DVOJNÉ INTEGRÁLY

Beloslav Riečan

Banská Bystrica 2011

Úvod

Cieľom predloženého textu je stručne a zrozumiteľne vysvetliť teóriu dvojného integrálu,ukázať metódy jeho výpočtu a naznačiť aplikácie. Na viacerých miestach sa môžeme oprieť o analógiu s jednorozmerným prípadom (napr. spojitosť, charakterizácia integrálu pomocou horných a dolných súčtov, či veta o strednej hodnote integrálneho počtu). Ale zatiaľ, čo vetu o transformácii integrálu možno prezentovať v jednorozmernom prípade ako jednoduchý dôsledok vety o derivácii zloženej funkcie, v dvojrozmernom prípade tomu tak nie je.

Rozhodli sme sa preto nahradiť dôkaz odôvodnením. V našom do veľkej miery zepsilonizovanom spoločenstve je to možno čin nie celkom zvyčajný. Prinajmenej nie je bežné takýmto spôsobom publikovať skriptá, či učebnice. Ale práve preto sme sa rozhodli vystúpiť pred širšiu odbornú verejnosť s takýmto spôsobom argumentácie, ktorý je azda vo výchove neobvyklý, ale práve v nej efektívny.

O uvedenom spôsobe možno diskutovať. Čo je však nepochybné, je potreba možnosti dostať sa k textom v elektronickej forme cez internet. Isteže, viacerí takto sprístupňujeme učebné texty svojím študentom. Tento text má však ambície byť jedným z precendentov, ktorý by viedol k tomu, aby bolo sprístupnené všetko všetkým.

Text recenzovali prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc. a doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc. Nech mi je dovolené poznamenať, že na Slovensku nepoznám lepších recenzentov matematických textov. S tým súvisí aj ich preťaženosť. O to viac si cením skutočnosť, že sa môjho textu ujali a prispeli k jeho zlepšeniu. Ďakujem tiež Mgr. Renke Hanesovej, ktorá nakreslila obrázky.

Obsah

1 Fubiniho veta **3**

2 Integrovanie cez elementárnu oblasť **7**

3 Obsah plochy **13**

4 Transformácia dvojných integrálov **21**

5 Aplikácie **26**
5.1 Obsah rovinnej množiny 26
5.2 Ťažisko 28
5.3 Ťažisko telesa 29
5.4 Objem telesa 31

6 Nevlastné integrály **33**

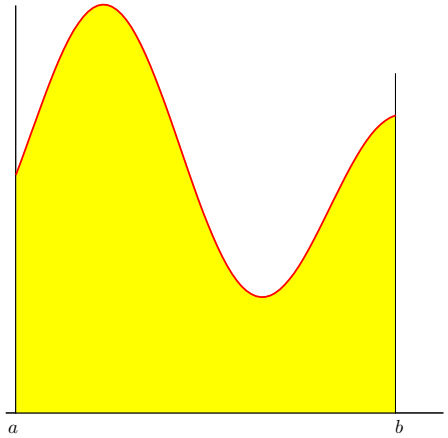
1 Fubiniho veta

Geometricky by mal integrál $V(B) = \iint\limits_A f(x,y)\,dxdy$, kde $z = f(x,y)$ je nezáporná ohraničená funkcia, $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\, 0 \leqq z \leqq f(x,y)\}$$

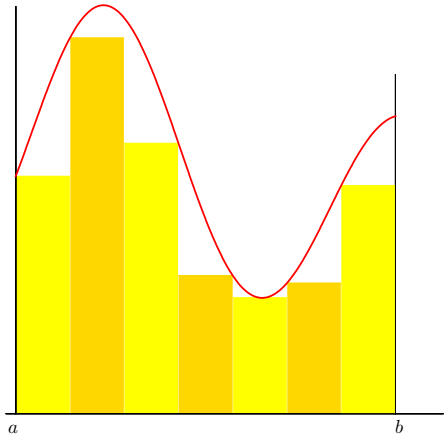
modelovať objem množiny B. Podobnú motiváciu sme mali v jednorozmernom prípade, kedy integrál

$$P(C) = \int_a^b f(x)\,dx$$



modeloval obsah množiny $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b,\, 0 \leqq y \leqq f(x)\}$. Ako sme vtedy postupovali? Vzali sme ohraničenú funkciu f a urobili sme delenie

$$\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$



a k nemu prislúchajúci horný, resp. dolný integrálny súčet

$$\overline{S}(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

resp.

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

kde

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\},$$
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}.$$

Horný, resp. dolný integrál definujeme vzťahom

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{\overline{S}(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ je delenie}\right\},$$

resp.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{\underline{S}(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ je delenie}\right\}.$$

Funkcia f je integrovateľná, ak

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

a túto spoločnú hodnotu nazývame integrálom

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ekvivalentne: f je integrovateľná, ak existuje práve jedno číslo I tak, že

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}) \leqq I \leqq \overline{S}(f,\mathcal{D})$$

pre všetky delenia $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a,b\rangle$. Číslo I je integrálom

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Analogicky môžeme postupovať v dvojrozmernom prípade. Pre jednoduchosť uvažujme pravouholník

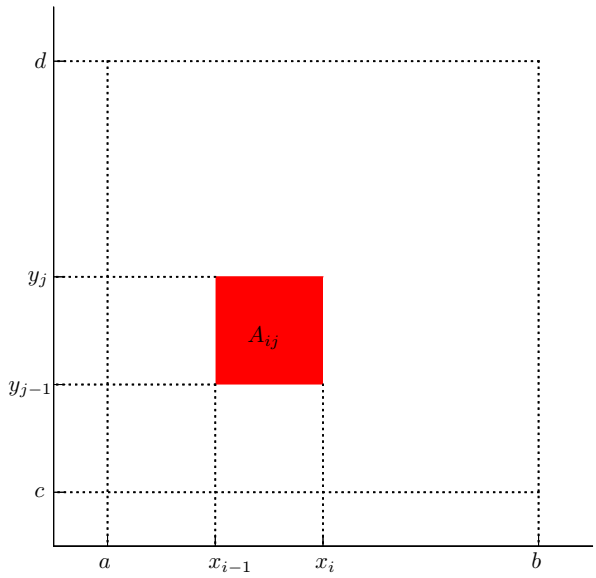
$$A = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle.$$

Delením budeme rozumieť množinu

$$\mathcal{D} = \{A_{ij} : i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\},$$

kde

$$A_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle,$$
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d.$$



Integrálne súčty sa definujú analogicky:

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_i \sum_j M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$
$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_i \sum_j m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

kde

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in A_{ij}\},$$
$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in A_{ij}\}.$$

1.1. Definícia. Ohraničená funkcia f je integrovateľná na množine $A = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, ak existuje práve jedno číslo I také, že

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leqq I \leqq \overline{S}(f, \mathcal{D})$$

pre všetky delenia $\mathcal{D}$ množiny A.

1.2. Veta. (Fubininho) *Nech f je spojitá na $A = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Potom*

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx.$$

1.3. Príklad. $\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\rangle} (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \Big[\int_0^2 (x+y)\,dy\Big]dx =$
$\int_0^1 \Big[xy + \frac{y^2}{2}\Big]_0^2 dx = \int_0^1 (2x+2)\,dx = \Big[x^2+2x\Big]_0^1 = 3.$

1.4. Dôkaz Fubiniho vety. Označme

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Z aditívnosti integrálu vyplýva, že

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big[\sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_i} f(x,y)\,dy\Big]\,dx \leqq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big[\int_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij}\,dy\Big]\,dx,$$

lebo $f(x,y) \leqq M_{ij}$ pre všetky $(x,y) \in A_{ij}$. Preto

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \overline{S}(f,\mathcal{D}).$$

Podobne sa dokáže nerovnosť $\underline{S}(f,\mathcal{D}) \leqq \int_a^b g(x)\,dx$. Pretože

$$\underline{S}(f,\mathcal{D}) \leqq I = \int_a^b g(x)\,dx \leqq \overline{S}(f,\mathcal{D})$$

pre všetky delenia $\mathcal{D}$, je číslo $\int_a^b g(x)\,dx$ integrálom funkcie f, teda

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx.$$

K predošlému dôkazu pripojme dve poznámky:

1. Nepovedali sme, čo je to spojitá funkcia dvoch premenných a nedokázali sme, že každá funkcia spojitá na $A = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ je integrovateľná. Ten dôkaz sa urobí presne tak, ako v jednorozmernom prípade. Kto si premyslel a precítil dôkaz v jednorozmernom prípade, ľahko si ho adaptuje. Pritom funkcia $z = f(x, y)$ je spojitá v bode (x_0, y_0), ak $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y$:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

