDD'E'$ a pre bod R platí $\mu(C'RC)$.

■ **Príklad 2.6.15** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, stred S výšky hranola a body P, Q tak, že platí $(ADP) = \frac{1}{3}$, $(BEQ) = \frac{2}{3}$. Zostrojte rez hranola rovinou PQS.

■ **Príklad 2.6.16** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a body U, V, W tak, že $\mu(AUA')$, $\mu(BVB')$, $\mu(DWD')$. Nájdite rez hranola rovinou UVW.

■ **Príklad 2.6.17** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{UVW}$, ak $(AUB) = (CVG) = (EWD) = -1$.

■ **Príklad 2.6.18** Daný je šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{UVW}$, ak U je vnútorným bodom steny $AFF'A'$, V je vnútorným bodom steny $BCC'B'$ a W je vnútorným bodom steny $DEE'D'$.

■ **Príklad 2.6.19** Daný je pravidelný štvorboký hranol $ABCDA'B'C'D'$ a pre body M, K platí $(BMD') = 4$, $(BKB') = 8$. Bodom M veďte priamku p a zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{pK}$.

2.7 Určenie rezu telesa využitím perspektívnej kolineácie

V nasledujúcej podkapitole budeme pri určovaní rezov využívať perspektívnu kolineáciu medzi dvoma rovinami s vlastným stredom. Pripomenieme si preto definíciu a základné poznatky o kolineácii.

V rozšírenom euklidovskom priestore $\overline{\mathbb{E}}_3$ je daný útvar M, ktorý leží v rovine ρ, rovina π rôznobežná s rovinou ρ a bod S, ktorý neleží ani v jednej z oboch rovín. Ak útvar M premietneme zo stredu S do roviny π, dostaneme útvar M$'$. Hovoríme, že útvary M a M$'$ sú vo vzťahu perspektívnej kolineácie.

Definícia 2.7.1. *Nech ρ a π sú dané vlastné rôznobežné roviny v projektívnom rozšírenom priestore $\overline{\mathbb{E}}_3$ a nech S je vlastný bod, ktorý neleží ani v jednej z rovín ρ, π. Zobrazenie, ktoré každý bod X roviny ρ zobrazí do bodu X' roviny π tak, že pre X' platí $X' \in \overleftrightarrow{SX} \cap \pi$ sa nazýva stredová kolineácia roviny ρ na rovinu π.*

Bod S sa nazýva stredom kolineácie a priesečnica o rovín ρ, π osou kolineácie. Takto danú kolineáciu označujeme $\mathcal{K}(S; \rho, \pi)$.

Z definície je jasné, že ak sa roviny ρ a π rovnajú, je kolineácia identitou. Z definície taktiež vyplýva, že inverzné zobrazenie ku stredovej kolineácii roviny ρ na rovinu π je stredová kolineácia roviny π na rovinu ρ.

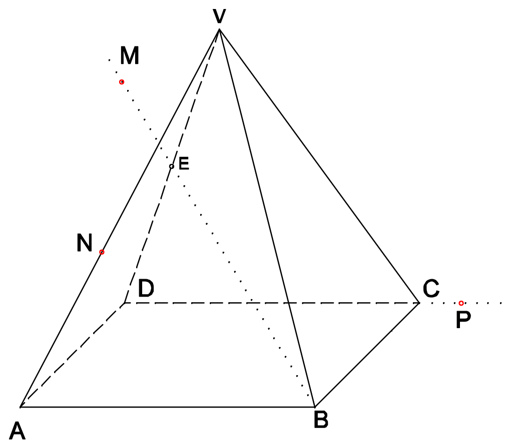
Kolineáciu charakterizujú nasledujúce vlastnosti:

- zachováva sa incidencia bodov,
- spojnica odpovedajúcich si bodov prechádza stredom kolineácie,
- odpovedajúce si priamky v kolineácií sa pretínajú na osi kolineácie.

Veta 2.7.1. (KOLIN). *Medzi rezovou rovinou a rovinou podstavy telesa s vlastným hlavným vrcholom platí vzťah perspektívnej kolineácie. Stredom kolineácie je hlavný vrchol telesa a osou kolineácie je priesečnica rezovej roviny a roviny podstavy.*

Poznámka 2.7.1. Ak rezová rovina je rovnobežná s rovinou podstavy telesa, osou kolineácie medzi rezovou rovinou a rovinou podstavy je potom ideálna priamka. Medzi rezovou rovinou a rovinou podstavy telesa platí vzťah homotétie - ako špeciálny prípad perspektívnej kolineácie.

■ **Príklad 2.7.1** Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$, ak $(DEV) = 2$, $\mu(BEM)$, $\mu(ANV)$, $\mu(DCP)$.

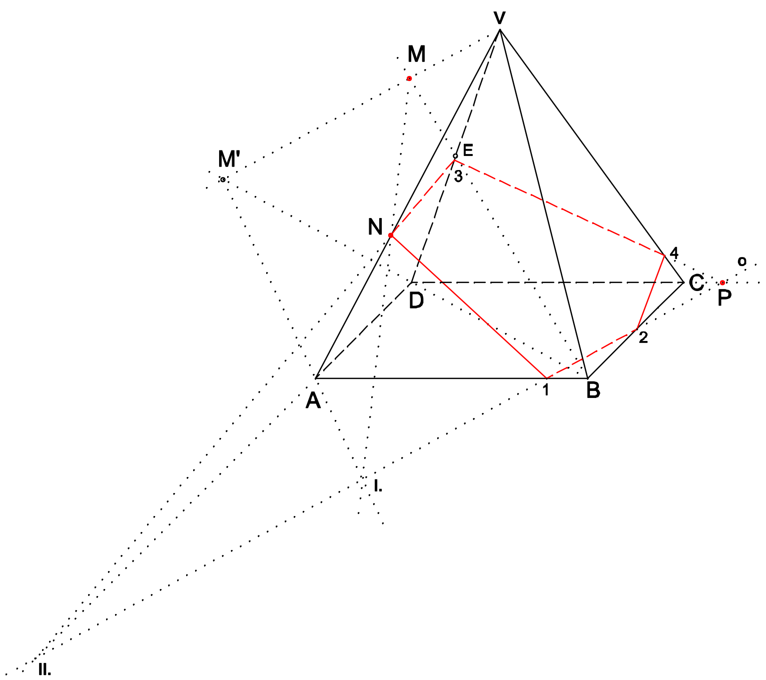


obr. 29

Riešenie: Predpokladajme, že rovina MNP pretína steny ihlana. Preto podľa vety (KOLIN), str.39, môžeme využiť kolineáciu medzi rezovou rovinou a rovinou podstavy ihlana. Stredom kolineácie je vrchol V. Bod M sa v stredovej kolineácii zobrazí do bodu M', (obr. 30), ($\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{VM} = \{M'\}$). Bod N sa v stredovej kolineácii zobrazí do bodu A ($\{A\} = \overleftrightarrow{VN} \cap \overleftrightarrow{ABC}$), bod P je samodružným bodom, tj. leží na osi kolineácie. Osou kolineácie bude priamka PI, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{M'A}$. Prienik priamky PI so stenou spodnej podstavy zrejme určuje časť rezu 12 v podstave.

Kedže body N a 1 patria rezovej rovine a zároveň rovine ABV, podľa axiómi (Ax4) $\overleftrightarrow{MNP} \cap \overleftrightarrow{ABV} = \overleftrightarrow{N1}$ (časťou rezu v stene rezu ABV je úsečka $N1$). Ďalšiu časť v bočnej stene ABV určíme pomocou ďalšieho samodružného bodu II. Bod II je samodružným bodom priamky AD, preto týmto bodom musí prechádzať aj obraz priamky AD v kolineácii $\mathcal{K}$. Preto časť rezu v stene ADV určíme ako prienik priamky NII so stenou ADV. Hľadaný rez v stenách DCV a BCV v tomto poradí ľahko dokončíme využitím axiómy incidencie (Ax4).

Rezom ihlana je päťuholník $N1243$, (obr. 30).



obr. 30

■ **Príklad 2.7.2** Daný je štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQT}$, kde $\mu(APD)$, $\mu(AQB)$, $\mu(VTC)$.

■ **Príklad 2.7.3** Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{EFG}$, kde $(BCE) = (AVF) = (DVG) = -2$.

■ **Príklad 2.7.4** Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$. Pre body M, N, P platí $(AVM) = (CVP) = 2$, $(BNV) = \frac{3}{2}$.

■ **Príklad 2.7.5** Daný je päťboký ihlan $ABCDEV$ a rovina $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, kde $\mu(APV)$, $\mu(BQV)$, $\mu(DRV)$. Zostrojte rez danou rovinou α.

■ **Príklad 2.7.6** Daný je pravidelný šesťboký ihlan $ABCDEFV$. Pre body A', B', D' platí $(AVA') = -1$, $(DVD') = -\frac{1}{3}$, $(VB'B) = 3$. Zostrojte rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{A'B'D'}$.

■ **Príklad 2.7.7** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte rez ihlana rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNK}$, ak pre body M, N, K platí $\mu(AMV)$, $\mu(BNC)$, $\mu(DKV)$.

■ **Príklad 2.7.8** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $KLMNV$. Určte rez rovinou $\rho = \overleftrightarrow{PQR}$, kde pre body P, Q, R platí $(KPV) = \frac{3}{2}$, $(KLQ) = 4$, $(VRN) = 3$.

■ **Príklad 2.7.9** Daný je pravidelný šesťboký ihlan $ABCDEFV$. Určte rez rovinou, ktorá prechádza bodom Q a priamkou p, ktorá prechádza bodom C a nemá žiaden ďalší spoločný bod s podstavou. Pre bod Q platí $(AVQ) = -1$.

■ **Príklad 2.7.10** Zostrojte rez pravidelného ihlana $ABCDV$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, pričom pre body P, Q, R platí $\mu(APV)$, $\mu(CQV)$ a R leží v stene podstavy.

■ **Príklad 2.7.11** Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlanu $ABCDV$ rovinou $\rho = \overleftrightarrow{PQR}$, kde pre body P, Q, R platí, že bod P leží v rovine podstavy mimo telesa, $(VQA) = 4$ a $(VCR) = -1$.

■ **Príklad 2.7.12** Daný je pravidelný šesťboký ihlan $ABCDEFV$. Pre body M, M' platí $(FCM') = (VM'M) = -1$ a pre body K, L $(AKV) = 2$, $(BLV) = \frac{4}{3}$. Zostrojte rez ihlana rovinou KLM.

■ **Príklad 2.7.13** Zostrojte rez všeobecného päťbokého ihlanu $ABCDEV$ rovinou $\rho = \overleftrightarrow{PQR}$, ak pre body P, Q, R platí $(APV) = \frac{5}{3}$, $(VV_1Q) = -1$, kde V_1 je stred podstavy a R leží v stene BCV.

■ **Príklad 2.7.14** Daný je päťboký ihlan $ABCDEV$. Zostrojte rez rovinou $\delta = \overleftrightarrow{LMN}$, kde L, N sú v poradí vnútorné body stien ABV a DEV. M je vnútorný bod podstavy ihlana.

■ **Príklad 2.7.15** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte jeho rez rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$, ak $(CVM) = (DVN) = -1$ a $(VPS) = 3$, kde S je stred podstavy ihlana.

■ **Príklad 2.7.16** Daný je šesťboký ihlan $ABCDEFV$, rovina $\delta = \overleftrightarrow{PQR}$, kde $\mu(APV)$, bod Q je vnútorným bodom steny BCV a bod R je vnútorným bodom steny DEV. Zostrojte rez danou rovinou δ.

■ **Príklad 2.7.17** Zostrojte rez päťbokého ihlana $ABCDEV$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{PQR}$, ak pre body P, Q, R platí:

a) $\mu(APV)$ a $(BQC) = (DRV) = 2$,

b) P leží vnútri steny ABV, R patrí CDV a $\mu(CQV)$,

c) P leží vnútri steny ABV, Q leží vnútri steny CDV a $\mu(ERV)$.

■ **Príklad 2.7.18** Zostrojte rez pravidelného šesťbokého ihlana $ABCDEFV$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{pK}$. Priamku p zvoľte tak, aby pretínala dve podstavné hrany v ich vnútorných bodoch a pre bod K platí $\mu(AVK)$.

■ **Príklad 2.7.19** V rovine podstavy štvorbokého ihlana $ABCDV$ je daná priamka p a $\mu(DKV)$. Priamka p je rovnobežná s hranou AB a rôznobežná s ostatnými podstavnými hranami a nepretína podstavu ihlana. Zostrojte rez ihlana rovinou pK.

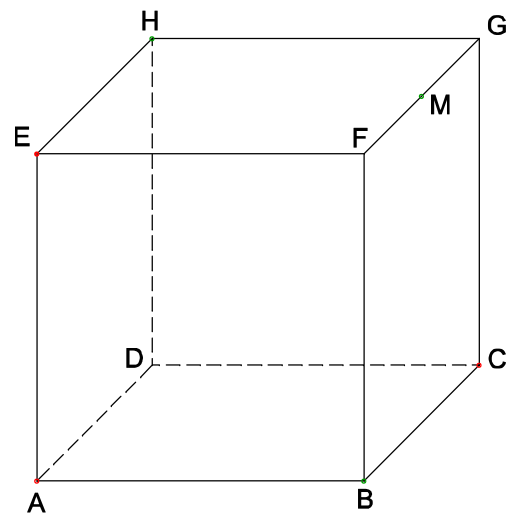
3 PRIESEČNICA DVOCH ROVÍN

V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať prieniku dvoch rovín. Aby sme určili priesečnicu dvoch rovín určíme najprv rezy daných dvoch rovín s telesom. Pri ich určovaní budeme využívať poznatky z predchádzajúcej kapitoly.

Prienikom dvoch rôznobežných rovín je na základe definície rôznobežných rovín a axióm incidencie (Ax3) a (Ax4) priamka, tzv. priesečnica. Teda pri hľadaní priesečnice dvoch rovín stačí nájsť také dva body, ktoré patria jednej a zároveň aj druhej rovine.

Pri úlohách, v ktorých hľadáme priesečnicu dvoch rovín sa budeme snažiť hľadať dva rôzne body tejto priesečnice v rovinách stien telesa.

■ **Príklad 3.1** Bod M je stredom hrany FG kocky $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha = \overleftrightarrow{AEC}$ a $\beta = \overleftrightarrow{HMB}$.



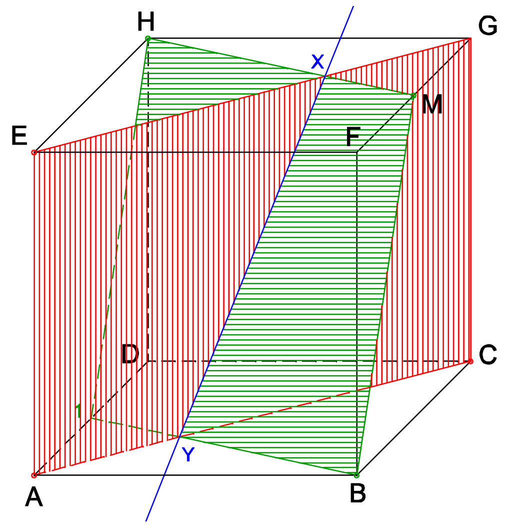
obr. 31

Riešenie: Najprv si musíme určiť rezy kocky rovinami α, β (využijeme axiómu (Ax4) a vetu (Kon2)). Rezom rovinou α je obdĺžnik $ACGE$ a rezom rovinou β je rovnobežník $BMH1$, kde úsečka $1H$ je časť rezu steny $ADHE$.

