

Kapitola 1

Planimetria

1.1 Polohové a metrické úlohy

1. Koľko priamok je určených n rôznymi bodmi v rovine, z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne?
2. Na koľko (neprekrývajúcich sa) častí rozdelí $n + 1$ navzájom rôznych bodov ležiacich na priamke túto priamku?
3. Ktoré z nasledujúcich útvarov sú konvexné?
 - a) úsečka bez jedného krajného bodu,
 - b) úsečka bez jedného vnútorného bodu,
 - c) trojuholník,
 - d) trojuholník bez vrcholu,
 - e) trojuholník bez jedného vnútorného bodu jednej jeho strany.
 - f) kruh,
 - g) vnútro kruhu,
 - h) kruhový výsek,
 - i) kruhový odsek.
4. Určte pravdivosť nasledovných výrokov:
 - a) Prienikom dvoch konvexných útvarov je konvexný útvar.
 - b) Zjednotením dvoch konvexných útvarov je konvexný útvar.
5. Daný je trojuholník ABC o stranách a, b, c . Označme a', b', c' vzdialenosti ľubovoľného bodu M roviny trojuholníka od jeho vrcholov A, B, C , v poradí. Dokážte, že platí:

$$a' + b' + c' > \frac{1}{2}(a + b + c)$$

6. Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC , ak sú v pomere $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$.
7. Osi vnútorných uhlov trojuholníka ABC sa pretínajú v bode S . Vyjadrite veľkosť uhla ASB pomocou veľkosti vnútorného uhla γ .
8. Vrcholmi A, B, C trojuholníka ABC ved'te priamky p_a, p_b, p_c rovnobežné s priamkami $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$, v poradí. Označte $\{A'\} = p_b \cap p_c, \{B'\} = p_a \cap p_c, \{C'\} = p_a \cap p_b$. Dokážte, že trojuholníky $A'B'C'$ a ABC sú podobné.

9. Dokážte, že v trojuholníku ABC platí

$$\frac{1}{2}(a + b + c) < t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

(Využite predchádzajúcu úlohu.)

10. Zvislá hrana budovy vrhá tieň dlhý 18 m. Určte výšku budovy, ak v rovnakom okamžiku vrhá zvislá metrová tyč 145 cm dlhý tieň.
11. Daná je kružnica $k(S, r)$ a jej nesečnica p . Zostrojte dotyčnice kružnice k a) rovnobežné s priamkou p , b) kolmé na priamku p .
12. Dokážte správnosť nasledujúceho postupu konštrukcie dotyčníc t_1, t_2 kružnice $k(S, r)$ bodom $M, M \in \text{ext } k$:

1. $P_i, i = 1, 2: \{P_i\} = l \cap l', \text{ kde } l(S, 2r), l'(M, MS)$

2. $T_i, i = 1, 2: \{T_i\} = SP_i \cap k$

3. $t_i = \overleftrightarrow{MT_i}, i = 1, 2$

13. Dokážte, že os stredového uhla a osi všetkých obvodových uhlov prislúchajúcich k tomu istému kružnicovému oblúku AB kružnice $k(S, r)$ sa pretínajú v jednom bode, ktorý je stred oblúka AB .

14. Určte polomery r_1, r_2 sústredných kružníc k_1, k_2 , ak $r_1 : r_2 = 3 : 2$ a šírka medzikružia $r_1 - r_2 = d$.

- Sem. 1. Kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2), S_1 \neq S_2, r_1 > r_2$ majú vonkajší dotyk v bode T . Ich spoločné vonkajšie dotyčnice označme t_1, t_2 s dotykovými bodmi T_1, T_2, T'_1, T'_2 , v poradí.
- a) Určte vzdialenosť $|T_1 T_2|$, b) vzdialenosť $|T, t_1|$.

15. Odvodte

- a) vzorec pre súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov n -uholníka,
b) vzorec pre súčet veľkostí všetkých vonkajších uhlov konvexného n -uholníka.

16. Odvodte vzorec pre počet všetkých uhlopriečok n -uholníka.

17. Určte

- a) ktorý n -uholník má práve toľko uhlopriečok ako strán,
b) ktorý n -uholník má dvakrát viac uhlopriečok ako strán.

18. Dokážte, že

- a) v tetivovom štvoruholníku je súčet veľkostí dvoch protíahlych vnútorných uhlov 180° ,
b) v dotyčnicovom štvoruholníku sa súčty dĺžok protíahlych strán rovnajú.