2. V dôkaze sme použili implikáciu: f je spojitá na $A = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \Rightarrow$ g je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Totiž $|g(x) - g(x_0)| = \left|\int_c^d [f(x, y) - f(x_0, y)]\, dy\right| \leqq$ $\int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)|\, dy$. Opäť v analógii s jednorozmerným prípadom, funkcia f spojitá na $A = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, je na A rovnomerne spojitá, teda $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0\ \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Ak teda $|x - x_0| < \delta$, potom (položme $x_1 = x$, $x_2 = x_0$, $y_1 = y_2 = y$)

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y)^2} = |x - x_0| < \delta,$$

teda

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Podľa predošlého potom

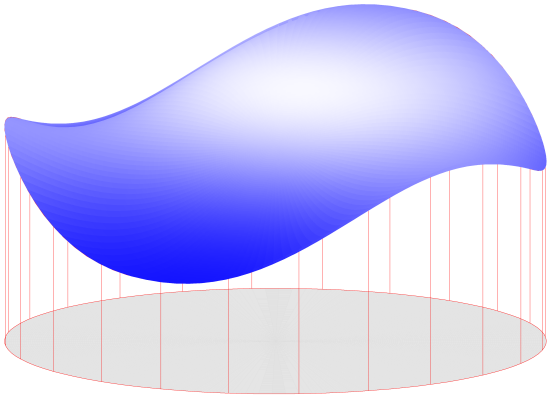
$$|g(x) - g(x_0)| \leqq \int_c^d \frac{\varepsilon}{d - c}\, dy = \varepsilon.$$

2 Integrovanie cez elementárnu oblasť

Dvojný integrál $\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy$ sme interpretovali ako objem telesa

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A,\ 0 \leqq z \leqq f(x, y)\},$$

ak f je nezáporná funkcia na A. Pravda, vypočítať tento dvojný integrál vieme zatiaľ iba v prípade, že $A = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.



2.1. Príklad. Vypočítajte objem telesa (napr. športová hala v Bratislave na Pasienkoch) ohraničeného plochami

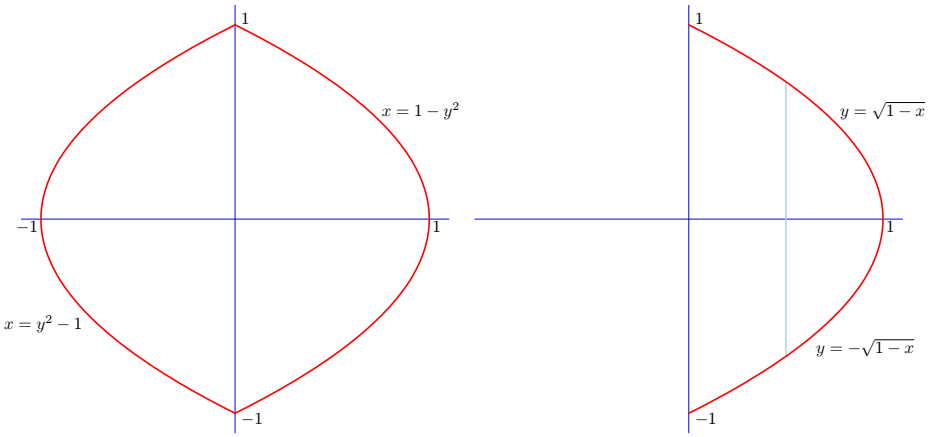
$$z = x^2 - y^2 + 1,\ z = 0,\ x = 1 - y^2,\ x = y^2 - 1.$$

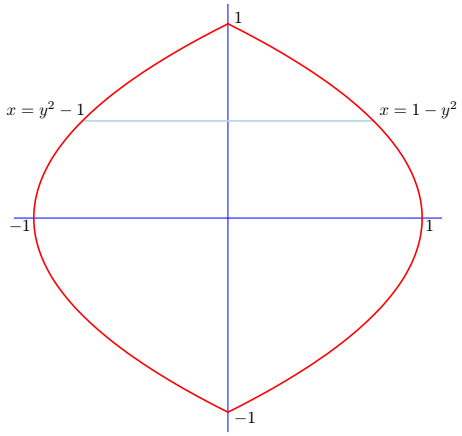
Mal by to byť integrál

$$\iint_A (x^2 - y^2 + 1)\, dxdy,$$

kde

$$\begin{aligned} A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqq x \leqq 0,\ -\sqrt{1-x} \leqq y \leqq \sqrt{1-x}\Big\} \cup \\ \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x \leqq 1,\ -\sqrt{x+1} \leqq y \leqq \sqrt{x+1}\Big\} = \\ = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqq y \leqq 1,\ y^2 - 1 \leqq x \leqq 1 - y^2\Big\}. \end{aligned}$$

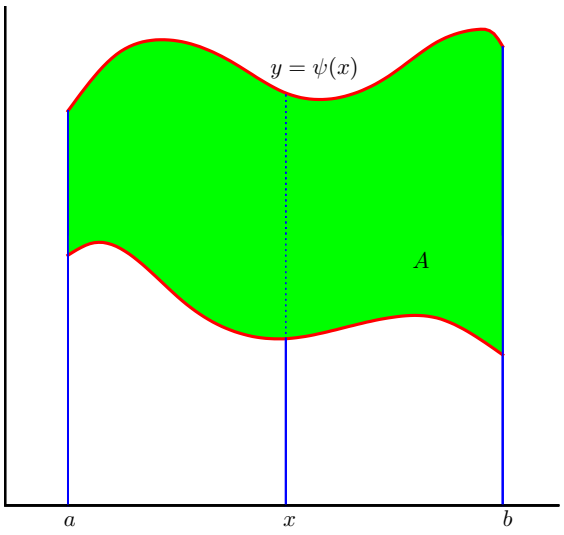




Množiny typu uvedeného v príklade 2.1 nazveme elementárnymi oblasťami.

2.2. Definícia. Elementárna oblasť je množina typu

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\},$$



kde φ, ψ sú funkcie spojité na intervale $\langle a, b\rangle$, $\varphi(x) \leqq \psi(x)$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$.

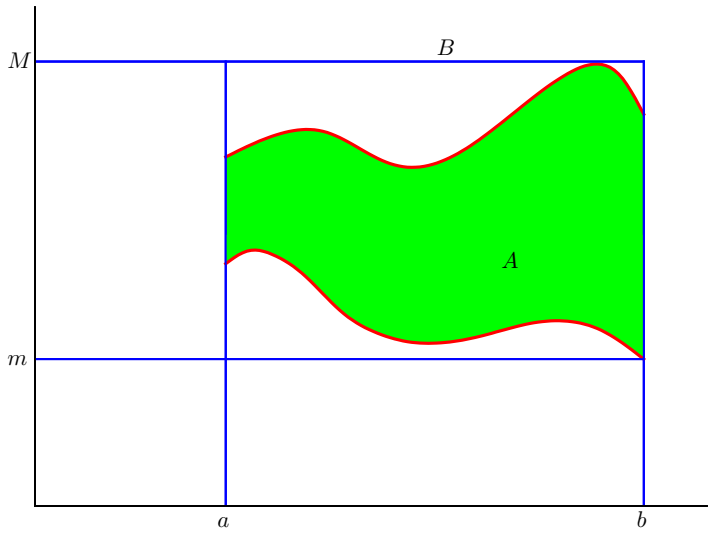
Poznamenajme, že podobne sa definuje elementárna oblasť s vymenenými osami x, y. Práca s nimi je analogická, čo nebudeme explicitne rozvádzať.

Keďže funkcie φ, ψ sú spojité na kompaktnom (=uzavretom a ohraničenom) intervale $\langle a, b\rangle$, dosahujú na ňom maximum i minimum. Ak označíme

$$m = \min\{\varphi(x) : x \in \langle a, b\rangle\},\ M = \max\{\psi(x) : x \in \langle a, b\rangle\},$$

celá množina A je časťou intervalu $\langle a, b\rangle \times \langle m, M\rangle$,

$$A \subset \langle a, b\rangle \times \langle m, M\rangle = B.$$



Cez interval B už vieme integrovať. Preto obor funkcie f rozšírime na B, ale tak, aby sa príslušný objem nezmenil. To dosiahneme tak, že mimo množiny A dáme nulové hodnoty:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{ak } x \in A \\ 0 & \text{ak } x \notin A \end{cases}$$

2.3. Definícia.

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_A f^*(x, y)\, dxdy,$$

kde $B = \langle a, b\rangle \times \langle m, M\rangle$.