Hľadanú priesečnicu rovín α, β určíme dvoma rôznymi bodmi. Postačuje teda nájsť dva rôzne body, ktoré patria tak rovine α ako aj rovine β. Takéto body sú napríklad na obrázku označené X a Y, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{EG} \cap \overleftrightarrow{HM}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{B1}$.

Prienikom daných dvoch rovín je priamka XY, (obr. 32).

Na záver ešte vyznačíme šrafovaním viditeľnosť obidvoch rezov kocky rovinami α, β (pri šrafovaní uvažujeme kocku ako priehľadné teleso a rezy ako nepriehľadné útvary).



obr. 32

■ **Príklad 3.2** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte priesečnicu roviny BDE a roviny BDG.

■ **Príklad 3.3** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Bod S je stred steny $EFGH$. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha = \overleftrightarrow{ACH}$ a $\beta = \overleftrightarrow{DES}$.

■ **Príklad 3.4** Zostrojte štvorsten $ABCD$. Body A', B' zvoľte tak, aby platilo $\mu(AA'D)$, $\mu(DB'B)$. Zobrazte priesečnicu $\overleftrightarrow{AB'C}$ a $\overleftrightarrow{A'BC}$.

■ **Príklad 3.5** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte priesečnicu roviny ACS a roviny VKL, kde body S, K, L sú dané $(CVS) = (ADK) = (BCL) = -1$.

■ **Príklad 3.6** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Pre bod N platí $(CVN) = -1$. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha = \overleftrightarrow{ACV}$ a $\beta = \overleftrightarrow{BDN}$.

■ **Príklad 3.7** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a bod O tak, že platí $(BGO) = -1$. Zostrojte prienik rovín:
a) $\overleftrightarrow{ACG} \cap \overleftrightarrow{AFH}$,
b) $\overleftrightarrow{ACF} \cap \overleftrightarrow{BEG}$,
c) $\overleftrightarrow{BCG} \cap \overleftrightarrow{AEO}$,
d) $\overleftrightarrow{ABH} \cap \overleftrightarrow{CDH}$.

■ **Príklad 3.8** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečnicu roviny $\gamma = \overleftrightarrow{ABG}$ s rovinou:
a) $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$,
b) $\beta = \overleftrightarrow{ACG}$.

■ **Príklad 3.9** Daný je kváder $ABCDEFGH$. Určte priesečnicu rovín $\alpha = \overleftrightarrow{ABG}$ a $\beta = \overleftrightarrow{EFC}$.

■ **Príklad 3.10** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Body M, N, P sú dané $(HGM) = (ABN) = (BCP) = -1$. Určte priesečnicu rovín $\alpha = \overleftrightarrow{EMN}$ a $\beta = \overleftrightarrow{HDP}$.

■ **Príklad 3.11** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník rovín:
a) $\overleftrightarrow{EGS} \cap \overleftrightarrow{BHF}$, kde $(BCS) = -1$,
b) $\overleftrightarrow{ABG} \cap \overleftrightarrow{HFS}$, kde $(ADS) = -1$,
c) $\overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{FHS}$, kde $(AES) = -1$,
d) $\overleftrightarrow{ACS} \cap \overleftrightarrow{CGS}$, kde $(ABS) = -1$.

■ **Príklad 3.12** Zobrazte kocku $ABCDA'B'C'D'$, ktorej vrchná podstava má stred S'. Zostrojte priesečník rovín $\alpha = \overleftrightarrow{ABS'}$ a $\beta = \overleftrightarrow{BCS'}$.

■ **Príklad 3.13** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha = \overleftrightarrow{ADM}$, $\beta = \overleftrightarrow{BCM}$, kde $(EFM) = -1$.

■ **Príklad 3.14** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a bod P tak, že platí $(FGP) = -1$. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha = \overleftrightarrow{ABP}$ a $\beta = \overleftrightarrow{CDP}$.

■ **Príklad 3.15** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body S, Q, U, tak že S je stred steny $EFGH$ a $(GCQ) = (ACU) = -1$. Zostrojte prienik rovín:

a)$\alpha = \overleftrightarrow{ACG}$ a $\beta = \overleftrightarrow{DBF}$,

b)$\alpha = \overleftrightarrow{DBF}$ a $\beta = \overleftrightarrow{EGB}$,

c)$\alpha = \overleftrightarrow{ESB}$ a $\beta = \overleftrightarrow{DFQ}$

d)$\alpha = \overleftrightarrow{ESU}$ a $\beta = \overleftrightarrow{DFQ}$.

■ **Príklad 3.16** Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha \cap \beta$, kde $\alpha = \overleftrightarrow{A'MN}$, $\beta = \overleftrightarrow{ADA'}$, ak $(ABM) = -1$, $(CC'N) = -1$.

■ **Príklad 3.17** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Pre body M, N platí $(BVM) = (CVN) = -1$. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha = \overleftrightarrow{ABN}$ a $\beta = \overleftrightarrow{CDM}$.

■ **Príklad 3.18** Zostrojte priesečnicu rovín pravidelného štvorbokého ihlan $ABCDV$:

a) $\overleftrightarrow{BCV} \cap \overleftrightarrow{ADV}$,

b) $\overleftrightarrow{BDV} \cap \overleftrightarrow{LSK}$, kde $(BCL) = (CVS) = -1$, $(ADK) = -3$,

c) $\overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{SNO}$, kde $(CVS) = (AVN) = -1$, $(BVO) = -3$,

d) $\overleftrightarrow{BCV} \cap \overleftrightarrow{NCR}$, kde $(AVN) = -1$ a $(ABR) = -1/3$.

■ **Príklad 3.19** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník rovín:

a) $\overleftrightarrow{ACH} \cap \overleftrightarrow{KLM}$, kde pre body K, L, M platí $(ABK) = (EFM) = (BCL) = -1$,

b) $\overleftrightarrow{AS'S''} \cap \overleftrightarrow{CSS'''}$, kde $(EHS) = (EFS') = (CDS) = (FGS''') = -1$.

4 PRIESEČNÍK PRIAMKY A ROVINY

V nasledujúcej kapitole sa budeme zaoberať prienikom (priesečníkom) priamky a roviny, pričom budeme potrebovať aj určiť rez telesa rovinou. Predpokladáme, že určenie rezu by už nemalo robiť čitateľovi závažnejšie problémy.

Priesečník priamky s rovinou (ak priamka nie je rovnobežná s rovinou) zostrojíme pomocou roviny, ktorú preložíme danou priamkou, tj. vyberieme pomocnú rovinu takú, ktorej daná priamka patrí. Potom určíme priesečnicu pomocnej roviny s danou rovinou. Hľadaný priesečník priamky a roviny zistíme ako prienik dvoch priamok a to zadanej priamky s nájdenou priesečnicou.

Poznamenajme, že výber pomocnej roviny, ktorú prekladáme danou priamkou je ľubovoľný a neovplyvňuje riešenie príkladu. Najvýhodnejšie je však zvoliť rovinu buď vrcholovú (pri ihlane) alebo rovinu rovnobežnú s bočnými hranami hranola.

Vrcholová (pomocná) rovina ihlanu môže mať vzhľadom k ihlanu tieto polohy:

- prienik pomocnej roviny a ihlana je jednobodová množina, ktorej prvkom je hlavný vrchol ihlana,
- prienik pomocnej roviny a ihlana je práve jedna bočná hrana ihlana,
- prienik pomocnej roviny a ihlana je bočná stena ihlana,
- prienik pomocnej roviny a ihlana je trojuholník, ktorého jeden vrchol je práve hlavný vrchol ihlanu.

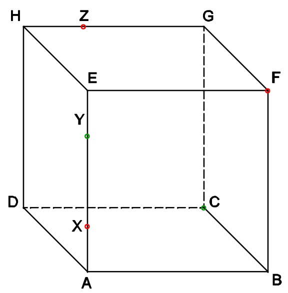
Pomocná rovina rovnobežná s bočnými hranami hranola môže mať vzhľadom ku hranolu niektorú z týchto polôh:

- prienikom pomocnej roviny a hranola je prázdna množina,
- prienikom pomocnej roviny a hranola je práve jedna bočná hrana hranola,
- prienikom pomocnej roviny a hranola je jedna bočná stena hranola,
- prienikom pomocnej roviny a hranola je rovnobežník.

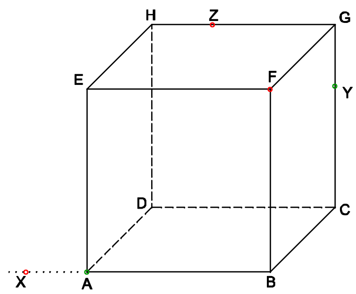
■ **Príklad 4.1** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte prienik priamky p s rovinou ZXF, ak:

a) $p = \overleftrightarrow{CY}$, kde pre body X, Y, Z platí $(AXE) = \frac{4}{3}$, $(AYE) = 4$, $(HZG) = \frac{3}{2}$, (obr.33),

b) $p = \overleftrightarrow{AY}$, kde pre body X, Y, Z platí $(ABX) = \frac{1}{4}$, $(CGY) = (HGZ) = -\frac{1}{2}$, (obr.34).



obr. 33



obr. 34

Riešenie: a) Najprv určíme rez kocky rovinou ZXF (využijeme axiómu (Ax4) a vetu (Kon2)). Rezom roviny ZXF je štvoruholník $XFZ1$, kde $X1$ je časťou rezu v stene $ADHE$.

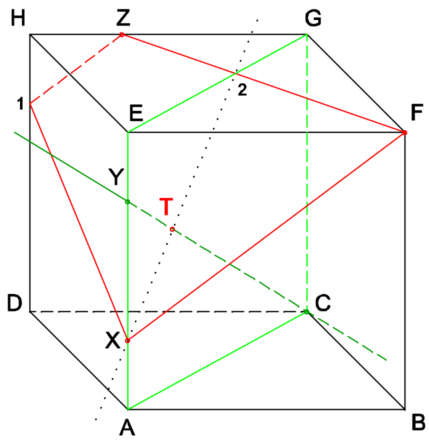
Aby sme našli hľadaný priesečník priamky CY a roviny ZXF, preložíme priamkou CY pomocnú rovinu, ktorá túto priamku obsahuje. Nech je to napríklad rovina ACG. Nájdeme priesečnicu týchto dvoch rovín, $\overleftrightarrow{ACG} \cap \overleftrightarrow{ZXF} = \overleftrightarrow{X2}$, kde 2 je priesečník priamok EG a ZY v rovine hornej podstavy $EFGH$. Prienik priamky CY a roviny ZXF určíme ako priesečník priamky CY a nájdenej priesečnice $X2$, $\overleftrightarrow{CY} \cap \overleftrightarrow{X2} = \{T\} = \overleftrightarrow{CY} \cap \overleftrightarrow{ZXF}$.

Priesečník priamky CY s rovinou ZXF je teda bod T, (obr. 35).

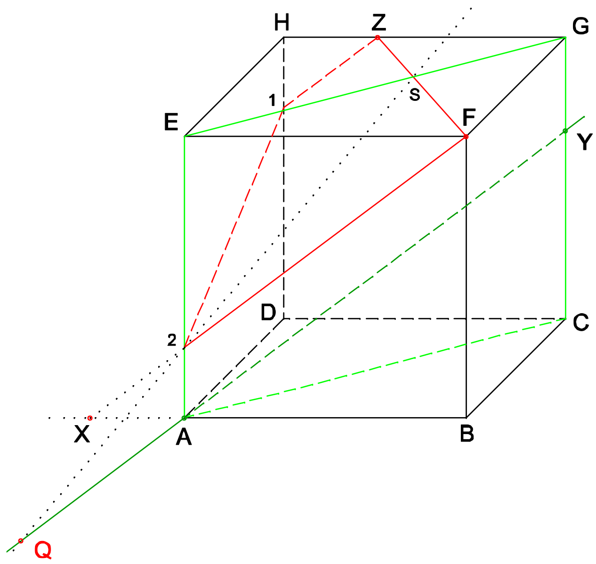
b) Budeme postupovať analogicky ako v predchádzajúcom prípade. Určíme rez kocky rovinou ZXF (využijeme axiómu (Ax4) a vetu (Kon2)), rezom je štvoruholník $FZ12$, kde úsečka 12 je časť rezu v stene $ADHE$.

Hľadaný prienik roviny ZXF a priamky AZ určíme nasledovne. Najskôr priamkou AY preložíme pomocnú rovinu, ktorá túto priamku obsahuje (napríklad rovina ACG). Nájdeme priesečnicu týchto dvoch rovín, $\overleftrightarrow{ACD} \cap \overleftrightarrow{ZCF} = \overleftrightarrow{S2}$, kde S je priesečník priamok EG a ZF v rovine steny $EFGH$. Prienik priamky AY a roviny ZXF nájdeme ako prienik priamky AY a v predchádzajúcom kroku nájdenej priesečnice $\overleftrightarrow{S2}$, $\overleftrightarrow{AY} \cap \overleftrightarrow{S2} = \{Q\}$.

Prienikom priamky AY a roviny ZXF je teda bod Q, (obr. 36).



obr. 35



obr. 36

Poznámka: V prípade b) sme chceli ukázať, že priesečník priamky a roviny sa môže nachádzať aj mimo telesa.

■ **Príklad 4.2** Bod L je stredom hrany BF kocky $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky EL s rovinou ABC.

■ **Príklad 4.3** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body M, N tak, že $(ABM) = (BGN) = -1$. Zostrojte priesečníky priamky $p = \overleftrightarrow{MN}$ s rovinou hornej podstavy a rovinou ADH.

■ **Príklad 4.4** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Nájdite priesečník priamky DF s rovinou ACH.

■ **Príklad 4.5** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a bod P, pre ktorý platí $(EFP) = 2$. Zostrojte priesečník priamky q s rovinou HPB, ak:

a) $q = \overleftrightarrow{EG}$,

b) $q = \overleftrightarrow{AC}$,

c) $q = \overleftrightarrow{AG}$.

■ **Príklad 4.6** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky p s rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{BDH}$, ak:

a) $p = \overleftrightarrow{EG}$,

b) $p = \overleftrightarrow{EC}$.

■ **Príklad 4.7** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a bod P tak, že $(AEP) = -1$. Zostrojte priesečník priamky s rovinou $\beta = \overleftrightarrow{BHP}$, ak

a) $r = \overleftrightarrow{FC}$,

b) $s = \overleftrightarrow{FD}$

c) $t = \overleftrightarrow{CQ}$, kde $(EHQ) = -1$.

■ **Príklad 4.8** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a bod L je stredom hrany BF. Zostojte priesečník priamky HL s rovinou:

a) $\overleftrightarrow{ABC}$,

b) $\overleftrightarrow{ACG}$.

■ **Príklad 4.9** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky DF s rovinou BEG.

■ **Príklad 4.10** Daný je kváder $ABCDEFGH$ a pre bod P platí $(APE) = 2$. Zostrojte priesečník danej priamky s rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{BHP}$ ak:

a) $p = \overleftrightarrow{AF}$,

b) $q = \overleftrightarrow{DF}$,

c) $t = \overleftrightarrow{AK}$, ak $(FHK) = -1$.

■ **Príklad 4.11** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Pre bod P platí $\mu(DPV)$. Zostrojte priesečník priamky BP s rovinou ACV.