1.2 Množina bodov danej vlastnosti v rovine

19. Určte množinu všetkých bodov danej vlastnosti (v rovine)

- a) ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch daných rôznych bodov A, B ,
b) ktoré majú od danej priamky p danú vzdialenosť d ($d > 0$),

- c) ktoré majú od dvoch daných rôznych rovnobežiek a, b rovnakú vzdialenosť,
 - d) ktoré majú od dvoch daných rôznobežiek a, b rovnakú vzdialenosť.
20. Určte množinu všetkých stredov kružníc (v rovine)
- a) ktoré prechádzajú danými dvoma rôznymi bodmi A, B ,
 - b) ktoré sa dotýkajú daných dvoch rôznych rovnobežiek a, b ,
 - c) ktoré sa dotýkajú daných dvoch rôznobežiek a, b ,
 - d) ktoré majú daný polomer r a dotýkajú sa danej priamky m ,
 - e) ktoré majú daný polomer u a prechádzajú daným bodom Q ,
 - f) ktoré sa dotýkajú danej priamky p v jej danom bode T ,
 - g) ktoré sa dotýkajú danej kružnice $k(S, r)$ v jej danom bode T ,
 - h) ktoré majú daný polomer u a dotýkajú sa danej kružnice $k(S, v)$, $v > u$.
21. Určte množinu stredov tetív danej kružnice $k(S, r)$, ktoré majú spoločný práve jeden krajný bod A .
22. Daná je priamka p a bod M , ktorý na nej neleží. Určte množinu všetkých stredov úsečiek MX , kde $X \in p$.
23. Dané sú dva rôzne body A, B . Určte množinu všetkých dotykových bodov dotyčníc vedených bodom A ku kružniciam so stredom B a polomerom r , pričom $r \leq |AB|$.

1.3 Geometrické zobrazenia v rovine

Zhodné zobrazenia

24. Určte samodružné priamky a) osovej súmernosti, b) stredovej súmernosti, c) posunutia, d) otočenia.
25. Určte inverzné zobrazenie k a) osovej súmernosti danej osou o , b) stredovej súmernosti danej stredom S .
26. Určte zobrazenie, ktoré je zložené z dvoch osových súmerností, ktorý osi sú a) rovnobežné, b) rôznobežné nie kolmé, c) kolmé.
27. Ako sa nazýva zhodné zobrazenie, ktoré vznikne zložením osovej súmernosti s osou o a posunutia, ktorého vektor posunutia je rovnobežný s osou o ?
28. Daná je priamka p a dva rôzne body A, B ležiace a) v opačných polrovinách, b) v tej istej polrovine s hraničnou priamkou p . Dokážte, že v oboch prípadoch existuje práve jeden bod $X \in p$, pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od bodov A, B minimálny.
29. Dokážte: Ak v trojuholníku ABC platí $|AB| > |AC|$ a S_a je stred strany BC , tak platí $|\sphericalangle CAS_a| > |\sphericalangle BAS_a|$. (Pomôcka: Uvažujte obraz bodu A v stredovej súmernosti so stredom S_a .)
30. Daný je ostrý uhol XVY a jeho vnútorný bod C . Určte na ramenách $\overleftrightarrow{VX}, \overleftrightarrow{VY}$ body A, B tak aby trojuholník ABC mal minimálny obvod.

31. Daná je priamka p a dva rôzne body A, B ležiace vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou p . Zostrojte trojuholník ABC tak, aby jeho vrchol $C \in p$ a jeho obvod bol minimálny.
32. Na biliardovom stole sú dve guľe so stredmi v bodoch A, B ($A \neq B$). Určte, ktorým smerom sa má pohybovať guľa umiestnená v bode A , aby po odraze od mantinelu stola narazila do guľe umiestnenej v bode B .
33. Daná je úsečka MN a priamka p pretínajúca úsečku MN v bode P . Určte na priamke p bod V tak, aby priamka $\overleftrightarrow{VP}$ bola osou uhla MVN .
34. Zostrojte trojuholník ABC ak sú dané: $a + b, c, v_a$.
35. Zostrojte trojuholník ABC ak sú dané: $a - b(> 0), \beta, \gamma$.

Sem. 2. Zostrojte trojuholník ABC ak sú dané: $a + b, c, \beta - \alpha$.