Teraz už môžeme počítať

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left[\int_m^M f^*(x, y)\, dy\right] dx =$$

$$\int_a^b \left[\int_m^{\varphi(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{\psi(x)}^M f^*(x, y)\, dy\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[\int_m^{\varphi(x)} 0\, dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy + \int_{\psi(x)}^M 0\, dy\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\right] dx$$

Dostali sme vzorec:

2.4. Veta. *Ak f je spojitá na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\},$$

tak

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

2.5. Riešenie príkladu 2.1. Vzhľadom na symetriu stačí počítať štvrtinu objemu:

$$V = 4 \cdot \iint\limits_D (x^2 - y^2 + 1)\, dxdy,$$

kde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - x}\right\}$, teda

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x}} (x^2 - y^2 + 1)\, dy \right] dx = \\ &= 4 \int_0^1 \left[x^2 y - \frac{y^3}{3} + y \right]_0^{\sqrt{1-x}} dx = \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x} \left(x^2 - \frac{1 - x}{3} + 1 \right) dx \end{aligned}$$

Substitúcia $1 - x = t$ by nás priviedla k riešeniu. Iná možnosť spočíva vo výmene poradia integrovania:

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^1 \left[\int_0^{1-y^2} (x^2 - y^2 + 1)\, dx \right] dy = \\ &= 4 \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - xy^2 + x \right]_0^{1-y^2} dy = \\ &= 4 \int_0^1 (1 - y^2) \left(\frac{(1 - y^2)^2}{3} - y^2 + 1 \right) dy = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 (-y^6 + 6y^4 - 9y^2 + 4)\, dy = \\ &= \frac{4}{3} \left[-\frac{y^7}{7} + \frac{6y^5}{5} - 3y^3 + 4y \right]_0^1 = \frac{96}{35} \end{aligned}$$

Podobne ako v prvej kapitole aj tu sa musíme vyrovnať s jedným deficitom. V definícii 2.3 sme definovali integrál z funkcie f pomocou integrálu z

funkcie f^*. Patrí sa dokázať, že funkcia f^* je integrovateľná. Ako inak, nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Ak

$$\mathcal{D} = \{A_{ij}; i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\}$$

je ľubovoľné delenie intervalu B, zvoľme

$$M_{ij} = \max\{f^*(x, y); (x, y) \in A_{ij}, (x, y) \in A\}$$

ak $A_{ij} \cap A \neq \emptyset$, $M_{ij} = 0$ ak $A_{ij} \cap A = \emptyset$. Podobne

$$m_{ij} = \min\{f^*(x, y); (x, y) \in A_{ij}, (x, y) \in A\}$$

ak $A_{ij} \cap A \neq \emptyset$, $m_{ij} = 0$ ak $A_{ij} \cap A = \emptyset$. Keďže f je rovnomerne spojitá na množine A , existuje také $\delta > 0$, že

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} < \delta \Longrightarrow \mid f(x, y) - f(u, v) \mid < \varepsilon.$$

Zvoľme také delenie $\mathcal{D}$, aby

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} < \delta, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m.$$

Potom

$$\overline{S}(f^*, \mathcal{D}) - \underline{S}(f^*, \mathcal{D}) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) <$$

$$< \varepsilon \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) < \varepsilon(b-a)(d-c),$$

teda f^* je integrovateľná, teda existuje práve jedno také číslo I, že pre všetky delenia $\mathcal{D}$ intervalu B platí

$$\underline{S}(f*, \mathcal{D}) \leq I \leq \overline{S}(f*, \mathcal{D}).$$

Ale to číslo I je

$$I = \int_a^b g(x)dx,$$

kde

$$g(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy.$$

Totiž

$$\int_a^b g(x)dx = \Sigma_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx \leq \Sigma_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Sigma_j \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dx \leq$$

$$\leq \Sigma_i \Sigma_j M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \overline{S}(f*, \mathcal{D}).$$

Pritom sme použili skutočnosť, že pri danom x funkcia $y = h(y) = f^*(x, y)$ je integrovateľná. Prvá nerovnosť sa dokáže podobne.

3 Obsah plochy

Ide o obsah plochy určenej grafom funkcie $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$, teda množiny

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\}.$$

Inšpirovať sa budeme, pravda, najprv dĺžkou krivky. V tom prípade tá krivka je množina

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b,\ y = f(x)\},$$

kde f je funkcia so spojitou deriváciou v každom bode intervalu $\langle a, b\rangle$.

Urobme delenie $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$,

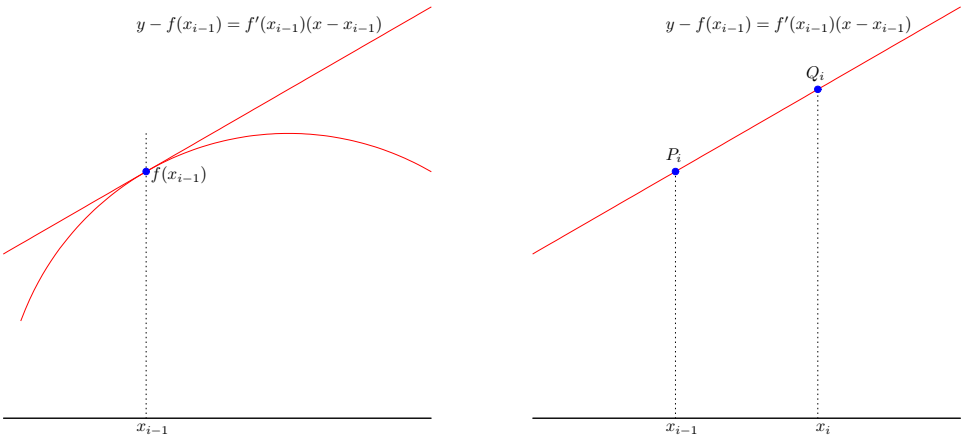
$$\mathcal{D} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

V každom bode $P_i = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ urobme dotyčnicu. Nech Q_i je priesečník tej dotyčnice s priamkou $x = x_i$. Ľahko sa vypočíta, že

$$Q_i = (x_i, f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})).$$

Preto

$$\overrightarrow{P_iQ_i} = (x_i - x_{i-1}, f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})) = (1, f'(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}).$$



Dĺžku krivky C môžeme aproximovať súčtom

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\overrightarrow{P_iQ_i}\right| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_{i-1})^2}(x_i - x_{i-1}) = S(g, \mathcal{D}),$$

čo je integrálny súčet patriaci k funkcii $y = g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ a deleniu $\mathcal{D}$.

Aby sme mohli analogickú úvahu realizovať v dvojrozmernom prípade, na to potrebujeme robiť dotyčnice, a teda derivovať v dvoch smeroch, v smere

osi x-ovej a v smere osi y-ovej. Uvažujme bod (x_0, y_0) a funkciu f definovanú v nejakom okolí bodu (x_0, y_0), teda v nejakom kruhu so stredom v bode (x_0, y_0). Rovinou $y = y_0$ pretneme plochu $z = f(x, y)$ a dostaneme krivku C určenú rovnicami

$$z = f(x, y),\ y = y_0.$$

Odpovedá jej funkcia g daná vzťahom

$$z = g(x) = f(x, y_0).$$

Dotyčnica k nej v bode (x_0, y_0) má smernicu

$$k = g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Toto číslo, teda deriváciu funkcie g v bode x_0, nazývame parciálnou deriváciou funkcie f v bode (x_0, y_0) a označujeme znakom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

3.1. Definícia. Hovoríme, že funkcia f má v bode (x_0, y_0) parciálnu deriváciu podľa x, ak existuje limita

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Má parciálnu deriváciu podľa y, ak existuje limita

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

3.2. Príklad. Vypočítajte parciálne derivácie funkcie $z = 3x^2y - 4x^2y^3$ v ľubovoľnom bode $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Riešenie. Máme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 8xy^3,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 12x^2y^2.$$

Po tomto príklade vráťme sa k našej úlohe — vypočítať obsah plochy B. Namiesto delenia jednorozmerného intervalu $\langle a, b\rangle$ budeme uvažovať delenie $\mathcal{D}$ dvojrozmerného intervalu $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, ako karteziánsky súčin dvoch delení:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d.$$

Vezmime pravouholník

$$A_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle$$

a v bode (x_{i-1}, y_{j-1}) zostrojíme dve dotyčnice k patričným krivkám. Najprv v smere osi x, teda $y = y_{j-1}$. Dotykový bod má súradnice

$$P = (x_{i-1}, y_{j-1}, f(x_{i-1}, y_{j-1})).$$

Podľa predošlého, priesečník Q dotyčnice s rovinou $x = x_i$ má súradnice (y-ová súradnica je konštantná, teda y_{j-1})