■ **Príklad 4.12** Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$. Priamka $p = \overleftrightarrow{BE}$, kde bod E je daný $\mu(D'EC')$. Zostrojte priesečníky p s rovinami:

a) $\alpha = \overleftrightarrow{ADD'}$,

b) $\beta = \overleftrightarrow{ACC'}$.

■ **Príklad 4.13** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ a body E, F tak, že bod E leží vnútri steny BCV a bod F leží vnútrí steny ABV. Určte prienik priamky EF s rovinou podstavy.

■ **Príklad 4.14** Je daný pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Pre body P, Q platí $\mu(ABQ)$ a $\mu(DPV)$. Zostrojte priesečník priamky PQ s rovinou:

a) $\alpha = \overleftrightarrow{BCV}$,

b) $\beta = \overleftrightarrow{ACV}$.

■ **Príklad 4.15** Daný je päťboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ a pre body P, Q platí $(A'AP) = 2$, $(DD'Q) = 4$. Zostrojte priesečník priamky PQ s každou rovnou siedmich stien hranola.

■ **Príklad 4.16** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ a priamka $p = \overleftrightarrow{MP}$, pričom $(ASC) = 2$, $\mu(MAB)$, $(VPS) = 2$. Zostrojte priesečníky priamky p:

a) so stenami ihlana,

b) s rovinami stien ihlana.

■ **Príklad 4.17** V štvorstene $ABCD$ sú dané body M, N tak, že $\mu(AMD)$ a N je vnútorný bod steny ABC. Zostrojte priesečník priamky $p = \overleftrightarrow{DN}$ s rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MBC}$.

■ **Príklad 4.18** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ a body E, F tak, že bod E patrí stene BCV a bod F stene ABV. Určte prienik priamky EF s rovinou podstavy.

■ **Príklad 4.19** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ a body U, W, R tak, že $(AVU) = -1$, $(BUW) = -1/3$, $(CVR) = -3$. Nájdite priesečník priamky a roviny:
a) $\overleftrightarrow{AW} \cap \overleftrightarrow{BCV}$,
b) $\overleftrightarrow{UW} \cap \overleftrightarrow{BCD}$,
c) $\overleftrightarrow{AR} \cap \overleftrightarrow{BDV}$,
d) $\overleftrightarrow{DV} \cap \overleftrightarrow{ACW}$,
e) $\overleftrightarrow{CR} \cap \overleftrightarrow{BDU}$.

■ **Príklad 4.20** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte priesečník priamky $p = \overleftrightarrow{CS}$ s rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLV}$, kde $(AVS) = -1$, $(ABK) = (CDL) = -3$.

■ **Príklad 4.21** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky $p = \overleftrightarrow{HV}$ a roviny $\alpha = \overleftrightarrow{BVR}$, kde $(EVA) = (CRG) = 2$.

■ **Príklad 4.22** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte prienik priamky AG a roviny EDB.

■ **Príklad 4.23** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte prienik priamky a roviny:
a) priamka $p = \overleftrightarrow{DF}$ a $\beta = \overleftrightarrow{MNG}$ ak $(HDM) = (BFN) = -1$,
b) priamka $p = \overleftrightarrow{HB}$ a $\beta = \overleftrightarrow{CFE}$.

■ **Príklad 4.24** Daný je rovnobežnosten $ABCDEFGH$. Zostrojte prienik priamky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ s rovinami ABG a CDH, kde P, Q sú vnútorné body stien ABE a EFG v tomto poradí.

■ **Príklad 4.25** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky a roviny, ak:
a) $a = \overleftrightarrow{IJ}$ a $\alpha = \overleftrightarrow{BCE}$, kde $(ACI) = (EGJ) = -1$,
b) $b = \overleftrightarrow{FD}$ a $\beta = \overleftrightarrow{KLM}$, kde $(GHK) = (CGL) = -1$ a $(EFM) = -3$,
c) $c = \overleftrightarrow{EC}$ a $\gamma = \overleftrightarrow{ANO}$, kde $(BFN) = -1$ a $(EHO) = -1/3$.

■ **Príklad 4.26** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Nájdite prienik priamky MN s rovinou ABC, kde pre body M, N platí, že M je vnútorným bodom steny $ADEH$ a $(FGN) = -1$.

■ **Príklad 4.27** Daný je šikmý štvorboký hranol $ABCDA'B'C'D'$, ktorého podstavou je lichobežník. Pre body platí $\mu(ADM)$, $\mu(BB'N)$. Nájdite priesečníky priamky $p = \overleftrightarrow{MN}$ so stenami hranola.

■ **Príklad 4.28** Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$ a bod M tak, že $(BCM) = -1$. Bodom M veďte priamku p rovnobežnú s telesovou uhlopriečkou AC' a vyhľadajte jej priesečníky s rovinami prednej a zadnej steny kvádra.

■ **Príklad 4.29** V štvorstene $ABCD$ sú dané body $\mu(BPD)$ a vnútri steny ABC bod N. Zostrojte priesečník priamky $\overleftrightarrow{DN}$ s rovinou α, ktorá prechádza bodom P rovnobežne s rovinou ABC.

■ **Príklad 4.30** Daný je štvorsten $ABCD$ a body M, N, P, Q, R tak, že platí $\mu(AMC)$, $\mu(BNC)$, $\mu(APD)$, $\mu(AQC)$, $\mu(DRC)$. Zostrojte priesečník priamky QR s rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$.

■ **Príklad 4.31** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky $p = \overleftrightarrow{TV}$ a roviny $\gamma = \overleftrightarrow{PQR}$, kde pre body P, T, Q, V, R platí $(APB) = (GTH) = (BQC) = (EVA) = (CRG) = 2$.

■ **Príklad 4.32** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte priesečník priamky a roviny:

a) $a = \overleftrightarrow{VE}$ a $\alpha = \overleftrightarrow{FGD}$, kde $(ACE) = (ABF) = (CVG) = -1$,

b) $b = \overleftrightarrow{VH}$ a $\beta = \overleftrightarrow{AIG}$, kde $(ACH) = (BCI) = (CVG) = -1$,

c) $c = \overleftrightarrow{CJ}$ a $\gamma = \overleftrightarrow{NOP}$, kde $(AVJ) = -1$, $(ABN) = -1/3$, $(CVO) = -1/2$ a $(DVP) = -3$,

d) $d = \overleftrightarrow{BV}$ a $\delta = \overleftrightarrow{KST}$, kde $(ABK) = (CVS) = -3$, $(DVT) = -1/3$,

e) $e = \overleftrightarrow{VI}$ a $\varepsilon = \overleftrightarrow{FJU}$, kde $(BCI) = (ABF) = (AVJ) = (CDU) = -1$.

■ **Príklad 4.33** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ a bod R tak, že $(CVR) = -3$. Nájdite priesečník $\overleftrightarrow{AV}$ a $\overleftrightarrow{BDR}$.

■ **Príklad 4.34** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky $p = \overleftrightarrow{PU}$ a roviny $\beta = \overleftrightarrow{QTV}$, kde $(HUE) = (BQC) = (GTH) = (APB) = (AVE) = 2$.

■ **Príklad 4.35** Daný je päťboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ a body $\mu(EKE')$, $\mu(BLB')$, $\mu(DMD')$, $\mu(CQC')$, P patrí stene $AA'EE'$. Zostrojte priesečník priamky PQ a roviny KLM.

5 PRIENIK PRIAMKY A TELESA

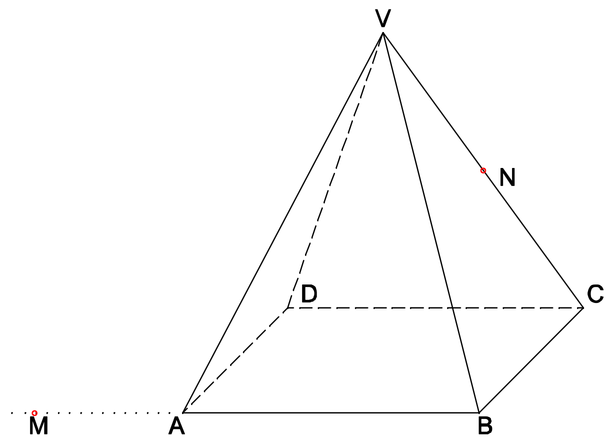
Do piatej kapitoly sme zaradili úlohy na určenie prieniku priamky a telesa.

Pri určovaní prieniku priamky a telesa postupujeme analogicky ako pri priesečníku priamky s rovinou. Pri hranatých telesách ide o zostrojenie priesečníkov danej priamky a niektorými jeho stenami.

Priesečníky priamky s mnohostenom zostrojíme, ak priamkou preložíme pomocnú rovinu. Pomocnú rovinu, v ktorej daná priamka leží, vyberáme tak, aby bol jej prienik s telesom čo najjednoduchší. Je to väčšinou vrcholová rovina, ktorá sa využíva najmä pri prieniku priamky a ihlana. Pri prieniku priamky s hranolom sa najčastejšie volí rovina rovnobežná s bočnými hranami telesa.

Poznámka 5.1. Priesečník priamky so stenou telesa bude viditeľný, ak ním prechádzajúca tvoriaca priamka leží na viditeľnej stene. V opačnom prípade priesečník nevidno a ani úsek priamky od priesečníka po obrysovú hranu nie je viditeľný.

■ **Príklad 5.1** Určte prienik priamky MN s pravidelným štvorbokým ihlanom $ABCDV$. Body M, N sú dané $(MAB) = \frac{3}{2}$ a $(CVN) = -1$.

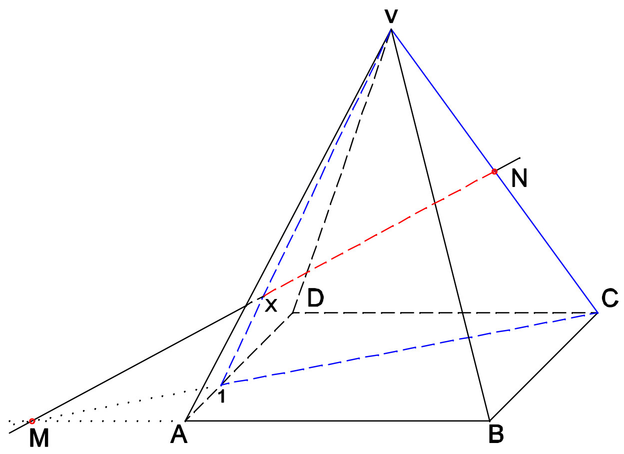


obr. 37

Riešenie: Pri hľadaní prieniku priamky a telesa hľadáme priesečnice roviny, ktorú preložíme danou priamkou, so stenami telesa. Najvhodnejšie a najjednoduchšie vo väčšine úloh (ak máme úlohu s telesom s vlastným hlavným vrcholom) je preložiť priamkou vrcholovú rovinu. V našom prípade je to rovina MCV(zrejme $\overleftrightarrow{MN} \subset \overleftrightarrow{MCV}$). Potom rezom ihlana touto vrcholovou rovinou je trojuholník $1CV$. Priamka MN pretína stenu ADV v bode X a stenu BCV v bode N, pričom $\{X\} = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{1V}$.

Prienikom priamky a roviny je úsečka XM, (obr. 38).

Na záver vyznačíme viditeľnosť priamky MN vzhľadom na daný ihlan $ABCDV$.



obr. 38

■ **Príklad 5.2** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a bod Y tak, že $(C'D'Y) = -1$. Zostrojte prienik hranola s priamkami:

a) $\overleftrightarrow{AC'}$,

b) $\overleftrightarrow{AB'}$,

c) $\overleftrightarrow{AY}$.

■ **Príklad 5.3** Daný je pravidelný šesťboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a body X, Y tak, že bod X je prienikom $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{EF}$ a $(C'D'Y) = -1$. Zostrojte prienik hranola s priamkami:

a)$\overleftrightarrow{XY}$,

b)$\overleftrightarrow{XC'}$,

c)$\overleftrightarrow{XD'}$.

■ **Príklad 5.4** Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body K, L tak, že $(HBK) = (DLC) = -1$. Zostrojte prienik priamky KL s kockou.

■ **Príklad 5.5** Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte prienik priamky PQ s kockou, ak pre body P, Q platí:

a) $(APB) = (QGH) = -1$,

b) $(DHP) = -2$, $(DQB) = -1$.

■ **Príklad 5.6** Daný je štvorboký ihlan $ABCDV$, kde $\mu(APD)$, $\mu(PNQ)$, bod Q leží vnútri steny CBV a bod M patrí rovine podstavy z vonku. Zostrojte priesečník priamky MN a ihlana.

■ **Príklad 5.7** Zostrojte priesečník priamky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ a pravidelného štvorstena $ABCD$, ak $(PKL) = (KLM) = 2$, $(DMQ) = -1$, pričom úsečka KL je stredná priečka trojuholníka ABC rovnobežná so stranou AC.

■ **Príklad 5.8** Daný je kváder $ABCDEFGH$. Pre body P, Q platí, že $ABP = \frac{11}{3}$ a $GHK = 3$. Zostrojte úsečku XY, ktorá je prienikom priamky $\overleftrightarrow{PQ}$ s kvádrom.

■ **Príklad 5.9** Zostrojte prienik priamky $p = PQ$ s kolmým štvorbokým hranolom $ABCDA'B'C'D'$, ak body P, Q sú dané $(DCP) = 4$ a $(AA'Q) = 6$.

■ **Príklad 5.10** Určte prienik priamky MN s pravidelným štvorbokým ihlanom $ABCDV$ ak $(ABM) = 2$ a $(CVN) = -1$.

■ **Príklad 5.11** Daný je päťboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ a priamka $p = \overleftrightarrow{KL}$. Body K, L sú dané $\mu(KXY)$, kde $\mu(AXB)$ a $\mu(DYC)$, L leží vnútri steny $CDD'C'$. Zostrojte prienik priamky a telesa.

■ **Príklad 5.12** Daný je trojboký hranol $ABCA'B'C'$ a body U, V, S tak, že $(A'C'U) = 2$, $(ABS) = (CVS) = -1$. Zostrojte prienik priamky UV s hranolom.

■ **Príklad 5.13** Daný je päťbokým hranolom $ABCDEA'B'C'D'E'$. Zostrojte prienik priamky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ s hranolom, ak pre body P, Q platí :

a) $(A'D'P) = 3$, $(ACQ) = \frac{1}{3}$,

b) $(ADP) = 2$, $(AEQ) = \frac{1}{4}$.

■ **Príklad 5.14** Zostrojte prienik priamky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ so šesťbokým ihlanom $ABCDEFV$, ak pre body P, Q platí:

a) $(BCP) = \frac{5}{3}$, $(CLQ) = -1$, ak $(FLV) = 2$,

b) $(BEP) = \frac{1}{2}$, $(KVQ) = -1$, kde $\{K\} = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{EF}$,

c) $(UPV) = -1$, kde $\{U\} = \overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{BC}$, $(TVQ) = -4$, kde $\{T\} = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{EF}$.

■ **Príklad 5.15** Daný je ľubovoľný päťboký ihlan $ABCDEV$, $\mu(CPV)$, $\mu(AMP)$, $\mu(VEN)$. Zostrojte prienik priamky MN s ihlanom.

■ **Príklad 5.16** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$, bod S je stredom jeho podstavy, $(MAB) = \frac{3}{2}$, $(SVN) = -1$ a bod P patrí $\mu(OPV)$, kde pre bod O platí $(DSO) = -1$. Zostrojte prienik priamky:

a) $p = \overleftrightarrow{MN}$ s ihlanom,

b) $q = \overleftrightarrow{MP}$ s ihlanom.