Sem. 3. Zostrojte trojuholník ABC ak sú dané:

- a) $a + b, c, \gamma$,
- b) $a - b(> 0), c, \alpha$,
- c) $a + b + c, \alpha, \beta$,

36. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC ak sú dané: bod L ležiaci na jednej z jeho strán a trojuholníku vpísaná kružnica $k_v(S, \varrho)$.
37. Zostrojte štvorec $ABCD$, ak sú dané a) $a + u$, b) $u - a(> 0)$, kde a je veľkosť strany a u veľkosť uhlopriečky štvorca.
38. Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, ak sú dané a) $a - b(> 0), u$, b) $a, b + u$, kde a, b sú veľkosti strán a u je veľkosť uhlopriečky obdĺžnika.
39. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak sú dané: $|CD| = c$ (dĺžka kratšej základne), $|BC| = b$, $|AD| = d$ (dĺžky oboch ramien) a $|\sphericalangle DAB| - |\sphericalangle ABC| = \alpha - \beta(> 0)$.
40. Zostrojte konvexný štvoruholník (rôznobežník), ak sú dané dĺžky všetkých jedho strán a, b, c, d ($c < d$) a uhlopriečka BD leží na osi vnútorného uhla ADC .
41. V rovine sú dané: kružnica $k(S, r)$, priamka p vo vzdialenosti v ($v > 0$) od stredu S a bod M zvnútra polroviny $\overrightarrow{pS}$ vo vzdialenosti u ($u > 0$) od priamky p . Zostrojte úsečku AB so stredom v bode M tak, že $A \in k$ a $B \in p$.
42. Dané sú kružnica $k(S, r)$ a bod $P, P \in \text{ext } k$. Zostrojte priamku p , ktorá prechádza bodom P a pretína kružnicu k v bodoch A, B tak, že bod A je stredom úsečky BP .
43. Bodom M ležiaceho vnútri konvexného uhla AVB ved'te priamku p pretínajúcu jeho ramená v bodoch P, Q tak, aby bod M bol stredom úsečky PQ .
44. Spoločným bodom dvoch kružníc $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$ ved'te priamku p tak, aby na nej kružnice k_1, k_2 vyt'ali zhodné tetivy AP, AQ ($P \in k_1, Q \in k_2$).
45. Dané sú rôznobežky p, q a bod S , ktorý neleží na žiadnej z nich. Zostrojte štvorec $ABCD$ so stredom S tak, aby vrchol A ležal na priamke p a vrchol C na priamke q .

46. Dané sú nekolineárne body P, Q, S . Zostrojte štvorec $ABCD$ so stredom S tak, aby $P \in \overleftrightarrow{AB}$ a $Q \in \overleftrightarrow{CD}$.
47. Dané sú kružnica $k(S, r)$ a bod $P, P \neq S$. Ved'te bodom P priamku p , ktorá vytína na kružnici k tetivu danej dĺžky c , kde $c < 2r$.
48. Dané sú dve rôzne rovnobežky p, q a bod A , ktorý neleží na žiadnej z nich. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby $B \in p$ a $C \in q$.
49. Dané sú sústredné kružnice $k_1(S, r_1), k_2(S, r_2), r_1 > r_2$ a bod $A \in k_1$. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC , pričom $B \in k_1$ a $C \in k_2$.
- Sem. 4. Zostrojte rovnobežník $ABCD$ so stredom S , ak sú dané dĺžky jeho strán $a = |AB|, b = |BC|$ a veľkosť uhla uhlopriečok $\varphi = |\sphericalangle ASB|$ ($0^\circ < \varphi < 180^\circ$).
50. Zostrojte lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD, |AB| > |CD|$), ak sú dané
- dĺžky všetkých jeho štyroch strán a, b, c, d ,
 - dĺžky oboch jeho základní a, c a uhlopriečok u_1, u_2 .
51. Dané sú rôzne rovnobežky p, q a priamka m s nimi rôznobežná. Zostrojte rovnostranný trojuholník o strane veľkosti a , pričom na každej z daných troch priamok leží práve jeden vrchol trojuholníka.
52. Dané sú dve nesústredné kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$ a priamka p . Zostrojte priamku q , ktorá je rovnobežná s priamkou p a na kružniciach k_1, k_2 vytína zhodné tetivy.
53. Určte miesto na priamej rieke šírky d , kde by sa mal kolmo ku brehom rieky postaviť most tak, aby bola čo najkratšia cesta medzi obcami M, N , ktoré ležia na rôznych stranách rieky mimo brehov rieky.