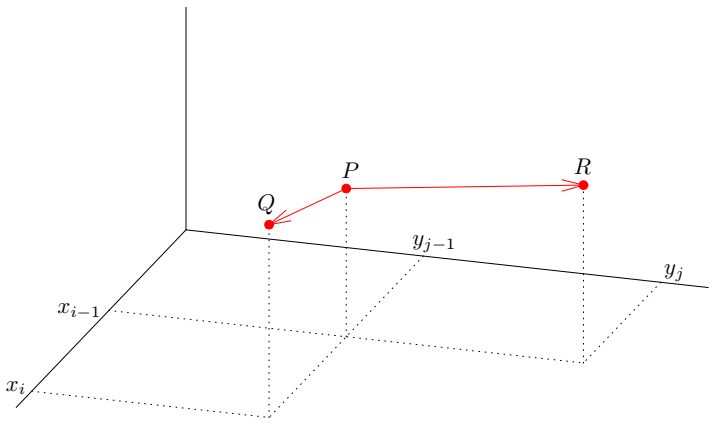
$$Q = \left(x_i, y_{j-1}, f(x_{i-1}, y_{j-1}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \right).$$

Preto vektor $\overrightarrow{PQ}$ má súradnice

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \left(x_i - x_{i-1}, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{j-1})(x_i - x_i - 1) \right) = \\ &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Ak niečo podobného spravíme v smere osi y-ovej, dostaneme vektor

$$\overrightarrow{PR} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{j-1}) \right) (y_j - y_{j-1}).$$



Zostrojme rovnobežník určený vektormi $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{PR}$. Jeho obsah (teda obsah šupinky nad intervalom A_{ij} primykajúci sa k ploche $z = f(x, y)$ v bode (x_{i-1}, y_{j-1})) bude aproximovať obsah plôšky

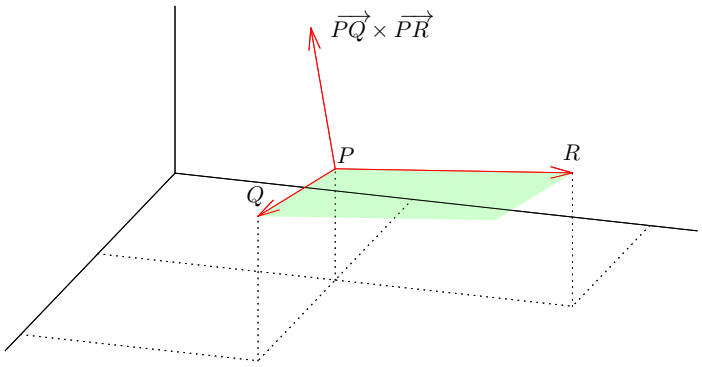
$$B_{ij} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A_{ij},\ z = f(x, y)\},$$

a to tým lepšie, čím budú vzdialenosti $x_i - x_{i-1}$, $y_j - y_{j-1}$ menšie, teda, čím bude delenie $\mathcal{D}$ hustejšie, jemnejšie. Ten obsah sa dá vypočítať pomocou absolútnej hodnoty vektorového súčinu $\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right|$. Ale

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\mu(A_{ij})$$

teda

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}^2}\,\mu(A_{ij}).$$



Ak túto procedúru urobíme nad každým z intervalíkov A_{ij}, dostaneme šupinovú plochu s obsahom

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}^2}\,\mu(A_{ij}),$$

čo je integrálny súčet patriaci k funkcii

$$z = g(x,y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}.$$

Integrál

$$\iint\limits_A g(x,y)\,dxdy$$

je limitou týchto integrálnych súčtov. Ale aj obsah plochy B je limitou obsahov týchto šupinkových plôch. Preto ten obsah

$$P(B) = \iint\limits_A g(x,y)\,dxdy = \iint\limits_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,dxdy. \quad (3.1)$$

3.3. Príklad. Vypočítajte obsah časti kužeľovej plochy $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ohraničenej valcovou plochou $x^2 + y^2 = 4$.

Riešenie. Máme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Preto podľa predošlého vzorca (3.1)

$$P(B) = \iint\limits_A \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy,$$

kde A je kruh so stredom v začiatku a polomerom $r = 2$. Preto

$$P(B) = \iint\limits_A \sqrt{2}\,dxdy = \sqrt{2}\pi r^2 = 4\sqrt{2}\pi.$$

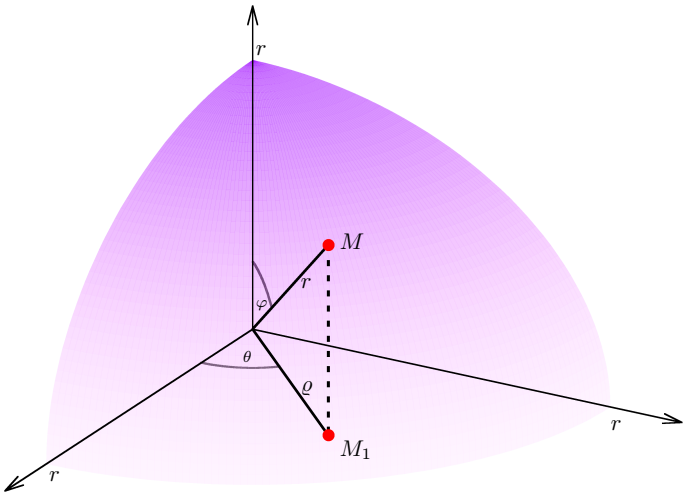
Vzorec (3.1) možno zovšeobecniť, keď namiesto plochy $z = f(x,y)$, $(x,y) \in A$ uvažujeme plochu danú parametricky:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u,v) \\ y &= \psi(u,v) \\ z &= \chi(u,v),\ (u,v) \in A \end{aligned}$$

3.4. Príklad. Zostrojme parametrické rovnice guľovej plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

ak za parametre vezmeme uhol θ, ktorý zviera polpriamka OM, kde $M = (x, y, z)$, s kladným smerom osi z a uhol φ, ktorý zviera polpriamka OM_1, kde M_1 je priemet bodu M do roviny xy, s kladným smerom osi x.



Riešenie. Súradnica z bodu M je priemetom toho bodu do osi z, teda

$$z = r\cos\theta.$$

Podobne

$$|OM_1| = r\sin\theta.$$

Preto

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi.$$

Zovšeobecnime teraz vzorec (3.1). Opäť predpokladajme, že A je rovnobežník a ku každému okienku A_{ij} zostrojme rovnobežník určený dotyčnicami ku krivkám

$$C_1 : x = \varphi(u, v_j),\ y = \psi(u, v_j),\ z = \chi(u, v_j)$$
$$C_2 : x = \varphi(u_i, v),\ y = \psi(u_i, v),\ z = \chi(u_i, v)$$

Funkciu vektorov $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ tentoraz prevezmú vektory

$$P_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right),\ P_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

kde príslušné parciálne derivácie berieme v bode (x_{i-1}, y_{j-1}). Preto obsah príslušného rovnobežníka, za predpokladu, že $P_u \times P_v \neq 0$ je

$$|P_u \times P_v| \mu(A_{ij}),$$

celá šupinatá aproximácia

$$\sum_i \sum_j |P_u \times P_v| \mu(A_{ij}),$$

jej limita

$$P(B) = \iint_A |P_u \times P_v| \, du dv \tag{3.2}$$

Isteže, patrilo by sa dokázať, že číslo $P(B)$ nezávisí od parametrizácie. To je analogická úloha, ako dôkaz toho, že dĺžka krivky

$$s(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi(t)^2 + \psi(t)^2} dt$$

nezávisí od parametrizácie $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$. V jednom i druhom prípade je hlavným pracovným prostriedkom transformácia integrálu.