■ **Príklad 5.17** Daný je štvorsten $ABCD$. Body sú dané $\mu(APD)$, $\mu(BPM)$ a N patrí podstave štvorstena. Určte priesečník priamky MN s telesom.

■ **Príklad 5.18** Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ a priamka p. Zostrojte prienik priamky s ihlanom ak p prechádza bodom N, kde N je stred výšky ihlana a zároveň p je rovnobežná s rovinami ADV a BCV.

6 VÝSLEDKY A NÁVODY NA RIEŠENIE K ÚLOHÁM

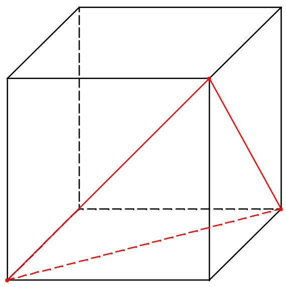
V tejto časti diplomovej práce uvedieme výsledky k jednotlivým úlohám, prípadne čiastočné návody k riešeniu úloh. Je rozčlenená do jednotlivých podkapitol, podľa predchádzajúcich častí práce. Výsledky, návody, teda pomôcky, majú čitateľa naviesť k správnemu riešeniu alebo poskytnúť možnosť kontroly správnosti riešenia jednotlivých úloh.

2 ROVINNÝ REZ TELESA

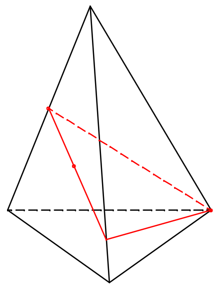
2.1 Určenie rezu telesa využitím axiómy incidencie

Pri riešení úloh postačuje, ak sa využívajú axiómy (Ax1), (Ax2), (Ax3), (Ax4), z ktorých vyplýva, že ak dve rôzne roviny majú spoločné dva rôzne body, potom ich prienikom je priamka určená týmito dvoma bodmi.

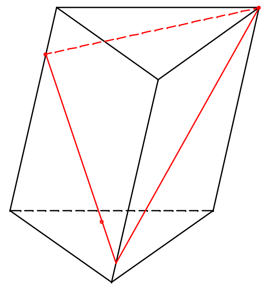
- **2.1.1** Riešený príklad.
- **2.1.2** Rezom je trojuholník ACM.
- **2.1.3** Rezom je trojuholník ACM.
- **2.1.4** Možno využiť, že body K, M ležia v rovine steny $ABFE$ a body G, M v rovine steny $BCGK$.
- **2.1.5** Uvedomte si, že body E, V ležia v rovine steny $ABFE$ a body B a W ležia v rovine steny $BCGF$, $\overleftrightarrow{VW} \cap BCGF = 1V$. Rezom je trojuholník $EV1$.
- **2.1.6** Uvedomte si, že body A', L ležia v rovine steny $ABB'A'$, body L, M ležia v rovine steny $BCC'B'$ a body A', M ležia v rovine steny $ABC'D'$.
- **2.1.7** Uvedomte si, že body L, M ležia v rovine steny BCD a tiež body K, L ležia v rovine steny ACD.
- **2.1.8** Riešenia rezov telies určenými vyznačenými bodmi sú naznačené na obrázkoch obr. 39, obr. 40, obr. 41, obr. 42, obr. 43.



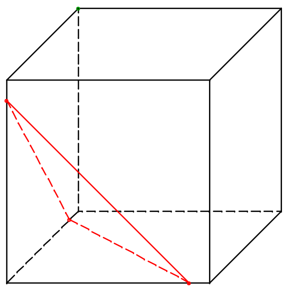
obr. 39



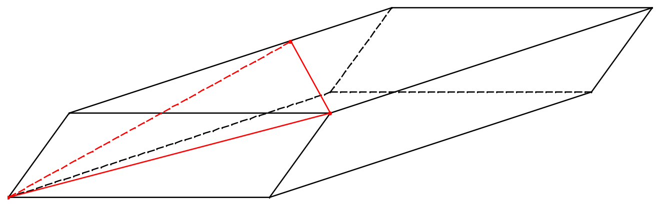
obr. 40



obr. 41



obr. 42



obr. 43

■ **2.1.9** Rezom telesa s hraničnou rovinou KLM je trojuholník KLM. Prienikom polpriestoru $KLMB$ s telesom je trojboký ihlan $KBLM$.

2.2 Určenie rezu telesa využitím rovnobežnosti stien telesa -1.časť

Pri nasledujúcich úlohách je potrebné využiť rovnobežnosť stien telesa a vetu (Kon2), ktorá hovorí o priesečniciach roviny s dvoma rôznymi rovnobežnými rovinami. Treba si vždy uvedomiť, ktoré roviny stien telesa sú rovnobežné.

■ **2.2.1** Riešený príklad.

■ **2.2.2** Riešený príklad.

■ **2.2.3** Rezom je rovnobežník. Treba si uvedomiť, že bod Q patrí rovine steny $EFGH$, ktorá je rovnobežná s rovinou steny $ABCD$. Na základe vety (Kon2) potom aj časti rezov v spomínaných stenách budú rovnobežné.

■ **2.2.4** Rezom je rovnobežník $HMB1$ (uvedomte si, že $\overleftrightarrow{EAD} \parallel \overleftrightarrow{FBC}$).

■ **2.2.5** Uvedomte si, že protiľahlé steny kocky sú rovnobežné. Rez zostrojte využitím vety (Kon2) a využitím axiómy incidencie (Ax4).

■ **2.2.6** Rezom je štvoruholník (treba využiť rovnobežnosť stien $BCC'B'$ a $ADD'A'$).

■ **2.2.7** Rezom je päťuholník (treba využiť poznatok, že protiľahlé steny kvádra sú rovnobežné, teda podľa vety (Kon2) aj priesečnice rovnobežných stien s rezovou rovinou budú rovnobežné).

■ **2.2.8** Rezom je päťuholník (treba využiť rovnobežnosť stien kocky $ABFE$ a $DCGH$).

■ **2.2.9** Rezom je rovnobežník (uvedomte si, že $\overleftrightarrow{ABB'} \parallel \overleftrightarrow{DCC'}$).

■ **2.2.10** Rezom je obdĺžnik $EHCB$.

■ **2.2.11** Uvedomte si, že protiľahlé steny kocky sú rovnobežné. Rez zostrojte využitím vety (Kon2).

■ **2.2.12** a) Rezom je päťuholník (treba využiť to, že roviny stien $ABCD$ a $EFGH$ sú rovnobežné).

b) Rezom je rovnobežník (využijeme roviny stien $BCGF$ a $ADHE$, ktoré sú rovnobežné).

■ **2.2.13** Rezom je päťuholník (využijeme rovnobežnosť protiľahlých stien kocky).

■ **2.2.14** a) Uvedomte si, že roviny stien $EFGH$ a $ABCD$ sú rovnobežné.

b) Uvedomte si, že roviny stien $ADHE$ a $BCGF$ sú rovnobežné.

c) Rezom je rovnobežník $ABGH$.

■ **2.2.15** Rezom je rovnobežník $ABGH$ (časť rezu v stene $BCGF$ tvorí úsečka $\overleftrightarrow{GX} \cap BCGF$, ktorá je rovnobežná s $\overleftrightarrow{AH}$).

■ **2.2.16** Treba si uvedomiť, že body X, E ležia v stene $ABFE$ a teda patria rovine tejto steny a podobne bod C leží v rovine steny $DCGH$. Ďalej možno využiť, že roviny sú rovnobežné.

■ **2.2.17** Časť rezu v prednej stene $ABFE$ je úsečka $\overleftrightarrow{FX} \cap ABFE$, podobne časť rezu v stene BCGF je úsečka $\overleftrightarrow{FY} \cap BCGF$. Stačí využiť rovnobežnosť protiľahlých stien kocky.

■ **2.2.18** Časťou rezu v spodnej stene $ABFE$ je úsečka prechádzajúca bodom Q, ktorá je rovnobežná s úsečkou HP (HP je časťou rezu v stene $DCGH$).

■ **2.2.19** Treba si uvedomiť, že bod Z patrí rovine prednej steny $ABFE$ spolu s bodom X, preto časťou rezu v prednej stene $ABFE$ je úsečka $\overleftrightarrow{ZX} \cap ABFE$. Ďalej stačí využiť rovnobežnosť protiľahlých stien kocky.

■ **2.2.20** Je potrebné si uvedomiť, že bod N patrí rovine steny $A'B'C'D'$ a zároveň aj rovine steny $ABB'A'$ (stačí využiť axiómu incidencie (Ax4) a vetu o rovnobežnosti (Kon2)).

■ **2.2.21** Body Y a Z patria rovine steny $BCGF$ a tá je rovnobežná s rovinou steny $ADHE$, do ktorej patrí bod X. Preto časť rezu v stene $ADHE$ prechádza bodom X a je rovnobežná s priamkou YZ.

■ **2.2.22** Stačí si uvedomiť, že body X a Z ležia v stene spodnej podstavy $ABCD$ a teda patria rovine tejto steny. Body X, Y ležia v stene $DCGH$ a teda patria rovine tejto steny. Stačí využiť rovnobežnosť protiľahlých stien kvádra.

■ **2.2.23** Uvedomte si, že body Z, X ležia v rovine steny $EFGH$ a body Z, Y ležia v rovine steny $ABFE$. Na dokončenie rezu postačí využitie vety (Kon2).

■ **2.2.24** Rezom hraničnej roviny HPQ je rovnobežník (treba využiť poznatok, že roviny protiľahlých stien kvádra sú rovnobežné). Prienikom kvádra s polpriestorom $HPQF$ je predná časť kvádra, ktorá obsahuje vrchol F.

■ **2.2.25** Najskôr určíme rez kocky rovinou EPQ, ktorým je obdĺžnik $PCQE$. Rovina EPQ je hraničnou rovinou polpriestoru $EPQD$. Prienikom kocky s polpriestorom je zadná časť kocky do ktorej patrí vrchol D.

■ **2.2.26** Rezom hraničnej roviny $A'PM$ je štvoruholník (treba si uvedomiť, že protiľahlé steny kvádra sú rovnobežné). Prienikom kvádra s polpriestorom je vrchná časť kvádra do ktorej patrí vrchol B'.

2.3 Určenie rezu telesa využitím rovnobežnosti stien telesa - 2. časť

V úlohách sa využíva kritérium rovnobežnosti priamky a roviny (KRpr) a kritérium rovnobežnosti dvoch rovín (KRrr).

■ **2.3.1** Riešený príklad

■ **2.3.2** Rezom roviny α' je rovnobežník $ABM1$, kde $A1$ je časťou rezu v stene $ADD'A'$. Rovinu α určíme využitím kritéria (KRrr). Bodom N vedieme rovnobežku p s $\overleftrightarrow{AB}$ v rovine steny $ABB'A'$ a rovnobežku q s $\overleftrightarrow{A1}$ v rovine steny $ADD'A'$. Na dokončenie rezu si stačí uvedomiť to, že protiľahlé steny kvádra sú rovnobežné.

■ **2.3.3** Využitím kritéria (KRrr) rovinu α určia rôznobežky p, q, kde p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{AB}$ a prechádza bodom N. Potom časť rezu v podstave ABC je úsečka $p \cap ABC$. Priamka q je rovnobežná s $\overleftrightarrow{AC'}$ a leží v rovine steny $ACC'A'$.

■ **2.3.4** Využitím kritéria (KRrr) rovinu α určujú rôznobežky p, q. Priamka p je rovnobežná s hranou DV, prechádza bodom M a leží v rovine steny DCV. Priamka q je rovnobežná s hranou AD a leží v rovine podstavy $ABCD$. Rezom roviny α je štvoruholník.

■ **2.3.5** Rezom roviny $A'MC$ je rovnobežník. Využijeme kritérium (KRrr):

a) Rezom je trojuholník NBC'.

b) Rovinu α určujú rôznobežky p, q kde p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{A'M}$ a prechádza bodom N v rovine prednej steny $ABB'A'$, priamka q je rovnobežná s $\overleftrightarrow{MC}$ a leží v rovine steny $ABCD$.

■ **2.3.6** Rovinu α určíme na základe kritéria (KRrr).

a) Rezom roviny ABC je trojuholník ABC. Bodom X vedieme rovnobežky s $\overleftrightarrow{AB}$ v rovine prednej steny $ABB'A'$ a s $\overleftrightarrow{AC}$ v rovine zadnej steny $ACC'A'$. Rez možno dokončiť využitím axiómy (Ax4). Môžete si overiť, že priamka CB je rovnobežná s časťou rezu v stene $BCC'B'$.

b) Rezom je rovnobežník. Hľadanú rovinu α určia rôznobežky p, q, kde p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{BC}$ a prechádza bodom R. Potom časť rezu v rovine spodnej steny ABC je úsečka $p \cap ABC$. Priamka q je rovnobežná s hranou CC' a leží v rovine steny $ACC'A'$.

c) Rezom roviny ABC' je trojuholník ABC'. Hľadanú rovinu určujú rôznobežky p, q, kde p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{BC'}$ a prechádza bodom P (časť rezu v stene $BCC'B'$ je úsečka $p \cap BCC'B'$). Priamka q je rovnobežná s hranou AB a leží v rovine steny $ABB'A'$.

■ **2.3.7** Rezom roviny ABC' je trojuholník ABC':

a) Využitím kritéria (KRrr) rovinu α určia rôznobežky p, q, kde p je rovnobežná s hranou AB a prechádza bodom R (časť rezu v stene $ABB'A'$ je úsečka $p \cap ABB'A'$). Priamka q je rovnobežná s $\overleftrightarrow{BC'}$ a leží v rovine steny $BCC'B'$.

b) Využitím kritéria (KRrr) rovinu α určujú rôznobežky p, q, kde p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{AC'}$ (časť rezu v stene $ACC'A'$ je úsečka $p \cap ACC'A'$). Priamka q je rovnobežná s hranou AB a leží v rovine steny $ABB'A'$.

c) Využitím kritéria (KRrr) rovinu α určujú rôznobežky p, q, kde p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{AC'}$ a prechádza bodom Q (časť rezu v stene $ACC'A'$ je úsečka $p \cap ACC'A'$). Priamka q je rovnobežná s hranou AB a leží v rovine steny ABC.

■ **2.3.8** Využitím kritéria (KRpr) určíme rezovú rovinu rôznobežkami p, q prechádzajúcimi bodom P, pričom p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{AB}$ a q je rovnobežná s $\overleftrightarrow{CV}$. Potom môžeme využiť vetu (Kon4) pre rovinu podstavy, rovinu prednej steny ABV a rezovú rovinu.

■ **2.3.9** Využitím kritéria (KRpr) bodom L vedieme rovnobežku p v rovine spodnej podstavy $ABCD$ s $\overleftrightarrow{A'C'}$. Potom zrejme úsečka $p \cap ABCD$ je časťou rezu v stene $ABCD$.

■ **2.3.10** a) Rezom je trojuholník EBG.

b) Rezom je štvorec $ABFE$.

c) Rezom je štvoruholník. (Uvedomte si, že rovina spodnej steny $ABCD$, v ktorej leží priamka CP, je rovnobežná s rovinou vrchnej podstavy $EFGH$, ktorej patrí bod G. Časť rezu v hornej podstave nájdeme tak, že bodom G vedieme rovnobežku s $\overleftrightarrow{CP}$.)