Rovnoľahlosť a podobnosť

54. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané:
- $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, t_c = 3 \text{ cm}$,
 - $a : b : c = 4 : 5 : 6, t_c = 7 \text{ cm}$.
55. Do daného ostrouhlého trojuholníka ABC vpíšte štvorec $KLMN$ tak, aby vecholy K, L ležali na strane AB , vrchol M na strane BC a vrchol N na strane AC .
56. Daná je kružnica $k(S, r)$, jej nesečnica t , na ktorej je daný bod A . Zostrojte kružnicu dotýkajúcu sa kružnice k a priamky t v bode A .
- Sem. 5. Dané sú dve nesústredné kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$, pričom jedna leží vo vonkajšej oblasti tej druhej. Ďalej je daný bod $A \in k_1$. Zostrojte kružnicu dotýkajúcu sa kružnice k_1 v bode A a aj kružnice k_2 .
- Sem. 6. Dané sú rôznobežky p, q a bod M neležiaci na žiadnej z nich. Zostrojte kružnicu dotýkajúcu sa obidvoch rôznobežiek a prechádzajúcu bodom M .
- Sem. 7. Daný je ostrý uhol MVN a jeho vnútorný bod A . Určte na ramene $\overrightarrow{VM}$ bod B , ktorý má od bodu A rovnakú vzdialenosť ako od ramena $\overrightarrow{VN}$.

57. Daný je konvexný uhol MVN a jeho vnútorný bod A . Ved'te bodom A priamku p tak, aby vytínala na ramenách uhla MVN úseky, ktorých dĺžky sú v pomere $2 : 3$.

1.4 Obvody a obsahy geometrických útvarov

58. Vyjadrite obvod a obsah a) rovnoramenného trojuholníka so základňou o veľkosti a a ramenami o veľkosti b , b) rovnostranného trojuholníka so stranou veľkosti a .
59. Nad stranami rovnoramenného pravouhlého trojuholníka s preponou dĺžky c sú zostrojené štvorce (neprekrývajúce s trojuholníkom). Vyjadrite obsah trojuholníka $S_1S_2S_3$, ktorého vrcholy sú stredy týchto štvorcov.
60. V pravouhlom trojuholníku ABC sú dané dĺžky jeho odvesien $a = 10,2$ cm, $b = 28$ cm. Vypočítajte jeho obvod, obsah, polomer opísanej a polomer vpísanej kružnice.
61. Určte dĺžky strán a, b, c trojuholníka ABC , ak je dané:
a) obsah $S = 210$ cm², $a : b : c = 4 : 5 : 6$, b) obvod $O = 148$ cm, $v_a : v_b : v_c = 6 : 5 : 4$.
62. Určte pomer obsahov dvoch častí trojuholníka, na ktoré ho rozdelí priamka prechádzajúca ťažiskom trojuholníka rovnobežne s niektorou stranou trojuholníka.
63. Trojuholník ABC je rozdelený priamkou p rovnobežnou so stranou AB na trojuholník a lichobežník, ktorých obsahy sa rovnajú. V akom pomere delí priamka p strany trojuholníka ABC .
64. V obdĺžniku $ABCD$ je daná dĺžka uhlopriečky $u = 35$ cm a pomer dĺžok strán $a : b = 4 : 3$. Vypočítajte dĺžky strán a, b , obvod O a obsah S obdĺžnika.
65. Vypočítajte obvod a obsah kosoštvorca, ak sú dané dĺžky jeho uhlopriečok u_1, u_2 .
66. Dokážte:
V každom lichobežníku $ABCD$ s uhlopriečkami AC, BD , ktoré sa pretínajú v bode X platí, že obsahy trojuholníkov AXD a BCX sa rovnajú.
- Sem. 8. Vrcholom A konvexného štvoruholníka (rôznobežníka) $ABCD$ ved'te priamku p , ktorá ho rozdelí na dva útvary s rovnajúcimi sa obsahmi.
- Sem. 9. K danému konvexnému štvoruholníku (rôznobežníku) $ABCD$ zostrojte štvorec, ktorého obsah sa rovná obsahu daného štvoruholníka.