3.5. Príklad. Vypočítajte obsah guľovej plochy s polomerom r.

Riešenie. Stačí nám vypočítať obsah jej osminky

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \cos\varphi, \\ y &= z \cos\theta \sin\varphi, \\ z &= r \sin\theta, \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Máme

$$\begin{aligned} P_\theta &= (-r \sin\theta \cos\varphi, -r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta), \\ P_\varphi &= (-r \cos\theta \sin\varphi, r \cos\theta \cos\varphi, 0), \\ P_\theta \times P_\varphi &= (-r^2 \cos^2\theta \cos\varphi, -r^2 \cos^2\theta \sin\varphi, -r^2 \sin\theta \cos\theta)), \\ |P_\theta \times P_\varphi| &= r^2 |\cos\theta|. \end{aligned}$$

Preto

$$P = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\theta \, d\theta = 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sin\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 4\pi r^2.$$

3.6. Príklad. Zo vzťahu (3.2) odvoďte vzťah (3.1).

Riešenie. Môžeme použiť parametrické rovnice:

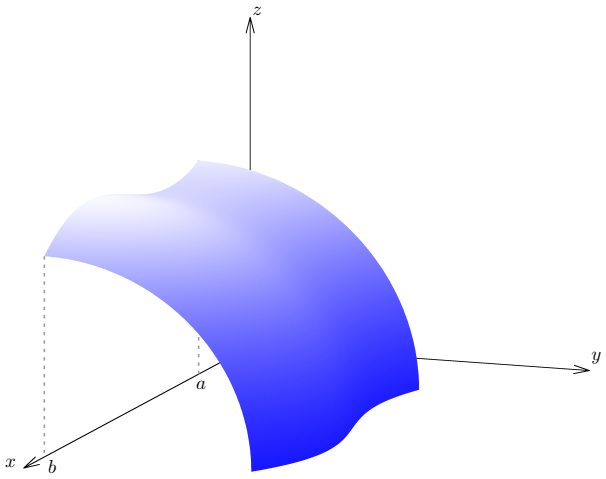
$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= f(u,v) \end{aligned}$$

$(u,v) \in A$. Potom

$$\begin{aligned} P_u &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \\ P_v &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ P_u \times P_v &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, 1\right) \\ |P_u \times P_v| &= \sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial u}^2 + \frac{\partial f}{\partial v}^2} \end{aligned}$$

teda

$$P(B) = \iint\limits_A |P_u \times P_v| \, du dv = \iint\limits_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx dy.$$



3.7. Príklad. Odvoďte vzorec pre obsah rotačnej plochy

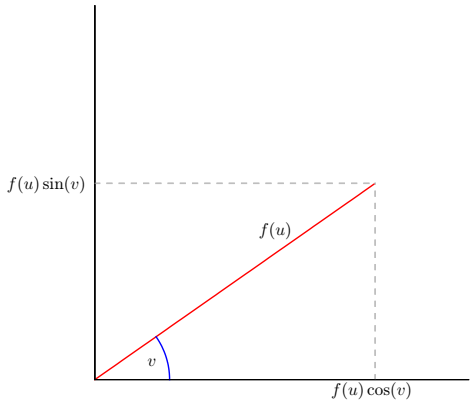
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqq x \leqq b,\, y^2 + z^2 = f(x)^2\},$$

kde f je nezáporná funkcia so spojitou deriváciou.

Riešenie. Možná parametrizácia:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= f(u)\cos v \\ z &= f(u)\sin v \end{aligned}$$

$a \leqq u \leqq b$, $0 \leqq v \leqq 2\pi$.



Máme

$$\begin{aligned} P_u &= (1, f'(u)\cos v, f'(u)\sin v) \\ P_v &= (0, f(u)\sin v, f(u)\cos v) \\ P_u \times P_v &= (f(u)f'(u), -f(u)\cos v, -f(u)\sin v) \\ |P_u \times P_v| &= f(u)\sqrt{f'(u)^2+1}. \end{aligned}$$

Preto

$$P(B) = \int_a^b du \int_0^{2\pi} f(u)\sqrt{1+f'(u)^2}\,dv = 2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1+f'(u)^2}\,du.$$

4 Transformácia dvojných integrálov

V jednorozmernom prípade sme často počítali integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ pomocou substitúcie:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Niečo podobné sa dá aplikovať aj v dvojrozmernom prípade

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy,$$

kde dosadíme $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ a namiesto bývalého $\varphi'(t)$ ešte niečo navyše.

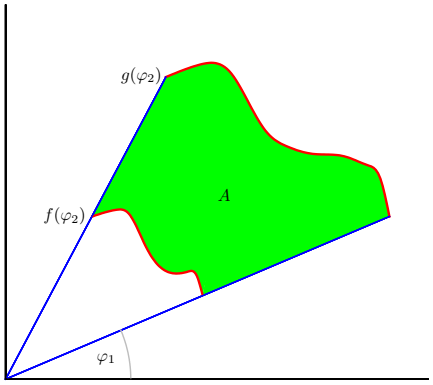
4.1. Príklad. Vypočítajte obsah množiny B tých bodov (φ, ϱ) v rovine (φ a ϱ sú ich polárne súradnice), pre ktoré platí

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2,\ f(\varphi) \leqq \varrho \leqq g(\varphi).$$

Riešenie. Množinu B budeme chápať ako plochu

$$x = \varrho \cos\varphi,\ y = \varrho \sin\varphi,\ z = 0,$$

kde $(\varphi, \varrho) \in A = \{(\varphi, \varrho) : f(\varphi) \leqq \varrho \leqq g(\varphi),\ \varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2\}$.



Máme

$$\begin{aligned} P_\varphi &= (-\varrho \sin\varphi, \varrho \cos\varphi, 0) \\ P_\varrho &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \\ P_\varphi \times P_\varrho &= (0, 0, -\varrho) \\ |P_\varphi \times P_\varrho| &= \varrho \end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned} P(B) &= \int\int_A \varrho\, d\varphi d\varrho = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{f(\varphi)}^{g(\varphi)} \varrho\, d\varrho = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_{f(\varphi)}^{g(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(g(\varphi)^2 - f(\varphi)^2\right)\, d\varphi. \end{aligned}$$

Niečo podobného možno urobiť aj vo všeobecnom prípade

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v)$$

$(u,v) \in A$, pričom

$$B = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ (u,v) \in A\}.$$

Máme parametrické rovnice

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = 0,$$

$(u,v) \in A$, teda

$$\begin{aligned} P_u &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, 0\right) \\ P_v &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, 0\right) \\ P_u \times P_v &= (0,0,J(u,v)), \end{aligned}$$

kde

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Preto

$$\mu(B) = \iint\limits_A |J(u,v)|\,dudv.$$

4.2. Veta. *Nech $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ sú funkcie so spojitými parciálnymi deriváciami na elementárnej oblasti A, zobrazenie $(u,v) \mapsto (x,y)$ je prosté, $|J(u,v)| \neq 0$ pre $(u,v) \in A$,*

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ (u,v) \in A\}.$$

Potom

$$P(B) = \iint\limits_A |J(u,v)|\,dudv.$$

Veta 4.2 je kľúčom k transformácii dvojných integrálov. Funkciu derivácie z jednorozmerného prípadu preberá v dvojrozmernom prípade funkcionálny determinant $J(u,v)$, tzv. jakobián.

4.3. Veta. *Nech sú splnené predpoklady vety 4.2. Nech f je funkcia spojitá na množine B. Potom*

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_A f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|\,dudv.$$

Dôkaz. Uvažujme delenie $\mathcal{D} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ množiny A. Jemu zodpovedá delenie $\mathcal{D}' = \{B_1, \ldots, B_n\}$ množiny B. Podľa vety o strednej hodnote integrálneho počtu (ktorá sa dokáže v dvojrozmernom prípade práve tak ako v jednorozmernom) existuje $(u_i, v_i) \in A_i$, že

$$\iint\limits_{A_i} |J(u,v)|\,dudv = |J(u_i, v_i)|\mu(A_i).$$

Položíme $x_i = \varphi(u_i, v_i)$, $y_i = \psi(u_i, v_i)$. Uvažujme integrálny súčet

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{D}') &= \sum_i f(x_i, y_i)\mu(B_i) = \\ &= \sum_i f(x_i, y_i) \iint\limits_{A_i} |J(u,v)|\,dudv = \\ &= \sum_i f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i))|J(u_i, v_i)|\mu(A_i) \end{aligned}$$

Ak definujeme $g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J(u,v)|$, tak posledný súčet je vlastne

$$S(g, \mathcal{D}),$$

teda

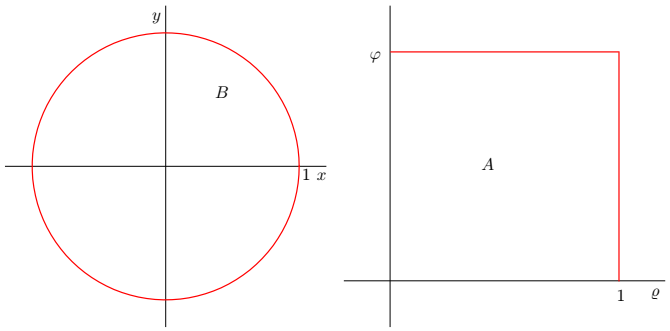
$$S(f, \mathcal{D}') = S(g, \mathcal{D}).$$

Pretože f, g sú spojité funkcie, sú integrovateľné. Preto

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_A g(u,v)\,dudv = \iint\limits_A f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J(u,v)|\,dudv.$$

4.4. Dôsledok. (Transformácia pomocou polárnych súradníc.) *Ak f je funkcia spojitá na množine B, tak*

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_A f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\,d\varrho d\varphi.$$



Dôkaz. Máme $g(\varphi, \varrho) = \varrho \cos\varphi$, $h(\varphi, \varrho) = \varrho \sin\varphi$. Preto

$$J(\varphi, \varrho) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial \varrho} & \frac{\partial h}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varrho \sin\varphi & \varrho \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} =$$
$$= -\varrho \sin^2\varphi - \varrho \cos^2\varphi = -\varrho \left(\sin^2 + \cos^2\right) = -\varrho,$$
$$|J(\varphi, \varrho)| = \varrho.$$

4.5. Príklad. Vypočítajte objem telesa ohraničeného kužeľovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a paraboloidom $z = 2 - x^2 - y^2$.