■ **2.3.11** Využitím kritéria (KRpr) rovinu α určujú priamky p, q, kde p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{AC}$ a prechádza bodom M a q je rovnobežná s $\overleftrightarrow{BC'}$. (Časťou rezu v spodnej podstave je úsečka $p \cap ABC$.)

■ **2.3.12** Treba si uvedomiť, že priamka HD je priesečnica rovín stien $ADHE$ a $BCGH$. Využitím kritéria (KRpr) rovinu α určujú priamky p, q, kde p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{HD}$ a prechádza rovinou steny $ABFE$ bodom X a q je rovnobežná s $\overleftrightarrow{HD}$ a prechádza rovinou steny $BCGF$ bodom Y.

2.4 Určenie rezu telesa pomocou vzájomnej polohy troch rovín

V nasledujúcich úlohách sa pri zostrojovaní rezu telesa zadanou rovinou využívajú vety (Kon4) a (Kon5), ktoré vyplývajú z konfigurácií troch rovín. V úlohách najskôr budeme hľadať spoločný bod troch rovín, ktorý budeme označovať I, II,III... . Na základe nich potom môžme zostrojiť rez danou rovinou, kde nám bude postačovať využitie axiómy incidencie (Ax4), vety (Kon2) alebo kritéria rovnobežnosti (KRpr) a (KRrr). Vo výsledkoch uvádzame postup nájdenia spoločného bodu troch rovín.

■ **2.4.1** Riešený príklad

■ **2.4.2** Riešený príklad.

■ **2.4.3** Uvedomte si, že možno využiť spoločný bod rezovej roviny, roviny podstavy a roviny zadnej steny $DCGH$.

■ **2.4.4** Treba si uvedomiť, že časť rezu v spodnej podstave tvorí úsečka $p \cap ABCD$. Prienikom roviny pL, roviny spodnej podstavy a roviny DCC' je bod I.

■ **2.4.5** Treba si uvedomiť, že na zostrojenie rezu treba využiť vetu (Kon4), ktorá hovorí, že ak dve roviny sú rôzne a tretia je rovnobežná s priamkou ich priesečnice, potom všetky tri priesečnice rovín sú rovnobežné.

■ **2.4.6** Bod I dostaneme prienikom rezovej roviny, roviny podstavy a roviny bočnej steny $ADHE$. Bod II dostaneme prienikom rezovej roviny, roviny podstavy a roviny zadnej steny $DCGH$. (Úsečka KP tvorí časť rezu v spodnej podstave $ABCD$, úsečka $\overleftrightarrow{HI} \cap ADHE$ tvorí časť rezu v stene $ADHE$ a úsečka $\overleftrightarrow{HII} \cap DCGH$ tvorí časť rezu v stene $DCGH$.)

■ **2.4.7** a) Časť rezu v podstave a v stene CDV ľahko určíme využitím axiómy incidencie (Ax4). Rezy v ostatných stenách ihlana určíme využitím vety (Kon5). $\{I\} = \overleftrightarrow{KLM} \cap \overleftrightarrow{ABD} \cap \overleftrightarrow{DEV}$. Úsečka $\overleftrightarrow{MI} \cap DEV$ určuje časť rezu ihlana v stene DEV. V ďalších krokoch určenia rezu postupujeme analogicky využitím vety (Kon5).

b) Časť rezu v stene CDV určíme využitím axiómy incidencie (Ax4). Časť rezu v podstave zostrojíme využitím spoločného bodu troch rovín (rezovej roviny, roviny podstavy a roviny steny CDV). Úsečka $\overleftrightarrow{OI} \cap ABCDEF$ je zrejme časťou rezu v podstave (I je spoločným bodom spomínaných troch rovín).

c) Časť rezu v stene ABV určíme využitím axiómy incidencie (Ax4). Časť rezu v stene BCV zostrojíme využitím spoločného bodu troch rovín a to roviny rezovej, roviny ABT a roviny BCV.

d) Časť rezu v stene určuje úsečka $DY \cap ABCDEF$. Časť rezu v stene BCV zostrojíme využitím spoločného obodu troch rovín (ozn.I), rezovej roviny roviny podstavy a roviny steny ACV. Úsečka $\overleftrightarrow{IZ} \cap BCV$ určuje časť rezu v stene BCV. Pri ostatných častiac rezu ihlana postupujeme analogicky hľadaním spoločných bodov troch rovín.

■ **2.4.8** Prienikom rezovej roviny, roviny steny $EFGH$ a roviny prednej steny $ABFE$ vznikne pomocný bod I (úsečka $\overleftrightarrow{IR} \cap ABFE$ zrejme tvorí časť rezu v prednej stene kocky).

■ **2.4.9** Uvedomte si, že časť rezu na zadnej stene $DCGM$ dostaneme využitím vety (Kon2). Pomocný bod dostaneme prienikom rezovej roviny, roviny steny $ABFE$ a roviny steny $BCGF$.

■ **2.4.10** $\{I\} = \overleftrightarrow{MNP} \cap \overleftrightarrow{BCG} \cap \overleftrightarrow{ABC}$, úsečka $\overleftrightarrow{IP} \cap ABCD$ tvorí časť rezu v stene $ABCD$. Na dokončenie rezu stačí využiť vetu (Kon2) a axiómu (Ax4).

■ **2.4.11** Označme I spoločným bodom rovín rezovej, $\overleftrightarrow{A'B'C'}$ a $\overleftrightarrow{BCC'}$. Označme II spoločným bodom roviny rezovej, $\overleftrightarrow{A'B'C'}$ a $\overleftrightarrow{ABB'}$.

■ **2.4.12** Pri konštrukcii rezu treba využiť vetu (Kon4), ktorá hovorí, že ak dve roviny sú rôzne a tretia je rovnobežná s priamkou ich priesečnice, potom všetky tri priesečnice rovín sú rovnobežné (využijeme rezovú rovinu, rovinu podstavy a rovinu steny DCV).

■ **2.4.13** Využijeme vetu (Kon5) na základe ktorej spoločným bodom spodnej podstavy, rezovej roviny a roviny CDC' je bod I. Úsečka $\overleftrightarrow{IW} \cap CDD'C'$ je zrejme časťou rezu v spomínanej stene.

■ **2.4.14** Prienikom rezovej roviny, roviny podstavy a roviny steny AFV vznikne bod I, úsečka $\overleftrightarrow{MI} \cap FAV$ tvorí časť rezu v stene FAV. Na zostrojenie časti rezu v stene FEV je potrebné využiť vetu (Kon4).

■ **2.4.15** a) $\{I\} = \overleftrightarrow{KLM} \cap \overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{BCG}$, $\overleftrightarrow{KI}$ prienikom $BCGF$ zrejme vytvorí časť rezu na danej stene.

b) $\{I\} = \overleftrightarrow{XYZ} \cap \overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{BCG}$, $\overleftrightarrow{ZI}$ prienikom $BCGF$ zrejme vytvorí časť rezu na danej stene.

■ **2.4.16** Treba si uvedomiť, že v tomto príklade nemožno využiť vetu (Kon2), preto treba hľadať spoločné body troch rovín.$\{I\} = \overleftrightarrow{ABD} \cap \overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{DCC'}$, $\{II\} = \overleftrightarrow{ABD} \cap \overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{EDD'}$, analogicky postupujeme pri zostrojovaní ďalších pomocných bodov.

■ **2.4.17** $\{I\} = \overleftrightarrow{AXY} \cap \overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{FEE'}$, potom zrejme $\overleftrightarrow{XI} \cap FEE'F'$ vytvorí časť rezu v stene $FEE'F'$. Analogicky vytvárame prieniky roviny rezovej, roviny spodnej podstavy a roviny steny, na ktorej chceme vytvoriť časť rezu danou rovinou.

■ **2.4.18** $\{I\} = \overleftrightarrow{BPQ} \cap \overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{DCV}$

■ **2.4.19** Pri určovaní rezu rovinou XYH využijeme pomocný bod I, ktorý vznikne prienikom rezovej roviny XYH, roviny podstavy ABD a roviny DCG. Rez rovinou rovnobežnou s $\overleftrightarrow{XYH}$ ľahko určíme na základe kritéria (KRrr), (viď. časť 2.3).

■ **2.4.20** Uvedomte si, že bodom N prechádza priamka p rovnobežná s $\overleftrightarrow{GP}$ (veta (Kon2)), úsečka $p \cap BCGF$ tvorí časť rezu v stene $BCGF$. Prienikom rezovej roviny, roviny spodnej podstavy a roviny steny $DCGH$ dostaneme bod I (úsečka $\overleftrightarrow{NI} \cap ABCD$ tvorí časť rezu v spodnej podstave kocky).

■ **2.4.21** Využitím vety (Kon2) veďte bodom M rovnobežku p v rovine spodnej podstavy $ABCD$ s $\overleftrightarrow{AC}$, úsečka $p \cap ABCD$ tvorí časť rezu v rovine podstavy $ABCD$. Prienikom rezovej roviny, roviny spodnej podstavy a roviny steny $ADD'A'$ dostaneme bod I, úsečka $\overleftrightarrow{D'I} \cap ADD'A'$ tvorí časť rezu v spomínanej stene.

■ **2.4.22** Využitím kritéria (KRpr) rovinu α určia rôznobežky p, q, kde p je rovnobežná s $\overleftrightarrow{AC}$ a prechádza bodom Q. Potom časťou rezu v podstave je úsečka $p \cap ABCD$. Priamka q je rovnobežná s hranou DV a leží v rovine steny ADV.

■ **2.4.23** Pri určovaní rezu hranola hraničnou rovinou ABM využijeme vetu (Kon5), potom $\{I\} = \overleftrightarrow{ABM} \cap \overleftrightarrow{ABD} \cap \overleftrightarrow{CDD'}$, úsečka $\overleftrightarrow{MI} \cap CDD'C'$ tvorí časť rezu v stene $CDD'C'$. Rezom hraničnej roviny je šesťuholník. Prienikom polpriestora $ABME$ s hranolom je zadná časť hranola, do ktorej patrí vrchol E.

■ **2.4.24** Pri určovaní rezu hraničnou rovinou MNP využijeme spoločný bod troch rovín. Prienikom rezovej roviny, roviny podstavy a roviny steny DCV dostaneme bod I (úsečka $\overleftrightarrow{PI} \cap DCV$ tvorí časť rezu v stene DCV). Prienikom rezovej roviny, roviny podstavy a roviny steny ADV dostaneme bod II. Prienikom polpriestoru $MNPD$ s ihlanom je zadná časť ihlana, do ktorej patrí vrchol D.

■ **2.4.25** Pri konštrukcii rezu hraničnou rovinou $D'XY$ si uvedomte, že body X, Y patria rovine spodnej podstavy. Bod I dosteneme prienikom rezovej roviny, roviny podstavy $ABCD$ a roviny $DCC'D'$.

■ **2.4.26** Pri určovaní rezu hraničnej roviny KLM polpriestoru $KLMD$ využijeme vetu (Kon5). Bod I vznikne prienikom rezovej roviny KLM, roviny vrchnej podstavy EFG a roviny BCG. Priamka MI prienikom so stenou $BCGF$ vytvorí časť rezu v stene $BCGF$. Rezom je zrejme päťuholník. Prienikom polpriestoru $KLMD$ s kockou je spodná časť kocky, do ktorej patrí vrchol D.

2.5 Určenie rezu telesa pomocou nájdenia spoločného bodu (bodov) rezovej roviny s rovinou podstavy telesa.

Vo výsledkoch a návodoch na riešenie nasledujúcich úloh sme sa zamerali hlavne na poukázanie postupu nájdenia druhúho spoločného bodu rezovej roviny a roviny podstavy. Ďalší postup rezu telesa sme vo väčšine úloh neuvádzali. Postačuje využitie axiómy incidencie (Ax4) a viet (Kon2), (Kon4), (Kon5), a tiež kritéria rovnobežnosti (KRpr) a (KRrr).

■ **2.5.1** Riešený príklad.

■ **2.5.2** Priesečník priamky NP a roviny spodnej podstavy je spoločný bod rezovej roviny a roviny podstavy. Priamka určená bodmi M a priesečníkom patrí do roviny spodnej podstavy.

■ **2.5.3** Aby sme našli druhý spoločný bod roviny podstavy a rezovej roviny, vytvoríme prienik priamky NP s rovinou podstavy $ABCD$ ($\overleftrightarrow{NP} \cap \overleftrightarrow{N'C} = \{I\}$, ak N' je kolmý priemet bodu N na rovinu podstavy a bod C je kolmý priemet bodu P na rovinu podstavy). Úsečka $\overleftrightarrow{MI} \cap ABCD$ je zrejme časťou rezu v spodnej podstave kocky.

■ **2.5.4** $\overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \{I\}$, body Z a I sú spoločnými bodmi roviny podstavy a rezovej roviny, potom zrejme úsečka $\overleftrightarrow{ZI} \cap ABCD$ tvorí časť rezu v spodnej podstave telesa.

■ **2.5.5** Priesečník priamky MK s rovinou podstavy je druhý spoločný bod rezovej roviny a roviny podstavy. Ak A, D sú priemety bodov M, K v poradí do roviny podstavy tak hľadaný bod vznikne prienikmi $\overleftrightarrow{MK} \cap \overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{MK} \cap \overleftrightarrow{ABC}$. Priamka určená vzniknutým bodom a bodom N prienikom steny podstavy určuje časť rezu v spomínanej stene.

■ **2.5.6** Druhým spoločným bodom rezovej roviny a roviny podstavy okrem bodu P je bod, ktorý vznikne prienikom $\overleftrightarrow{MN} \cap ABC = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{M'A}$, kde M' je kolmý priemet na rovinu podstavy bodu M a bod A je kolmý priemet bodu N.

■ **2.5.7** Uvedomte si, že priesečníkom $\overleftrightarrow{LM}$ a $\overleftrightarrow{ABC}$ je spoločný bod rezovej roviny a roviny podstavy. Druhým priesečníkom je bod L. Priamka určená týmito dvoma bodmi prienikom so spodnou podstavou zrejme určí časť rezu v stene podstavy kvádra.

■ **2.5.8** Druhým spoločným bodom roviny podstavy a rezovej roviny je priesečník priamky MP s rovinou ABC ($\overleftrightarrow{MP} \cap M'C = \{I\}$, kde M' je kolmý priemet bodu M do roviny podstavy a bod C je kolmý priemet bodu P do roviny podstavy).

■ **2.5.9** a) Prienikom priamky MN s rovinou spodnej podstavy dostaneme druhý spoločný bod roviny podstavy a rezovej roviny (označme ho napr. I). Úsečka $\overleftrightarrow{LI} \cap ABCD$ tvorí časť rezu v podstave kocky $ABCD$.

b) Druhým spoločným bodom roviny podstavy a rezovej roviny je bod II, ktorý vznikne prienikom $\overleftrightarrow{NL} \cap ABC = \overleftrightarrow{NL} \cap \overleftrightarrow{N'C}$, kde N' je kolmý priemet bodu N do roviny podstavy a bod C je kolmý priemet bodu L do roviny podstavy telesa. Úsečka $\overleftrightarrow{KII} \cap ABCD$ tvorí rez spodnej podstavy kocky.

■ **2.5.10** Treba si uvedomiť, že body L, M patria rovine prednej steny. Je potrebné nájsť ešte jeden spoločný bod roviny podstavy a rezovej roviny ($\{I\} = \overleftrightarrow{LM} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{LM} \cap \overleftrightarrow{AB}$).

