Tézy na magisterské štátne skúšky

ŠP: Matematická štatistika a finančná matematika

Upozornenie. Jedna otázka bude z pravdepodobnosti alebo matematickej štatistiky, druhá z ekonometrie alebo z časových radov, tretia z finančnej alebo poistnej matematiky.

(1) Pravdepodobnosť

Podmienená pravdepodobnosť a podmienená distribučná funkcia a podmienená hustota. Podmienená stredná hodnota, martingály.

(1) Matematická štatistika

Jednorozmerné a mnohorozmerné normálne rozdelenie. Náhodný výber (základné výberové charakteristiky a ich vlastnosti pri výbere z normálneho rozdelenia). Lineárna regresia (teoretické základy lineárnej regresie a korelácie). Rozdelenie kvadratických foriem. Testy hypotéz a intervaly spoľahlivosti v prípade normálneho rozdelenia, (jednovýberový, dvojvýberový a párový t-test, test rovnosti rozptylov). Lineárna (priamková) regresia (regresia prechádzajúca počiatkom, dve lineárne regresie, kvadratická regresia). Regresia s dvomi nezávislými premennými, pás spoľahlivosti. Výberový korelačný koeficient a test jeho nulovosti, výberová korelačná matica. Výberový koeficient mnohonásobnej korelácie, výberový koeficient parciálnej korelácie. Lineárny model s plnou a neúplnou hodnosťou, testovanie submodelov. Model analýzy rozptylu (Scheffého a Tukeyova metóda, jednoduché triedenie, dvojité triedenie bez interakcií, dvojité triedenie s interakciami). Multinomické rozdelenie, testy dobrej zhody pri známych a neznámych parametroch. Overenie rozdelenia (Poissonove, normálne, exponenciálne), Kontingenčné tabuľky a test nezávislosti v nich, štvorpoľné tabuľky, Niektoré neparametrické testy (znamienkový, jednovýberový Wilcoxonov test, Kruskalov-Wallisov test, Friedmanov test). Teoretické základy testovania hypotéz, jednoduchá hypotéza a alternatíva. Neymanova-Pearsonova lema, jednoduchá hypotéza a zložená alternatíva, zložená hypotéza a zložená alternatíva. Teória odhadu (bodový a intervalový odhad, konzistentný odhad, regulárny systém hustôt). Raova-Cramerova veta, eficientný odhad, Fisherova miera informácie. Postačujúce štatistiky, úplné štatistiky. Metóda maximálnej vierohodnosti. Momentová metóda, interval spoľahlivosti. Základy bayesovských metód.

(2) Ekonometria

Formulácia gaussovského jednoduchého lineárneho regresného modelu.
Odhady a inferencie v gaussovskom jednoduchom lineárnom regresnom modeli.
Predikcie v v gaussovskom jednoduchom lineárnom regresnom modeli.
Diagnostická analýza gaussovského jednoduchého lineárneho regresného modelu: normalita, homoskedasticita. Odhady a inferencie v korigovanom modeli. Vplyvné pozorovania, združene vplyvné pozorovania, multikolinearita. Diagnostická analýza funkčnej špecifikácie gaussovského lineárneho regresného modelu, transformácie premenných, interakcie, štrukturálna zmena. Výber modelu.

(2) Časové rady

Stochastický proces. Fundamentálny problém analýzy časových radov,

založenej na stochastickom procese. Stacionarita. Ergodičnosť. Stacionarita AR(p) procesu. Invertovatľnosť MA(q) procesu. Predpovedanie časových radov. Kvalita predpovede: stredná kvadratická chyba predpovede. Predpoveď minimalizujúca strednú kvadratickú chybu. Lineárna predpoveď a lineárna projekcia. Optimálna predpoveď AR(1), MA(1). Woldova veta ako základ Boxovho Jenkinsovho prístupu k analýze časových radov.
Štyri kroky Boxovho Jenkinsovho prístupu. Sezónnosť. Sezónna ARIMA. Trend: deterministický vs. proces s jednotkovým koreňom. Analýza finančných časových radov. ARCH, GARCH, modely stochastickej volatility. Filtre (Holtov, Holtov - Wintersov, Hodrickov - Prescottov). Štrukturálny prístup k analýze časových radov. Porovnanie s Boxovým Jenkinsovým prístupom.

(3) Finančná matematika

Binomický model oceňovania opcií, rizikovo-neutrálne ocenenie, neexistencia arbitráže, úplnosť modelu. Stochastické procesy, Brownov pohyb, martingály, Itôov integrál, Itôova lema a veta o reprezentácii martingálov. Blackov-Scholesov model, odvodenie Blackovej-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice, Blackove-Scholesove vzorce a ich vlastnosti. Girsanovova veta a rizikovo-neutrálne ocenenie derivátov. Vplyv dividend a dividendového výnosu, opcie na akciový index a menové opcie. Zaistenie portólia derivátov, parametre portfólia. Exotické opcie a ich oceňovanie. Úrokové miery a dlhopisy, durácia, výnosové krivky. Úrokové forwardy a futures. Swapy. Rozšírenie teoretického modelu pre úrokové deriváty, trhová cena rizika, numeraire a ekvivalentná martingálová miera. Úrokové opcie a Blackov model. Numerické metódy pre oceňovanie opcií: binomický a trinomický model. Monte-Carlo metódy oceňovania opcií, redukcia variancie, postupnosti s nízkou diskrepanciou. Metódy konečných diferencií.

(3) Poistná matematika

Teória užitočnosti, poistné s nulovým úžitkom, koeficient averzie voči riziku, vybrané triedy funkcií užitočnosti. Modely individuálneho rizika, vlastnosti zmiešaných rozdelení, konvolúcia, vlastnosti momentovej a kumulantovej vytvárajúcej funkcie, NP a gama-aproximácie. Modely kolektívneho rizika, zložené distribúcie a ich základné charakteristiky. Vlastnosti zloženého Poissonovho rozdelenia, algoritmus riedkych vektorov, Panjerova rekurzia. Poissonov proces, vzťah medzi homogénnym a nehomogénnym Poissonovym procesom, vyjadrenie pomocou renewal procesu, vlastnosť poradových štatistík a jej aplikácie. Renewal proces a jeho asymptotické vlastnosti, renewal rovnica, Blackwellova a Smithova veta. Cramérov-Lundbergov a renewal model, proces celkovej výšky nárokov a jeho asymptotické vlastnosti, priestorovo-časová dekompozícia zloženého Poissonovho procesu a jej využitie. Rozdelenia s ťažkými koncami, regulárne sa meniace a subexponenciálne rozdelenia, ich základné vlastnosti a vzťahy medzi nimi. Pravdepodobnosť zruinovania, podmienka čistého zisku, koeficient korekcie a Lundbergova nerovnosť. Vzťah pravdepodobnosti zruinovania a kapitálu pri zruinovaní, prípad ohraničených, resp. exponenciálnych nárokov. Integrálna rovnica pre pravdepodobnosť zruinovania, Cramérovo ohraničenie. Pravdepodobnosť zruinovania pre subexponenciálne nároky.

Prof. RNDr. Gejza Wimmer, DrSc.