Riešenie. Najprv nájdeme priesečnicu tých dvoch plôch:

$$z = 2 - z^2,\ z^2 + z - 2 = 0,\ z_{1,2} = 1, -2.$$

Pretože $z > 0$, máme jediné riešenie $z = 1$, teda

$$1 = 2 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1.$$

priesečnicou je kružnica so stredom v začiatku a polomerom 1. Integrovať budeme cez kruh B, ktorý táto kružnica ohraničuje. Naše teleso je zhora ohraničené paraboloidom $z = 2 - x^2 - y^2$, zdola kužeľovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Preto jeho objem bude rozdielom objemov:

$$V = \iint_B (2 - x^2 - y^2)\, dxdy - \iint_B \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy =$$
$$= \iint_B \left(2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy.$$

Ak zavedieme polárne súradnice $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, dostaneme

$$V = \iint\limits_A \left(2 - \varrho^2 - \sqrt{\varrho^2}\right) \varrho\, d\varphi d\varrho,$$

kde $A = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$. Preto

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2\varrho - \varrho^3 - \varrho^2)\, d\varrho = \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[\varrho^2 - \frac{\varrho^4}{4} - \frac{\varrho^3}{3}\Big]_0^1 d\varphi = 2\pi\frac{5}{12} = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

5 Aplikácie

Dotkneme sa len troch: obsahu rovinnej množiny, jej ťažiska a ťažiska telesa. V tom treťom prípade trochu rozšírime náš arzenál tým, že bez akejkoľvek teórie použijeme trojné integrály.

5.1 Obsah rovinnej množiny

Základnou geometrickou interpretáciou dvojného integrálu $\iint\limits_A f(x,y)\, dxdy$ bol objem telesa, ktorého strecha má rovnicu $z = f(x,y)$ (f je nezáporná, spojitá funkcia na množine A). Ak je tá strecha rovná, t.j $f(x,y) = 1$, dostaneme valcovité teleso

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\, 0 \leqq z \leqq 1\}.$$

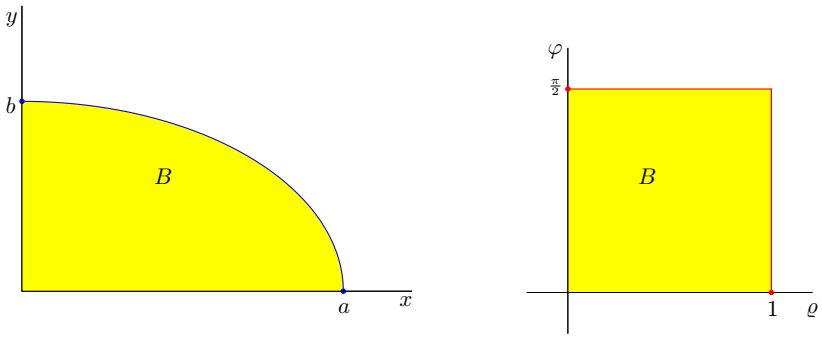
Jeho objem je

$$V(B) = \mu(A) \cdot 1 = \mu(A).$$

Preto obsah $\mu(A)$ množiny A možno vyjadriť aj pomocou dvojného integrálu, teda

$$\mu(A) = V(B) = \iint\limits_A 1\, dxdy.$$

5.1. Príklad. Vypočítajte obsah množiny ohraničenej elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Riešenie. Zavedieme transformáciu $\frac{x}{a} = \varrho\cos\varphi$, $\frac{y}{b} = \varrho\sin\varphi$, teda $x = a\varrho\cos\varphi$, $y = b\varrho\sin\varphi$. Keďže nám stačí vypočítať štvrtinu toho obsahu, vezmeme $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ a pravdaže, $0 \leqq \varrho \leqq 1$. Vypočítajme hodnotu jakobianu:

$$J(\varrho,\varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi \\ -a\varrho\sin\varphi & b\varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\varrho\cos^2\varphi + ab\varrho\sin^2\varphi = ab\varrho.$$

Preto

$$\mu(A) = \iint\limits_A 1\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 1\cdot|J(\varrho,\varphi)|\,d\varrho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 ab\varrho\,d\varrho =$$
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 d\varphi = \frac{ab}{2}\Big[\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4},$$

teda obsah celej tej množiny je πab.

Na obsah rovinnej množiny sa môžeme dívať ešte z iného hľadiska, totiž ako na obsah plochy. V §3 sme sa zamysleli nad vzorcom

$$S(C) = \iint\limits_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

kde

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ z = f(x,y)\}.$$

V našom prípade $f(x,y)=1$, teda $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, teda

$$S(C)=\iint\limits_A \sqrt{1+0+0}\,dxdy=\iint\limits_A dxdy.$$

Konečne, rozpamätajme sa na výpočet obsahu pomocou jednorozmerných integrálov. Ak

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leqq x\leqq b,\ \varphi(x)\leqq y\leqq\psi(x)\},$$

tak

$$\mu(A)=\iint\limits_A 1\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1\,dy=\int_a^b \Big[y\Big]_{\varphi(x)}^{\psi(x)}dx=\int_a^b(\psi(x)-\varphi(x))\,dx,$$

čo úplne korešponduje s našimi predošlými vedomosťami.

5.2 Ťažisko

Budeme sa inšpirovať konečnou sústavou hmotných bodov ležiacich na priamke. Nech tie hodnoty majú súradnice $x_1,\dots,x_n$ a hmotnosti $m_1,\dots,m_n$. Potom ťažisko T má súradnicu

$$x_T=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

V prípade rovinnej elementárnej oblasti

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leqq x\leqq b,\ \varphi(x)\leqq y\leqq\psi(x)\},$$

namiesto x_i budeme pracovať s ľubovoľným bodom $(x,y)\in A$, namiesto m_i s mernou hmotnosťou $\varrho(x,y)$. Potom

$$x_T=\frac{\iint\limits_A x\varrho(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_A \varrho(x,y)\,dxdy}$$

a analogicky sa vypočíta y_T.

5.2. Príklad. Vypočítajte ťažisko homogénneho štvrťkruhu.

Riešenie. V tomto prípade $\varrho(x,y) = k$ je konštantná. Preto po zavedení polárnych súradníc máme

$$\iint\limits_A xk\,dxdy = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \varrho\cos\varphi\cdot\varrho\,d\varrho = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^R d\varphi =$$

$$= k\frac{R^3}{3}\Big[\sin\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{kR^3}{3},$$

$x_T = \frac{\frac{kR^3}{3}}{\frac{k\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$. Vzhľadom na symetriu aj $y_T = \frac{4R}{3\pi}$, teda $T = \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

5.3. Príklad. Odvoďte vzorce pre výpočet ťažiska homogénnej elementárnej oblasti $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$.