■ **2.5.11** a) Priesečníkom priamky YZ s rovinou podstavy je druhý spoločný bod rezovej roviny a roviny podstavy. Ak Y', D označíme ako kolmé priemety bodov Y, Z v poradí do roviny podstavy, tak hľadaný bod vznikne prienikmi $\overleftrightarrow{YZ} \cap Y'D = \overleftrightarrow{YZ} \cap \overleftrightarrow{ABC}$.

b) Priesečníkom priamky SQ s rovinou podstavy dostaneme druhý spoločný bod rezovej roviny a roviny podstavy. Kolmé priemety bodov S, Q v tomto poradí sú body A, Q' na dolnú podstavu. Potom prienikom priamky SQ s priamkou AQ' dosteneme prienik priamky SQ a roviny ABC.

c) Priesečník $\overleftrightarrow{MN} \cap ABC$ je druhým spoločným bodom rezovej roviny a roviny podstavy spolu s bodom L. Priamka určená týmito bodmi prienikom so spodnou podstavou určuje časť rezu v spodnej podstave kocky.

■ **2.5.12** V oboch prípadoch je potrebné zostrojiť druhý spoločný bod roviny rezovej a roviny podstavy. Nech je ním bod I, ktorý vznikne prienikom priamky QR s rovinou podstavy $ABCD$. Priamka PI patrí rovine podstavy kocky.

■ **2.5.13** Druhým spoločným bodom roviny podstavy a rezovej roviny je okrem bodu V bod I, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{WU} \cap ABCD$. Zrejme úsečka $\overleftrightarrow{IV} \cap ABCD$ tvorí časť rezu spodnej podstavy $ABCD$.

■ **2.5.14** Spoločným bodom rezovej roviny a roviny podstavy okrem bodu P je bod I, ktorý vznikne ako priesečník priamky PQ s rovinou ABC ($\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AQ'} = \{I\}$). Úsečka $\overleftrightarrow{PI} \cap ABC$ zrejme vytvorí rez podstavy ihlana.

2.6 Určenie rezu telesa využitím osovej afinity

V úlohách na využitie osovej afinity pri konštrukcii rezov sme v riešeniach uvádzali príslušné afinity. Ďalší postup pri zostrojovaní rezov je analogický ako v predchádzajúcich kapitolách, tj. využijú sa axiómy incidencie (Ax4), vety (Kon2), (Kon4),(Kon5), a tiež kritéria rovnobežnosti (KRpr) a (KRrr).

■ **2.6.1** Riešený príklad.

■ **2.6.2** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; Y, B)$, kde $o = \overleftrightarrow{DI}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X'B}$, kde $\mathcal{A}(X) = X'$.

■ **2.6.3** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; X, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{ZI}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{AY'}$, kde $\mathcal{A}(Y) = Y'$.

■ **2.6.4** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; U, A)$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{VW} \cap \overleftrightarrow{V'W'}$, kde $\mathcal{A}(V) = V'$ a $\mathcal{A}(W) = W'$ a $\{II\} = \overleftrightarrow{UV} \cap \overleftrightarrow{AV'}$.

■ **2.6.5** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; K, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{AE}$ a $\{II\} = \overleftrightarrow{LM} \cap \overleftrightarrow{EC}$.

■ **2.6.6** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; G, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{SI}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{GS} \cap \overleftrightarrow{AS'}$, kde $\mathcal{A}(S) = S'$.

■ **2.6.7** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; Y, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{F'Y} \cap \overleftrightarrow{FA}$ a $\{II\} = \overleftrightarrow{F'Z} \cap \overleftrightarrow{FC}$.

■ **2.6.8** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; M, D)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{DC}$ a $\{II\} = \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{AC}$.

■ **2.6.9** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; P, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{AR'}$, $\mathcal{A}(R) = R'$, $\{II\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AQ'}$, kde $\mathcal{A}(Q) = Q'$.

■ **2.6.10** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; P, E)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{ER'}$, $\mathcal{A}(R) = R'$, $\{II\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AQ'}$, kde $\mathcal{A}(Q) = Q'$.

■ **2.6.11** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; L, B)$, osou afinity je priamka $I.II$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{M'N'}$, $\{II\} = \overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{M'B}$, kde $\mathcal{A}(N) = N'$ a $\mathcal{A}(M) = M'$.

■ **2.6.12** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; K, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{AL'}$, kde $\mathcal{A}(L) = L'$, $\{II\} = \overleftrightarrow{KM} \cap \overleftrightarrow{AC}$.

■ **2.6.13** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; K, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{CI}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{AE}$. Vrcholy podstavy odpovedajú v danej afinite bodom rezu na bočných stenách.

■ **2.6.14** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; R, C)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{QP} \cap \overleftrightarrow{Q'P'}$, ($\mathcal{A}(Q) = Q'$, $\mathcal{A}(P) = P'$), $\{II\} = \overleftrightarrow{RP} \cap \overleftrightarrow{CP'}$. Vrcholom podstavy odpovedajú v danej afinite body rezu na bočných stenách.

■ **2.6.15** Treba si uvedomiť, že priamka PQ patrí rovine spodnej podstavy a teda je aj osou afinity. Každý bod, ktorý patrí priamke PQ je samodružný. Vrcholom podstavy odpovedajú v danej afinite body rezu na bočných stenách.

■ **2.6.16** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; W, D)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{UV} \cap \overleftrightarrow{AB}$, $\{II\} = \overleftrightarrow{UW} \cap \overleftrightarrow{AD}$.

■ **2.6.17** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; V, C)$, kde $o = \overleftrightarrow{UI_\infty}$, $\{I_\infty\} = \overleftrightarrow{WV} \cap \overleftrightarrow{W'C}$, kde $\mathcal{A}(W) = W'$.

■ **2.6.18** Využijeme afinitu $\mathcal{A}(o; U, U')$, $\mathcal{A}(U) = U'$, $\mathcal{A}(W) = W'$, $\mathcal{A}(V) = V'$. Osou afinity je priamka $I.II$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{WV} \cap \overleftrightarrow{W'V'}$, $\{II\} = \overleftrightarrow{UV} \cap \overleftrightarrow{U'V'}$. Vrcholom podstavy odpovedajú v danej afinite body rezu na bočných stenách.

■ **2.6.19** Treba si uvedomiť, že medzi dolnou podstavou a rezom telesa existuje afinný vzťah. Osou afinity je priesečnica roviny podstavy a roviny rezu. Smerom afinity je smer bočných hrán.

2.7 Určenie rezu telesa využitím perspektívnej kolineácie

V úlohách na využitie perspektívnej kolineácie sme rovnako ako pri kapitole venovanej osovej afinite uvádzali väčšinou len príslušné kolineácie. Ďalší postup pri zostrojovaní rezov je analogický ako v predchádzajúcich kapitolách, tj. využijú sa axiómy incidencie (Ax4), vety (Kon2), (Kon4), (Kon5), a tiež kritéria rovnobežnosti (KRpr) a (KRrr).

- **2.7.1** Riešený príklad.
- **2.7.2** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; T, C)$, kde $o = \overleftrightarrow{PQ}$ (body P a Q sú samodružné preto ležia na osi kolineácie).
- **2.7.3** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; A, F)$, kde $o = \overleftrightarrow{EI_\infty}$, kde $\{I_\infty\} = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{FG}$, (zrejme $o = \overleftrightarrow{BC}$).
- **2.7.4** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; M, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{AB}$, $\{II\} = \overleftrightarrow{PN} \cap \overleftrightarrow{CD}$. Vrcholom podstavy odpovedajú v danej kolineácii body rezu na bočných stenách.
- **2.7.5** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; P, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{RP} \cap \overleftrightarrow{DA}$, $\{II\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AB}$. Úsečka $o \cap ABCD$ tvorí časť rezu v podstave telesa.
- **2.7.6** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; A', A)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{AB}$, $\{II\} = \overleftrightarrow{A'D'} \cap \overleftrightarrow{AD}$.
- **2.7.7** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; M, A)$, $o = \overleftrightarrow{NI}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{MK} \cap \overleftrightarrow{AD}$.
- **2.7.8** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; P, K)$, kde $o = \overleftrightarrow{QI_\infty}$, $\{I_\infty\} = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{KM}$.
- **2.7.9** Uvedomte si, že zadaná priamka je osou kolineácie teda každý bod priamky je samodružný, stredom kolineácie je vrchol V ihlana. Vrcholom podstavy v danej kolineácii odpovedajú body rezu na bočných stenách.
- **2.7.10** Stredom kolineácie je hlavný vrchol V ihlanu a osou je priamka $o = \overleftrightarrow{RI}$, kde $I \in \overleftrightarrow{AC} \cap PR$.
- **2.7.11** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; Q, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{IP}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{QR} \cap \overleftrightarrow{AC}$.
- **2.7.12** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; A, K)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{M'B}$, $\mathcal{K}(M) = M'$, $\{II\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{KL}$.
- **2.7.13** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; P, A)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AV_1}$, $\{II\} = \overleftrightarrow{QR} \cap \overleftrightarrow{V_1C}$.
- **2.7.14** Stredom kolineácie vrcov V a M je jej samodružný bod, treba nájsť najprv odpovedajúce body k bodom L, M a potom určia os kolineácie.
- **2.7.15** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V; o; M, C)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{NP} \cap \overleftrightarrow{DP'}$ a $\{II\} = \overleftrightarrow{MP} \cap \overleftrightarrow{CP'}$, kde $\mathcal{K}(P) = P'$ a $\mathcal{K}(N) = D$.

■ **2.7.16** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V;o;P,A)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AQ'}$, $\mathcal{K}(Q) = Q'$, $\{II\} = \overleftrightarrow{RQ} \cap \overleftrightarrow{R'Q'}$, kde $\mathcal{K}(R) = R'$.

■ **2.7.17** a)Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V;o;P,A)$, kde $o = \overleftrightarrow{QI}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{AD}$.

b) Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V;o;Q,C)$, kde $o = \overleftrightarrow{PI}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{RQ} \cap \overleftrightarrow{R'C}$, $\mathcal{K}(R) = R'$ (bod P je samodružným bodom v kolineácii $\mathcal{K}$).

c) Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V;o;R,E)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{EP'}$, $\mathcal{K}(P) = P'$, $\{II\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{P'Q'}$, kde $\mathcal{K}(Q) = Q'$.

■ **2.7.18** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V;o;K,A)$, treba si uvedomiť, že priamka p je osou kolineácie. Vrcholom podstavy odpovedajú body rezu na bočných stenách.

■ **2.7.19** Využijeme kolineáciu $\mathcal{K}(V;o;K,D)$. Treba si uvedomiť, že $o = p$ a stredom kolineácie je vrchol V ihlana. Na zostrojenie rezu v stene ABV je potrebné využiť vetu (Kon4).

3 PRIESEČNICA DVOCH ROVÍN

V úlohách určíme najskôr rezy telesa obidvoma rovinami, ktorých priesečnice hľadáme, a potom nájdeme dva rôzne body, ktoré ležia v obidvoch rovinách. Hľadaná priesečnica je určená týmito dvoma bodmi.

V príkladoch 3.1 - 3.6 určíme rezy rovín, ktorých priesečnicu hľadáme, pomocou axiómi (Ax4), (viď. časť 2.1).

■ **3.1** Riešený príklad.

■ **3.2** Rezmi rovín sú trojuholníky EBD a DBG. Priesečnicou týchto dvoch rovín je priamka DB.

■ **3.3** Rezmi rovín sú trojuholníky ACH a EDG a priesečnicou rovín je primka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AH} \cap \overleftrightarrow{ED}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{HC} \cap \overleftrightarrow{DG}$.

■ **3.4** Rezmi rovín sú trojuholníky ACB' a $A'BC$. Priesečnicou rovín je primka XC, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$.

■ **3.5** Rezmi rovín sú trojuholníky ACV a VLK. Priesečnica týchto dvoch rovín je priamka XV, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{KL}$.

■ **3.6** Treba si všimnúť, že rezmi rovín sú dva trojuholníky ACV a DBN, teda priesečnicou týchto dvoch rovín bude priamka NX, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{DB}$ v podsteve ihlana.

V príkladoch 3.7 - 3.16 určíme rezy rovín, ktorých priesečnicu hľadáme, pomocou axiómy incidencie (Ax4) a vety o rovnobežnosti dvoch rovín (Kon2), (viď časť 2.2).

■ **3.7** a) Rezom roviny ACG je rovnobežník $ACGE$ a rezom roviny AFH je trojuholník AFH. Priesečnicou rovín je priamka XA, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{EG} \cap \overleftrightarrow{HF}$.

b) Rezom rovín sú trojuholníky ACF a BEG, ich priesečnicou je priamka YZ, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{EF}$, $\{Z\} = \overleftrightarrow{FC} \cap \overleftrightarrow{BG}$.

c) Rezom roviny BCG je štvorec a rezom roviny AEO je rovnobežník. Prienikom týchto dvoch rovín je priamka SQ, kde $(FGS) = (BCQ) = -1$.

d) Rezom roviny ABH je rovnobežník $ABGH$ a rezom roviny CDH je štvorec $DCGH$. Priesečnicou roviny je priamka GH.

■ **3.8** a) Rezmi rovín sú štvorec $ABCD$ a rovnobežník $ABGH$. Priesečnicou rovín je priamka AB.

b) Rezmi rovín sú rovnobežník $ACGE$ a rovnobežník $ABGH$. Priesečnicou rovín je priamka GA.

■ **3.9** Rezmi rovín sú rovnobežníky $ABGH$ a $EFCD$. Priesečnicou rovín α, β je priamka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AH} \cap \overleftrightarrow{ED}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{BG} \cap \overleftrightarrow{FC}$.

■ **3.10** Rezmi rovín sú rovnobežníky $EMCN$ a $DP1H$, kde $(FG1) = -1$. $\{X\} = \overleftrightarrow{H1} \cap \overleftrightarrow{EM}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{DP} \cap \overleftrightarrow{NC}$.

■ **3.11** a) Rezmi rovín sú štvoruholník a rovnobežník. Priesečnicu tvorí priamka určená bodmi X, Y, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{EG} \cap \overleftrightarrow{HF}$ a Y vznikne prienikom priamok daných rovín v spodnej podstave kocky.

b) Rezmi sú rovnobežník a štvoruholník. Priesečníkom je priamka $H2$, kde bod 2 vznikne prienikom priamok dvoch rovín na prednej stene $ABFE$.

c) Rezom roviny ABC je štvorec $ABCD$ a rezom roviny FHS je trojuholník FSH. Priesečnicou je priamka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{SF} \cap \overleftrightarrow{AB}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{HS} \cap \overleftrightarrow{AD}$.

d) Rezmi rovín sú rovnobežníky, priesečnicou je priamka SC.

■ **3.12** Rezmi rovín sú rovnobežníky, priesečnicou rovín je priamka $S'B$.

■ **3.13** Rezmi rovín sú rovnobežníky $ADHX$, $BCHX$, kde $(HGX) = -1$. Priesečnicou je priamka MX.

■ **3.14** Rezmi rovín sú dva rovnobežníky, potom hľadanou priesečnicou je priamka $P1$, kde bod 1 je spoločným bodom rezových rovín na hrane EH.