Riešenie. Keďže merná hustota je konštantná, v čitateli, aj menovateli sa nám vykráti. Stačí vypočítať

$$\iint\limits_A x\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} x\,dy = \int_a^b \Big[xy\Big]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx = \int_a^b x(\psi(x)-\varphi(x))\,dx,$$

$$x_T = \frac{1}{\mu(A)}\int_a^b x(\psi(x)-\varphi(x))\,dx,$$

kde

$$\mu(A) = \int_a^b (\psi(x)-\varphi(x))\,dx.$$

Ďalej,

$$\iint\limits_A y\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} y\,dy =$$

$$= \int_a^b \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx = \frac{1}{2}\int_a^b (\psi(x)^2 - \varphi(x)^2)\,dx,$$

$$y_T = \frac{1}{2\mu(A)}\int_a^b (\psi(x)^2 - \varphi(x)^2)\,dx.$$

5.3 Ťažisko telesa

Možno postupovať analogicky s dvojrozmerným prípadom, len dvojné integrály nahradíme trojnými:

$$x_T = \frac{\iiint\limits_B x\varrho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\,dxdydz},$$

kde $\varrho(x,y,z)$ je merná hmotnosť v bode (x,y,z). Ak

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ \varphi(x,y) \leqq z \leqq \psi(x,y)\},$$

tak (Fubiniho veta)

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_A \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dxdy.$$

5.4. Príklad. Vypočítajte ťažisko osminy gule s polomerom R.

Riešenie. Máme $\varphi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,

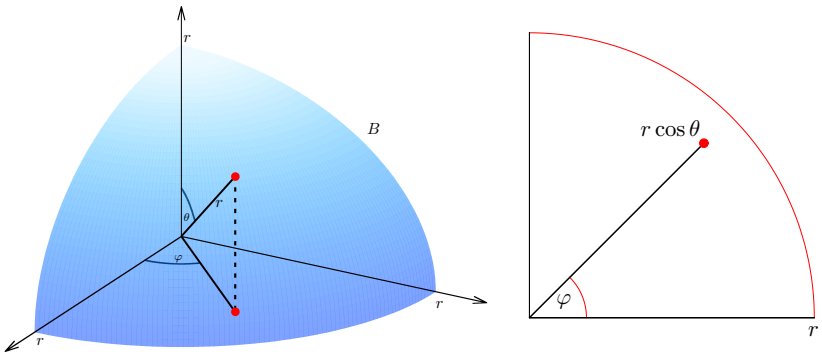
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

Preto

$$\iiint_B x\,dxdydz = \iint_A \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \right] dxdy = \iint_A x \Big[z \Big]_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy =$$
$$= \iint_A x\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

a pri integrovaní nám veľmi nepomôžu ani polárne súradnice, hoci integrujeme cez štvťkruh. Použiť môžeme sférické súradnice (príklad 3.4):

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$



kde $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq r \leqq R$. Pravda, podobne, ako v dvojrozmernom prípade, nestačí do príslušnej funkcie len dosadiť, ale výsledok treba vynásobiť funkcionálnym determinantom

$$\begin{aligned} J(r,\theta,\varphi) &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \sin\theta\cos\varphi r^2\sin^2\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi\cdot(-r^2\sin^2\theta\sin\varphi) + \\ &+ \cos\theta(r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi) = \\ &= r^2\sin^3\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + r^2\sin\theta\cos^2\theta = \\ &= r^2\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Preto

$$\iiint\limits_B x\,dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r\sin\theta\cos\varphi\cdot r^2\sin\theta\,dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta \int_0^R r^3\,dr = 1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16},$$

$x_T = \frac{\frac{\pi R^4}{16}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3R}{8}$ a vzhľadom na symetriu

$$T = \left(\frac{3R}{8}, \frac{3R}{8}, \frac{3R}{8}\right).$$

5.4 Objem telesa

Hmotnosť telesa B je trojný integrál

$$\iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\,dxdydz,$$

kde $\varrho(x,y,z)$ je merná hmotnosť v bode (x,y,z). Totiž, ak uvažujeme integrálny súčet

$$S(\varrho,\mathcal{D}) = \sum_i\sum_j\sum_k \varrho(x_i,y_j,z_k)V(A_{ijk}),$$

pre "dosť malý"A_{ijk}, číslo $\varrho(x_i,y_j,z_k)V(A_{ijk})$ predstavuje hmotnosť kúska A_{ijk}, teda uvedený integrálny súčet aproximuje teleso B, uvedený integrál sa rovná jeho hmotnosti. Ak $\varrho(x,y,z)=1$, dostaneme objem $V(B)$ telesa B

$$V(B) = \iiint\limits_B 1\,dxdydz.$$

5.5. Príklad. Vypočítajte objem gule s polomerom R.

Riešenie. Zavedieme sférické súradnice:

$$V(B) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} (r^2 \sin\theta)\, dr = \\ = \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^{R} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

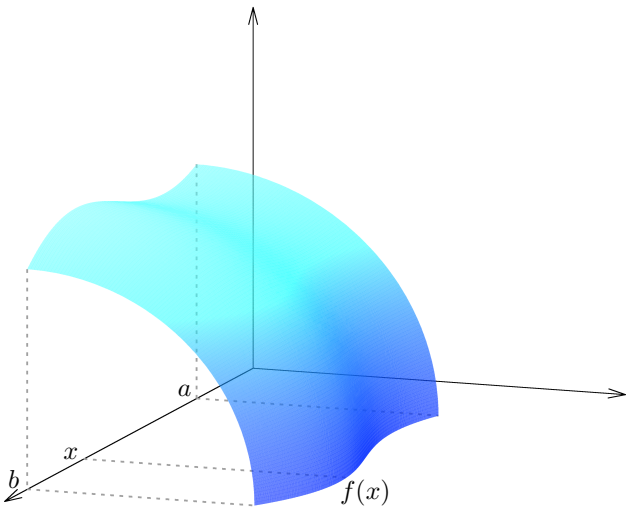
5.6. Príklad. Vypočítajte objem telesa

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A,\ \varphi(x, y) \leqq z \leqq \psi(x, y)\}.$$

Riešenie.

$$V(B) = \iiint_B 1\, dxdydz = \iint_A \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1\, dz\right] dxdy = \\ = \iint_A \psi(x, y)\, dxdy - \iint_A \varphi(x, y)\, dxdy.$$

5.7. Príklad. Odvoďte vzorec pre výpočet objemu rotačného telesa $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqq x \leqq b,\ y^2 + z^2 \leqq f(x)^2\}$.



Riešenie. Zavedieme transformáciu

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= u\cos v \\ z &= u\sin v, \end{aligned}$$

kde $a \leqq t \leqq b$, $0 \leqq u \leqq f(t)$, $0 \leqq v \leqq 2\pi$. Príslušný jakobián:

$$J(t,u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u(\cos^2 v + \sin^2 v) = u.$$

Preto

$$V(B) = \int_a^b dt \int_0^{2\pi} dv \int_0^{f(t)} u\,du = \int_a^b 2\pi \Big[\frac{u^2}{2}\Big]_0^{f(t)} dt = \pi \int_a^b f^2(t)\,dt.$$

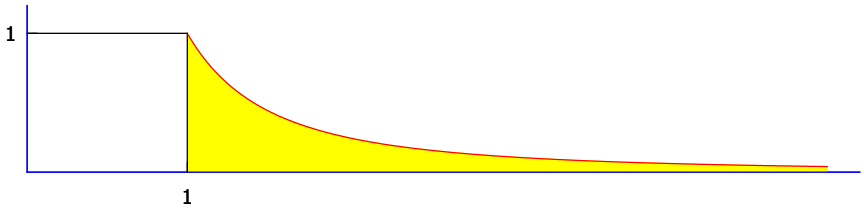
6 Nevlastné integrály

Popri výpočte obsahu množiny $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b,\ 0 \leqq y \leqq f(x)$ (čo je integrál $\int_a^b f(x)\,dx$) je rozumné uvažovať aj o výpočte obsahu neohraničenej množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x,\ 0 \leqq y \leqq f(x)\}$, čo sa vyznačuje ako

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Napr.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$



by mal byť obsah množiny ohraničenej priamkami $y = 0$, $x = 1$ a krivkou $y = \frac{1}{x^2}$. Ľahko sa vypočíta napr.

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Ak nahradíme číslo 3 dostatočne veľkým číslom, oveľa lepšie sa priblížime k číslu $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, teda obsahu tej neohraničenej množiny. Núka sa prístup

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1.$$

6.1. Definícia. Nech f je funkcia ohraničená na intervale $\langle a,\infty)$ a nech existuje $\int_a^t f(x)\,dx$ pre ľubovolné $t > a$. Potom f je integrovateľná na intervale $\langle a,\infty)$, ak existuje limita

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

6.2. Príklad. Zistite, či existuje $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$.

Riešenie. Máme

$$\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_1^t = \ln t - \ln 1 = \ln t.$$

Pravda, $\lim\limits_{t\to\infty}\ln t = \infty$, preto funkcia $y = \frac{1}{x}$ nie je integrovateľná na intervale $\langle 1,\infty)$. Používame aj terminológiu $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje, ak existuje $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$, resp. $\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje, v opačnom prípade.

6.3. Definícia. Nech f je funkcia ohraničená na intervale $(-\infty,a\rangle$ a integrovateľná na množine $\langle t,a\rangle$ pre všetky $t < a$. Potom f je integrovateľná na množine $(-\infty,a\rangle$, ak existuje

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx.$$

6.4. Príklad. Vypočítajte $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx$.

Riešenie. Podľa definície

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\Big[-\frac{1}{2x^2}\Big]_t^{-1} = \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Pravdaže, výsledok vyšiel záporne, lebo celá tá množina sa nachádza pod osou x, teda obsah tej neohraničenej množiny je $\frac{1}{2}$.

6.5. Definícia. Hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na $(-\infty, \infty)$, ak existuje také $a \in \mathbb{R}$, že f je integrovateľná na $(-\infty, a\rangle$,aj na $\langle a, \infty)$. Integrál definujeme rovnosťou

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Všimnime si, že definícia integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nezávisí od výberu čísla a. Nech $b \in \mathbb{R}$ je ľubovolné. Nech napr. $a < b$. Pretože f je integrovateľná na $\langle a, \infty)$, je integrovateľná aj na $\langle a, b\rangle$ a preto aj na $\langle t, b\rangle$ pre ľubovolné $t < b$. Existuje teda $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ a navyše

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \Big(\int_{t}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} f(x)\,dx \Big) =$$
$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Podobne sa ukáže, že existuje $\int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$. Z predošlej rovnosti a rovnosti $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$ dostávame, že

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Nie vždy, ba možno povedať málokedy, sme schopní nájsť primitívnu funkciu k danej funkcii a tak štandardným spôsobom, vyššie uvedeným spôsobom vypočítať $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$. Napriek tomu niekedy možno dokázať, že daný integrál konverguje. Ukážeme to na jednom jedinom príklade — Laplaceovom integráli, ktorý hrá kľúčovú úlohu v teórii pravdepodobnosti a jej aplikáciách.

6.6. Propozícia. *Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ existuje.*

Dôkaz. Pretože funkcia $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ je spojitá na $(-\infty, \infty)$ je spojitá aj na intervale $\langle -1, 1\rangle$, teda je tam integrovateľná. Zostáva nám dokázať existenciu integrálov $\int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, $\int_{1}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$. Urobíme tak v druhom prípade, v prvom to možno urobiť podobne. Položme pre $t > 1$

$$g(t) = \int_{1}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Funkcia g je neklesajúca. Chceme dokázať, že existuje $\lim_{t\to\infty} g(t)$. To sa však stane vtedy a len vtedy, keď bude g ohraničená (zhora; zdola je, pretože je nezáporná). Ľahko vidieť, že pre $x > 1$ platí $x \leqq e^x$. (Podrobný dôkaz napr.: funkcia $f : x \mapsto e^x - x$ je neklesajúca na $\langle 1, \infty)$, lebo $f'(x) = e^x - 1 \leqq 0$ pre $x \in \langle 1, \infty)$; preto $0 = f(1) \leqq f(x) = e^x - x$ pre všetky $x > 1$.) Odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned} x &\leqq e^x, \\ e^{-x} &\leqq \frac{1}{x}, \\ e^{-\frac{x^2}{2}} &\leqq \frac{2}{x^2}, \end{aligned}$$

teda

$$g(t) = \int_1^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leqq 2\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx \leqq 2\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

(pozri príklad pred definíciou 6.1).

6.7. Propozícia. *Ak existuje* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$*, tak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx.$$

Dôkaz. Podľa definície

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx, \\ \int_0^\infty f(x)\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{0} f(x)\,dx + \\ + \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big(\int_{-t}^{0} f(x)\,dx + \int_0^t f(x)\,dx\Big) = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Obrátenie tvrdenia 6.7 nie je pravdivé:

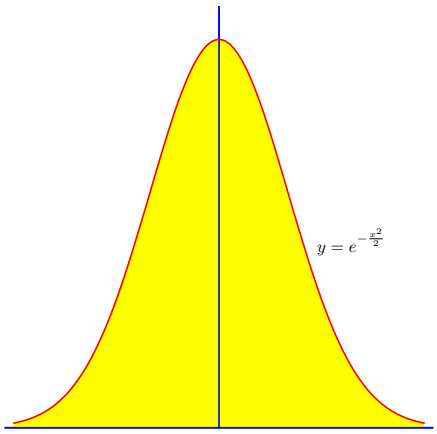
6.8. Príklad. Zostrojte takú funkciu f, aby existovala $\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$, ale integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ neexistoval.

Riešenie. Zostrojíme funkciu f tak, aby bola nepárna. V tom prípade totiž $\int_{-t}^{t} f(x)\,dx = 0$ pre každé $t > 0$, teda nulová je aj uvedená limita. Na druhej strane zostrojíme funkciu f dostatočne veľkú, aby napr. $\int_1^\infty f(x)\,dx$ neexistoval (pozri príklad 6.2):

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ ak } -1 \leqq x \leqq 1 \\ \frac{1}{x} \text{ v opačnom prípade} \end{cases}$$

Príklad 6.8 slúžil na výstrahu. My sme však ukázali (Prop.6.6), že Laplaceov integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ existuje. Môžeme ho teda vypočítať pomocou limity

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

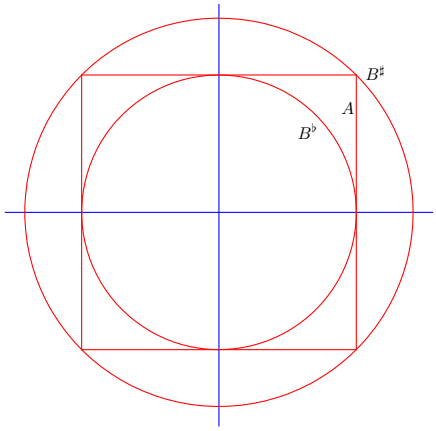


6.9. Veta. *Pre Laplaceov integrál platí* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Dôkaz. Urobíme ho pomocou dvojných integrálov. Nech A je štvorec, $A = \langle -t, t\rangle \times \langle -t, t\rangle$. Podľa Fubiniho vety platí

$$\iint_A e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy = \int_{-t}^{t} dx \int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy =$$

$$= \Big(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\Big)\Big(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\Big) = \Big(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\Big)^2.$$



Nech $B^\flat$ je kruh so stredom v začiatku a polomerom r. Ak použijeme polárne súradnice, dostaneme

$$\iint_B e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r e^{-\frac{\varrho^2}{2}} \cdot \varrho\, d\varrho = 2\pi\left[-e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\right]_0^r = 2\pi\left(1 - e^{-\frac{r^2}{2}}\right).$$

Ak $B^\sharp$ je kruh opísaný štvorcu A (má teda polomer $t\sqrt{2}$) a $B^\flat$ je kruh vpísaný do štvorca A (polomer t), tak

$$\iint_{B^\flat} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy = \iint_A e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy \leqq \iint_{B^\sharp} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy,$$

$$2\pi\left(1 - e^{-\frac{t^2}{2}}\right) \leqq \left(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2 \leqq 2\pi\left(1 - e^{-t^2}\right).$$

Preto

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2 = 2\pi,$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Skutočným cieľom tohto paragrafu bolo ukázať, ako vtipne možno použiť dvojné integrály v reálnej analýze. Keď sme však už zaviedli nevlastné integrály, bolo by hriechom nepoužiť ich na zisťovanie konvergencie nekonečných radov.

6.10. Veta. (Cauchyho integrálne kritérium.) *Nech f je nezáporná, nerastúca funkcia na intervale $\langle 1, \infty)$, $f(n) = a_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Potom integrál $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje práve vtedy, keď konverguje nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Dôkaz. $\Rightarrow$: Uvážme, že $a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)\,dx$.
Preto $S_n \leq a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx$ $(n = 1, 2, \dots)$. Vzhľadom na to, že postupnosť čiastočných súčtov $(S_n)_{n=1}^\infty$ je neklesajúca a zhora ohraničená, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\Leftarrow$: Nech $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverguje.
Platí nerovnosť $S_n = a_1 + \cdots + a_n > \int_1^{n+1} f(x)\,dx$.
Preto $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geqq \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \infty$, teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje tiež.

Literatúra

[1] Ivan J.: Matematika 1, Bratislava, Alfa, 1983.

[2] Ivan J.: Matematkka 2, Bratislava, Alfa, 1989.

[3] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M.: Matematika I, Bratislava, SNTL, 1961.

[4] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M.: Matematika II, Bratislava, SNTL, 1963.

Názov:	Dvojné integrály
Autor:	Dr.h.c. prof. RNDr. Riečan Beloslav, DrSc.
Recenzenti:	prof. RNDr. Doboš Jozef, CSc.
	doc. RNDr. Vrábel Peter, CSc.
Náklad:	50 ks
Rozsah:	41 strán
Formát:	CD
Vydanie:	prvé
Vydavateľ:	Fakulta prírodných vied UMB Banská Bystrica
ISBN	**978-80-557-0334-3**