■ **3.15** a) Rezmi rovín sú rovnobežníky $DBFH$ a $ACGE$, potom hľadanou priesečnicou je priamka XY, kde body X, Y sú stredy hornej a dolnej podstavy kocky v tomto poradí.

b) Rezmi rovín sú trojuholník EGB a rovnobežník $DBFH$. Priesečnicou rovín je priamka XB, kde X je stredom vrchnej podstavy kocky.

c) Rezmi rovín sú trojuholník a štvoruholník, $\overleftrightarrow{ESB} \cap \overleftrightarrow{DFQ} = \overleftrightarrow{XY}$, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{EB} \cap \overleftrightarrow{XF}$, $(EAX) = -1$, $\{Y\} = \overleftrightarrow{GB} \cap \overleftrightarrow{FQ}$.

d) Rezmi rovín sú štvoruholníky, priesečnicou je priamka XQ, kde pre X platí $(EXA) = 2$.

■ **3.16** Treba si uvedomiť, že určujúce body priesečnice sa môžu nachádzať aj mimo telesa. Priesečnicou rovín je priamka $A'X$, kde $\mu(DD'X)$.

V príkladoch 3.17 a 3.18 určíme rezy rovín, ktorých priesečnicu hľadáme, pomocou prieniku troch rovín (viď časť 2.4).

■ **3.17** Rezmi rovín sú štvoruholník $ABN2$, kde $(DV2) = -1$ a štvoruholník $DCM1$, kde $(AV1) = -1$. Priesečnicou rovín je priamka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AN} \cap \overleftrightarrow{CM}$ a bod Y vznikne prienikom časti rezu rovín na bočnej stene ADV.

■ **3.18** a) Rezmi rovín sú dva trojuholníky ADV a BCV. Treba si uvedomiť, že priesečnicou dvoch rovín je priamka p, ktorá prechádza bodom V a je rovnobežná s hranou BC.

b) Rezmi sú trojuholník BDV a štvoruholník $KLS1$, kde $1K$ je časť rezu v stene ADV. Priesečnicou je priamka $1X$, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{KL}$.

c) Rezmi rovín sú štavorec a päťuholník, prienikom rovín je priamka 23, kde úsečka 23 je časť rezu rovinou SNO v podstave.

d) Rezmi rovín sú trojuholník BCV a štvoruholník, priesečnicou je priamka CZ, kde Z vznikne prienikom priamok RN a BV.

■ **3.19** Pri konštrukcii rezov využijeme axiómu incidencie (Ax4) a vetu o rovnobežnosti dvoch rovín (Kon2).

a) Rezmi rovín sú trojuholník ACH a rovnobežník $KLM1$, kde $L1$ je časť rezu v stene $BCGH$. Treba si uvedomiť, že priesečnicou daných rovín je priamka $p = \overleftrightarrow{I\,II}$, ktorá je rovnobežná s $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{KL}$.

b) Rezmi rovín sú trojuholník $AS'S''$ a rovnobežník $DCS'''S''$. Priesečnicu rovín tvorí priamka $S''I$, kde $\{I\} = \overleftrightarrow{AS'} \cap \overleftrightarrow{CS'''}$.

4 PRIESEČNÍK PRIAMKY A ROVINY

V úlohách určíme najskôr rez telesa rovinou, s ktorou chceme vytvoriť prienik s priamkou. Často v úlohách využívame pomocnú rovinu, ktorú preložíme zadanou priamkou a hľadáme priesečnicu týchto dvoch rovín. Prienik priesečnice a zadanej priamky je hľadaný prienik priamky s rovinou.

V príkladoch 4.2 - 4.20 určíme rez roviny pomocou axiómy (Ax4), (viď. časť 2.1).

■ **4.1** Riešený príklad.

■ **4.2** Rezom roviny ABC je štvorec $ABCD$ uvedomte si, že prienikom priamky EL a roviny ABC je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{EL} \cap p$, kde p je priesečnica roviny ABC a ε je rovina preložená priamkou EL, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{ABF}$).

■ **4.3** Rezom roviny hornej podstavy kocky je štvorec $EFGH$. Priesečník priamky MN a roviny hornej podstavy kocky je bod X, pričom $\{X\} = \overleftrightarrow{MN} \cap p$, kde p je priesečnica roviny EFG s rovinou ε, ktorú preložíme priamkou MN, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{ABG}$).

Rezom roviny ADH je štvorec $ADHE$ priesečník priamky MN s rovinou ADH je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{MN} \cap q$, kde q je priesečnica roviny ADH s rovinou ε.

■ **4.4** Rezom roviny ACH je trojuholník ACH. Priesečnicou priamky DF s rovinou ACH je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{DF} \cap p$, kde p je priesečnica roviny ACH a ε, kde ε je rovina, ktorá prechádza priamkou DF, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{DBF}$).

■ **4.5** Rezom roviny HPB je štvoruholník $EBCH$.

a) Priesečník priamky EG s rovinou HPB je bod E.

b) Priesečníkom priamky AC a roviny HPB je bod C.

c) Priesečníkom priamky AG a roviny HPB je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AG} \cap p$, kde p je priesečnica roviny HPB a roviny ε, ktorú možno preložiť priamkou AG, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{ACG}$).

■ **4.6** Rezom roviny BDH je rovnobežník $DBFH$.

a) Priesečnicou $\overleftrightarrow{EG}$ a $\overleftrightarrow{BDF}$ je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{EG} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{BDH} \cap \varepsilon$, kde ε je rovina, preložená priamkou EG, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{EBC}$).

b) Priesečnicou $\overleftrightarrow{EC}$ a $\overleftrightarrow{BDH}$ je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{EC} \cap q$, kde $q = \overleftrightarrow{BDH} \cap \delta$, kde δ je rovina, preložená priamkou EC, (napr. $\delta = \overleftrightarrow{EBC}$).

■ **4.7** Rezom roviny BHP je rovnobežník $BHP1$, kde $B1$ je časťou rezu kocky v stene $BCGF$. Priesečníkom priamky FC a roviny BHP je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{FC} \cap p$, kde p je priesečnica rovín BHP a ε, kde ε je rovina, preložená priamkou FC, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{BCG}$).

■ **4.8** a) Rezom roviny ABC je štvorec $ABCD$. Priesečník priamky HL a roviny ABC je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{HL} \cap p$, kde p je priesečnica rovín ABC a ε, kde ε je rovina, preložená priamkou HL, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{HBL}$).

b) Rezom roviny ACG je rovnobežník $ACGE$. Priesečníkom priamky HL a roviny ACG je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{HL} \cap q$, kde q je priesečnica rovín ACG a HBL.

■ **4.9** Rezom roviny BEG je trojuholník EBG. Ako pomocnú rovinu, ktorá obsahuje priamku DF si zvoľme napríklad $\overleftrightarrow{HBL}$. Priesečníkom priamky DF a roviny BEG je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{DF} \cap (\overleftrightarrow{BEG} \cap \overleftrightarrow{DBF})$.

■ **4.10** Rezom roviny BHP je obdĺžnik $PB1H$, kde $1H$ je časť rezu v stene $BCGF$.

a) Priamka AF patrí rovine prednej steny $ABFE$. Priesečník priamky AF a roviny BHP je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AF} \cap (\overleftrightarrow{BHP} \cap \overleftrightarrow{ABF})$.

b) Priamkou DF možno preložiť rovinu ε, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{BBF}$). Priesečník priamky DF a roviny BHP je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{DF} \cap (\overleftrightarrow{BHP} \cap \varepsilon)$.

c) Priesečník priamky AK a roviny BHP je bod Z, kde $\{Z\} = \overleftrightarrow{AK} \cap (\overleftrightarrow{BHP} \cap \delta)$, kde δ je rovina preložená priamkou AK, (napr. $\delta = \overleftrightarrow{AFH}$).

■ **4.11** Rezom roviny ACV je trojuholník ACV. Priesečníkom priamky BP a roviny

ACV je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{BP} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{ACV} \cap \varepsilon$, kde ε je preložená rovina priamkou BP, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{DBV}$).

■ **4.12** a) Rezom roviny ADD' je obdĺžnik $ADD'A'$. Priesečník priamky BE a roviny ADD' je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{BE} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{ADD'} \cap \varepsilon$, kde ε je rovina preložená priamkou BE, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{DCE}$).

b) Rezom roviny ACC' je štvoruholník $ACC'A'$. Priesečník priamky BE a roviny ACC' je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{BE} \cap q$, kde $q = \overleftrightarrow{ACC'} \cap \varepsilon$.

■ **4.13** Rezom roviny ACD je štvorec $ABCD$. Priesečníkom priamky EF a roviny ACD je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{EF} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{ACD} \cap \varepsilon$, kde ε je rovina preložená priamkou EF, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{EFV}$).

■ **4.14** a) Priesečníkom priamky PQ a roviny ACV je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap p$, kde p je priesečnica $\overleftrightarrow{ACV}$ a ε, kde ε je preložená rovina priamkou PQ, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{DVQ}$).

b) Priesečníkom priamky PQ a roviny BCV je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap q$, kde q je priesečnica $\overleftrightarrow{BCV}$ a ε.

■ **4.15** Priamkou treba preložiť správne rovinu ε, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{ADD'}$) a treba skúmať, či majú roviny stien s priamkou neprázdny priesečník. Pri prieniku s rovinou $CC'B$ skúste dokázať, že $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BCC'}$ (využite KRpr).

■ **4.16** a) Treba si uvedomiť, že prieniky priamky a stien ihlanu môžu ležať len na stenách telesa. Neprázdne prieniky majú steny ADV a BCV. Priamkou MP možno preložiť rovinu MPV. $ADV \cap \overleftrightarrow{MPV} = p$, kde $p \cap \overleftrightarrow{MP} = \{X\}$ a $BCV \cap \overleftrightarrow{MPV} = q$, kde $q \cap \overleftrightarrow{MP} = \{Y\}$.

b) Tu si treba uvedomiť to, že ide o prieniky priamky s rovinami stien ihlana. $\overleftrightarrow{MP} \cap \overleftrightarrow{ADV} = \{X\}$, $\overleftrightarrow{MP} \cap \overleftrightarrow{BCV} = \{Y\}$, $\overleftrightarrow{MNV} \cap \overleftrightarrow{ABC} = t$, kde $t \cap \overleftrightarrow{MN} = \{M\}$, $\overleftrightarrow{MNV} \cap \overleftrightarrow{DCV} = s$, kde $s \cap \overleftrightarrow{MN} = \{Z\}$.

■ **4.17** Rezom roviny je trojuholník MBC. Priesečník priamky DN a roviny MBC je bod X, pričom $\{X\} = \overleftrightarrow{DN} \cap p$, kde p je priesečnica roviny MBC s rovinou ε, ktorá prechádza priamkou DN, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{AND}$).

■ **4.18** Rezom roviny ABC je podstava ihlana $ABCD$. Prienikom priamky EF s rovinou ABC je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{EF} \cap q$, kde $q = \overleftrightarrow{ABC} \cap \varepsilon$, kde ε je rovina ktorou prechádza priamka EF, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{EFV}$).

■ **4.19** a) Rezom roviny BCV je trojuholník BCV. Priamkou AW treba preložiť rovinu

ε, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{AWV}$). $\overleftrightarrow{AW} \cap (\overleftrightarrow{BCV} \cap \varepsilon = \{X\}$.

b) Rezom roviny BCD je štvorec $ABCD$. Priesečníkom priamky UW a roviny BCD je bod B (priamku UW možno preložiť rovinou ABV).

c) Rezom roviny BDV je trojuholník DBV. Priesečníkom priamky AR a roviny BDV je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AC} \cap (\overleftrightarrow{BDV} \cap \delta)$, kde δ je rovina preložená priamkou AR, (napr. $\delta = \overleftrightarrow{ACV}$).

d) Rezom roviny ACW je trojuholník ACW. Priesečníkom priamky DV a $\overleftrightarrow{ACW}$ je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{DV} \cap q$, kde $q = \overleftrightarrow{ACW} \cap \omega$ a ω je rovina preložená priamkou DV, (napr. $\omega = \overleftrightarrow{BDV}$).

e) Rezom roviny BDU je trojuholník BDU. Priesečník priamky CR a roviny BDU je bod V.

■ **4.20** Rezom roviny KLV je trojuholník VLK. Priesečnicou $\overleftrightarrow{KLV}$ a ε, kde ε je rovina preložená priamkou CS, je priamka p. Priesečnica priamky CS a roviny KLV je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{CS} \cap p$.

V úlohách 4.21 - 4.28 určíme rez roviny, ktorej priesečnicu s priamkou hľadáme, pomocou axiómy incidencie (Ax4) a vety o rovnobežnoti dvoch rovín (Kon2),(viď. časť 2.2).

■ **4.21** Rezom roviny BVR je rovnobežník $VBRH$. Treba si uvedomiť polohu priamky HV vzhľadom na rovinu BVR. $\overleftrightarrow{HV} \cap \overleftrightarrow{BVR} = \overleftrightarrow{HV}$.

■ **4.22** Rezom roviny EDB je trojuholník DBE. Priesečníkom priamky AG a roviny EDB je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AK} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{EDB} \cap \varepsilon$, kde ε je rovina preložená priamkou AG, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{ACG}$).

■ **4.23** a) Rezom roviny MNG je rovnobežník $MANG$. Priamkou DF treba preložiť rovinu ε, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{DAF}$). Priesečníkom priamky DF a roviny MNG je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{DF} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{DAF} \cap \overleftrightarrow{MNG}$.

b) Rezom roviny CGE je rovnobežník $ACGE$. Priamkou HB preložte rovinu δ, (napr. $\delta = \overleftrightarrow{HCB}$), kde priesečníkom priamky HB a roviny CGE je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{HB} \cap q$, kde $q = \overleftrightarrow{CGE} \cap \overleftrightarrow{HCB}$.

■ **4.24** Priamkou PQ možno preložiť rovinu ε, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{APQ}$).

a) Rezom roviny ABG je rovnobežník $ABGH$. Priesečník $\overleftrightarrow{PQ}$ a $\overleftrightarrow{ABG}$ je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap (\overleftrightarrow{ABG} \cap \overleftrightarrow{ACG})$.

b) Rezom roviny CDH je štvoruholník $DCGH$. Priesečníkom $\overleftrightarrow{PQ}$ a $\overleftrightarrow{CDH}$ je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap (\overleftrightarrow{CDH} \cap \overleftrightarrow{ACG})$.

■ **4.25** a) Rezom roviny BCE je rovnobežník $BCHE$. Rovinou ε je rovina preložená priamkou IJ. $\overleftrightarrow{IJ} \cap (\overleftrightarrow{BCE} \cap \varepsilon) = \{X\}$, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{ACG}$).

b) Rezom roviny KLM je štvoruholník $KLM1$, kde úsečka $M1$ je časťou rezu v prednej stene kocky. Priesečníkom priamky FD a roviny KLM je bod Y, kde $\{Y\} = \overleftrightarrow{FD} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{KLM} \cap \delta$, kde δ je rovina preložená priamkou FD, (napr. $\delta = \overleftrightarrow{DBF}$).

c) Rezom roviny ANO je štvoruholník. Priesečníkom priamky EC a roviny ANO je bod Z, kde $\{Z\} = \overleftrightarrow{EC} \cap t$, kde $t = \overleftrightarrow{ANO} \cap \omega$, kde ω je rovina preložená priamkou EC, (napr. $\omega = \overleftrightarrow{EBC}$).

■ **4.26** Rezom roviny ABC je štvorec $ABCD$. Prienikom priamky MN a roviny ABC je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{MN} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{ABC} \cap \varepsilon$, kde ε je rovina preložená priamkou MN, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{NEM}$).

■ **4.27** Priamku MN možno preložiť rovinou MNP. Priesečníky priamky MN so stenami telesa sú: $\overleftrightarrow{MN} \cap DCC'D' = \{X\}$, kde $X = \overleftrightarrow{MN} \cap (\overleftrightarrow{DCC'} \cap \overleftrightarrow{MNP})$
$\overleftrightarrow{MN} \cap A'B'C'D' = \{Y\}$, kde $Y = \overleftrightarrow{MN} \cap (\overleftrightarrow{A'B'C'D'} \cap \overleftrightarrow{MNP})$. Ostatné prieniky so stenami hranola sú prázdne množiny.

■ **4.28** Treba si uvedomiť, že priamku $p \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ možno preložiť rovinou $AC'M$, ktorej rezom je rovnobežník $AMC'1$, kde $A1$ je časť rezu v stene $ADD'A'$. Priesečnik priamky p s rovinou ABB' je bod X, kde $\{X\} = p \cap q$, kde q je priesečník $\overleftrightarrow{ABB'}$ a $\overleftrightarrow{AC'M}$.

Priesečník priamky p s rovinou DCC' je bod Y, kde $\{Y\} = p \cap t$, kde $t = \overleftrightarrow{DCC'} \cap \overleftrightarrow{AC'M}$.

V príklade 4.29 určíme rez roviny pomocou kritérii rovnobežnosti (KRpr) a (KRrr) (viď. podkapitola 2.3).

■ **4.29** Ako prvé treba nájsť rovinu α, ktorá prechádza bodom p a je rovnobežná s priamkou ABC. Možno využiť kritérium rovnobežnosti dvoch rovín *(KRrr)*. Priesečníkom priamky DN a roviny α je bod X kde $X = \overleftrightarrow{DN} \cap (\alpha \cap \varepsilon)$, kde ε je rovina preložená priamkou DN, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{ADN}$).

V príkladoch 4.30 - 4.33 určíme rez roviny pomocou prieniku troch rovín využitím viet (Kon4) a (Kon5), (viď. časť 2.4).

■ **4.30** Rezom roviny MNP je štvoruholník. Pomôžeme si, ak priamku vhodne preložíme rovinou DQR. Priesečník priamky a roviny dostaneme, ak spravíme prienik priesečnice rovín MNP a DQR a priamky PQ.

■ **4.31** Treba si uvedomiť, akú vzájomnú polohu majú priamka TV a rovina PQR, potom $\overleftrightarrow{TV} \cap \overleftrightarrow{PQR} = \overleftrightarrow{VT}$.

■ **4.32** a) Rezom roviny FGD je štvoruholník. Priamkou VE môžme preložiť rovinu ε, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{KLV}$). Priesečnicou priamky VE a roviny FGD je X, kde $X = \overleftrightarrow{VE} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{KLV} \cap \overleftrightarrow{FGD}$.

b) Rezom roviny AIG je päťuholník. $\overleftrightarrow{VH} \cap \overleftrightarrow{AIG} = \{X\}$. ($\{X\} = \overleftrightarrow{VH} \cap p$, kde $p = \overleftrightarrow{AIG} \cap \varepsilon$, kde ε je rovina preložená priamkou VH, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{DBV}$)).

c) Rezom roviny NOP je päťuholník. $\overleftrightarrow{CJ} \cap \overleftrightarrow{NOP} = \{Y\}$ ($\{Y\}\overleftrightarrow{CJ} \cap (\overleftrightarrow{NOP} \cap \varepsilon)$, kde ε je rovina preložená priamkou CJ, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{ACV}$)).

d) Rezom roviny KST je päťuholník. Priamkou BV možno preložiť rovinu BCV. Priesečník priamky BV a roviny KST je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{BV} \cap (\overleftrightarrow{BCV} \cap \overleftrightarrow{KST})$.

e) Rezom $\overleftrightarrow{FJU}$ je štvoruholník $FU1J$, kde IJ je časť rezu v stene ADV. Priamku VI možno preložiť rovinou BCV, $\overleftrightarrow{FJ} \parallel \overleftrightarrow{BV}$ a $\overleftrightarrow{U1} \parallel \overleftrightarrow{CV}$. Prienikom priamky VI s rovinou FJU je ideálny bod.

■ **4.33** Rezom roviny BDR je trojuholník DBR. Prienikom priamky AV a roviny BDR je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AV} \cap (\overleftrightarrow{BDR} \cap \varepsilon)$, kde ε je rovina preložená priamkou AV, (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{ACV}$).

V príklade 4.34 určíme rez roviny využitím prieniku priamky s podstavou telesa, (viď. časť 2.5)

■ **4.34** Treba si uvedomiť, akú vzájomnú polohu majú priamka PU a rovina QTV, potom $\overleftrightarrow{PU} \cap \overleftrightarrow{QTV} = \overleftrightarrow{UP}$

V príklade 4.35 na zostrojenie rezu danou rovinou využijeme vetu o afinite (AFIN), (viď. časť 2.6)

■ **4.35** Pri konštrukcii rezu rovinou KLM je potrebné využiť afinitu $\mathcal{A}(o; K, E)$, kde $o = \overleftrightarrow{I.II}$, $\{I\} = \overleftrightarrow{KM} \cap \overleftrightarrow{ED}$, $\{II\} = \overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{DB}$. Priesečníkom priamky PQ s rovinou, KLM je bod X, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap p$, kde p je priesečnica rovín KLM a ε, kde ε je rovina preložená PQ (napr. $\varepsilon = \overleftrightarrow{PQC}$).

5 PRIENIK PRIAMKY A TELESA

■ **5.1** Riešený príklad.

■ **5.2** a) Priamkou AC' môžeme preložiť rovinu ACC', ktorej rezom je rovnobežník $ACC'A'$. Prienikom priamky AC' s telesom je úsečka AC'.

b) Treba si uvedomiť, že priamka AB' patrí rovine prednej steny hranola $ABB'A'$. Preto prienikom priamky AB' a telesa je úsečka AB'.

c) Priamkou AY môžeme preložiť rovinu AYA'. Rezom telesa touto rovinou je rovnobežník a prienikom priamky AY a telesa je úsečka AY.

■ **5.3** a) Priamkou XY môžeme preložiť rovinu ε, ktorá je rovnobežná s bočnými hranami telesa a prechádza bodmi Y a X. $\overleftrightarrow{XY} \cap \mathbb{T} = ZY$, kde bod Z leží v stene $FAA'F'$ a je prienikom časti rezu roviny α v stene $FAA'F'$ a priamky XY.

b) Priamkou XD' môžme preložiť rovinu XDD'. Rezom telesa rovinou XDD' je obdĺžnik. $\overleftrightarrow{XD'} \cap \mathbb{T} = QD'$, kde Q je prienikom časti rezu roviny XDD' v stene $FAA'F'$ s priamkou XD'.

■ **5.4** Výhodnou pomocnou rovinou preloženou priamkou KL je rovina HBL. Prienikom priamky KL a telesa bude úsečka, ktorej koncové body ležia v stenách $BCGH$ a $ADHE$.

■ **5.5** a) Priamkou PQ môžme preložiť rovinu ABG. Rezom telesa rovinou ABG je obdĺžnik $ABGH$. Prienik priamky PQ a telesa je úsečka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AH} \cap$

$\overleftrightarrow{PQ}$, $\{Y\} = \overleftrightarrow{BG} \cap \overleftrightarrow{PQ}$.

b) Pomocnou rovinou preloženou priamkou PQ môže byť rovina DBF. Rezom je rovnobežník $DBFH$. Prienikom priamky PQ a telesa je úsečka PS, kde $\{S\} = \overleftrightarrow{FB} \cap \overleftrightarrow{PQ}$.

■ **5.6** Priamku MN vhodne preložíme vrcholovou rovinou MNV. Rezom je trojuholník $12V$, kde $1V$ je časťou rezu v stene ADV a $2V$ je časťou rezu v stene BCV. $\overleftrightarrow{MN} \cap \mathbb{T} = XY$, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{1V} \cap \overleftrightarrow{MN}$, $\{Y\} = \overleftrightarrow{2V} \cap \overleftrightarrow{MN}$.

■ **5.7** Uvedomte si, že pomocnou rovinou môže byť vrcholová rovina KLD. Prienikom priamky PQ s telesom je úsečka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{KD} \cap \overleftrightarrow{PQ}$, $\{Y\} = \overleftrightarrow{LD} \cap \overleftrightarrow{PQ}$.

■ **5.8** Priamkou PQ možno preložiť rovinu ABG, ktorej rezom je obdĺžnik $ABGH$. Prienikom priamky PQ a kvádra je úsečka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{AH} \cap \overleftrightarrow{PQ}$, $\{Y\} = \overleftrightarrow{BG} \cap \overleftrightarrow{PQ}$.

■ **5.9** Priamkou PQ preložme rovinu PQA, ktorej rezom je rovnobežník. $\overleftrightarrow{PQ} \cap \mathbb{T} = XY$, kde bod X leží v stene $A'B'C'D'$ a bod Y leží v stene $BCC'B'$ (bod X vznikne prienikom časti rezu roviny PQA v stene $A'B'C'D'$ a bod Y vznikne prienikom časti rezu roviny PQA v stene $BCC'B'$).

■ **5.10** Priamkou MN možno preložiť rovinu BMN, ktorej rezom je štvoruholník. Treba si uvedomiť, že prienikom priamky MN a $\mathbb{T}$ je bod N.

■ **5.11** Priamkou KL možno preložiť rovinu, ktorá je rovnobežná s bočnou hranou telesa a prechádza bodmi K, L. Rezom tejto roviny je obdĺžnik. Prienikom priamky KL a telesa je úsečka XL, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{12} \cap \overleftrightarrow{KL}$, kde 12 je časťou rezu pomocnej roviny v stene $EAA'E'$.

■ **5.12** Priamkou UV možno preložiť napríklad rovinu $A'UV$, ktorej rezom trojuholník $A'BC'$. Prienikom priamky UV a hranola je úsečka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{UV} \cap \overleftrightarrow{C'B}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{UV} \cap \overleftrightarrow{A'B}$.

■ **5.13** Priamkou PQ preložme napríklad rovinu $A'PQ$, ktorej rezom je štvoruholník $A'D'21$. $\overleftrightarrow{PQ} \cap \mathbb{T} = XY$, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{A'1} \cap \overleftrightarrow{PQ}$, $\{Y\} = \overleftrightarrow{Y'2} \cap \overleftrightarrow{PQ}$.

■ **5.14** a) Priamkou PQ možno preložiť rovinu VEP, ktorej rezom je trojuholník $12V$, kde $1V$ je časťou rezu v stene CDV a $2V$ je časťou rezu v stene AFV. Prienikom priamky a telesa je úsečka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{1V}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{2V}$,

b) Priamkou PQ možno preložiť rovinu PQR, ktorej rezom je trojuholník $12V$, kde $1V$ je časťou rezu v stene ABV a $2V$ je časťou rezu v stene DEV. Prienikom priamky a telesa je úsečka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{12}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{2V}$,

c) Priamkou PQ možno preložiť rovinu PQV, ktorej rezom je trojuholník $12V$, kde $1V$ je časťou rezu v stene EDV a $2V$ je časťou rezu v stene ABV. Prienikom priamky a telesa je úsečka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{2V}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{1V}$.

■ **5.15** Priamkou MN možno preložiť vrcholovú rovinu MNV, ktorej rezom je trojuholník $VE1$, kde $1V$ je časťou rezu v stene ABV. Priesečník priamky MN a telesa je úsečka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{E1} \cap \overleftrightarrow{MN}$ a $\{Y\} = \overleftrightarrow{V1} \cap \overleftrightarrow{MN}$.

■ **5.16** a) Za pomocnú rovinu si zvoľte vrcholovú rovinu MNV, ktorej rezom je trojuholník. Prienikom priamky MN s ihlanom je usečka, ktorej určujúce body sa zrejme nachádzajú v stenách BCV a ADV.

b) Za pomocnú rovinu si zvoľte vrcholovú rovinu MPV. Prienik priamky MP s telesom je úsečka XY, kde určujúce body X, Y ležia v stenách DCV a ADV.

■ **5.17** Priamku MN možno preložiť vrcholovou rovinou MND, rezom ktorej je trojuholník. Prienik priamky MN s ihlanom je úsečka XN, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{1D} \cap \overleftrightarrow{MN}$, ak $1D$ je časťou rezu telesa pomocnou rovinou v stene ACD.

■ **5.18** Treba si uvedomiť, že za pomocnú rovinu si zvolíme vrcholovú rovinu, ktorá bude rovnobežná s $\overleftrightarrow{ADV}$ a $\overleftrightarrow{BCV}$. Rezom tejto roviny bude trojuholník $12V$, kde $1V$ je časťou rezu pomocnej roviny v stene ABV a $2V$ je časťou rezu v stene DCV. Prienikom priamky p a telesa je úsečka XY, kde $\{X\} = \overleftrightarrow{V1} \cap p$, $\{Y\} = \overleftrightarrow{V2} \cap p$.

ZÁVER

Cieľom diplomovej práce bolo vytvoriť zbierku úloh zo stereometrie, ktorá sa zaoberá rovinnými rezmi hranatých telies, prienikom priamky a roviny, priesečnicou dvoch rovín sa prienikom priamky a telesa.

Každá kapitola (podkapitola) na začiatku obsahuje stručný prehľad teoretických poznatkov, ktoré je potrebné ovládať pri riešení úloh. Za nimi nasleduje vzorový príklad s podrobným komentárom riešenia vrátane obrázka. Za riešenou úlohou nasleduje súhrn príkladov na samostatné riešenie. Ich výsledky sme zaradili na koniec zbierky, ktorá je jej dôležitou súčasťou, pretože sa v nej nachádza ku každej úlohe výsledok alebo stručný návod, ktorý má študentovi dopomôcť k správnemu vyriešeniu úlohy alebo poslúžiť k prípadnej kontrole správnosti jeho riešenia. Vo výsledkoch jednotlivých úloh sme upozornili na to, čo je potrebné si pri jednotlivých príkladoch uvedomiť, aké poznatky sa pri danej úlohe využívajú a aký je najjednoduchší postup pri riešení.

Zadania príkladov v zbierke sme vytvárali samostatne, tiež sme čerpali z literatúry uvedenej v zozname literatúry, avšak mnohé z nich sme vhodne upravili, pozmenili a zadelili do nami zvolených kategórií.

Dúfame, že naša práca bude úspešnou pomôckou študentom pri štúdiu stereometrie.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] BENDA P., DAŇKOVÁ B., SKÁLA J.: *Zbierka maturitných úloh z matematiky*, Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1967.

[2] KOLEKTÍV PRACOVNÍKOV KATEDRY MATEMATIKY FAKULTY PEDAS: *Zbierka úloh z matematiky na prijímacie skúšky v roku 2000*, Žilina: Žilinská univerzita/EDIS, 1999.

[3] KOUNOVSKÝ J., VYČICHLO F.: *Deskriptivní geometrie*, Praha: Nakladatelstí československé akademie věd, 1959.

[4] KRIŽILKOVÁ K., CUNINKA A., ŠEDIVÝ O.: *500 riešených úloh z geometrie*, Bratislava: Nakladatelstvo ALFA, 1972.

[5] MONOSZOVÁ G.: *Konštrukčná geometria*, Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela, 1993.

[6] PÁL I.: *Deskriptívna geometria videná priestorove*, Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1960.

[7] ŠALÁT T. a kol.: *Malá encyklopédia matematiky*, Bratislava: Obzor, 1967.

[8] URBAN A.: *Deskriptivní geometrie I*, Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965.

[9] *Zbierka riešených úloh z geometrie II.*, Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1970.