8

FUNKCIONÁLNE PRIESTORY

8.1 HILBERTOV PRIESTOR

8.1 Definícia. *Predhilbertovým priestorom nazývame lineárny priestor H so skalárnym súčinom, t. j. s takým zobrazením $(\cdot, \cdot)$: $H \times H \to R$, že platí*

1. $(x, x) \geqq 0$ *pre všetky* $x \in H$; $(x, x) = 0$ *práve vtedy, keď* $x = 0$,
2. $(x, y) = (y, x)$ *pre všetky* $x, y \in H$,
3. $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$ *pre všetky* $x, y \in H$, $\lambda \in R$,
4. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ *pre všetky* $x_1, x_2, y \in H$.

8.2 Príklady

1. *Priestor* R^n

Prvkami sú usporiadané n-tice reálnych čísel. Ak operácie definujeme po zložkách, teda pre $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\alpha \in R$ definujeme $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$, potom R^n je zrejme (reálnym) lineárnym priestorom. Skalárny súčin v ňom definujeme rovnosťou $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Vlastnosti 1—4 sú zrejme splnené. Osobitnú pozornosť si zaslúžia prípady $n = 2$, prípadne $n = 3$, ktoré sú nám známe z geometrie. Ak definujeme skalárny súčin vektorov x, y ako $|x|\,|y| \cos\varphi$, kde $|x|$, $|y|$ sú ich dĺžky a uhol, ktorý zvierajú, a ak $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ sú vyjadrenia týchto vektorov pomocou súradníc, potom sa skalárny súčin vypočíta pomocou formule $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

2. *Priestor* l^2

Prvkami sú všetky postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ reálnych čísel také, že $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$. Operácie sú definované opäť po zložkách, teda $(x_i)_{i=1}^{\infty} + (y_i)_{i=1}^{\infty} = (x_i + y_i)_{i=1}^{\infty}$, $\alpha (x_i)_{i=1}^{\infty} = (\alpha x_i)_{i=1}^{\infty}$, pravda, treba dokázať, že postupnosti $x + y$ a αx patria do l^2. O postupnosti $\alpha x = (\alpha x_i)_{i=1}^{\infty}$ je to jasné, pretože $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i)^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$. Z elementárnej nerovnosti $(a+b)^2 \leqq 2(a^2+b^2)$ a z porovnávacieho kritéria vyplýva konvergencia radu $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)^2$. Priestor l^2 je teda lineárny. Skalárny súčin budeme definovať pomocou vzťahu $(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i$. Tento rad konverguje, dokonca absolútne, čo vyplýva z nerovnosti $|ab|\leqq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Overenie samých vlastností 1—4 je už ľahké.

3. *Priestor $C(a, b)$*

Prvkami sú všetky funkcie spojité na intervale $\langle a, b\rangle$. Operácie definujeme opäť po zložkách $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, skalárny súčin pomocou integrálu $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Overenie každej z axióm je ľahké. V prípade axiómy 1 si stačí uvedomiť, že určitý integrál z nezápornej, spojitej funkcie je nula vtedy a len vtedy, keď $f=0$.

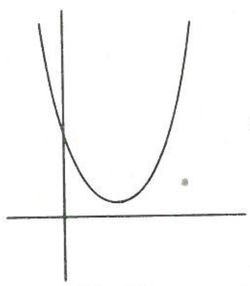
8.3 Propozícia *(Cauchyho nerovnosť). Nech H je predhilbertov priestor, potom pre všetky $x, y\in H$ platí*

$$|(x, y)|\leqq\sqrt{(x, x)}\,\sqrt{(y, y)}.$$

D ô k a z. Použitie axiómy 1, ako aj ostatných (najmä distributívneho zákona) okamžite vedie k nerovnosti

$$0\leqq(\alpha x+y, \alpha x+y)=\alpha^2(x, x)+2\alpha(x, y)+(y, y),$$

ktorá platí pre každé $\alpha\in R$. Lenže kvadratický trojčlen $a\alpha^2+b\alpha+c\geqq 0$ pre všetky $\alpha\in R$ práve vtedy, keď tento trojčlen nemá reálne rôzne korene (obr. 16), a to je



Obr. 16

práve vtedy, keď $b^2-4ac\leqq 0$. Dostávame teda ($a=(x, x)$, $b=2(x, y)$, $c=(y, y)$)

$$4(x, y)^2-4(x, x)(y, y)\leqq 0,$$

čo je ekvivalentné s nerovnosťou

$$|(x, y)|\leqq\sqrt{(x, x)}\,\sqrt{(y, y)}. \quad \square$$

8.4 Príklady

Z propozície 8.3 bezprostredne vyplývajú viaceré známe nerovnosti, napr. pre všetky reálne čísla x_i, y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ platí

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

(Cauchyho nerovnosť aplikovaná na R^n), alebo, čo je to isté,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Pre všetky postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in l^2$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right).$$

Pre každé dve funkcie f, g spojité na $\langle a, b\rangle$ platí

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Cauchyho nerovnosť však má aj dôsledky iného druhu. Jeden z nich uvedieme.

8.5 Definícia. *Lineárny priestor H sa nazýva normovaným, ak existuje také zobrazenie $\|\cdot\|: H \to R$, že platí*

1. $\|x\| \geqq 0$ *pre všetky* $x \in H$; $\|x\| = 0$ *práve vtedy, keď* $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ *pre všetky* $x \in H$, $\alpha \in R$,
3. $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ *pre všetky* $x, y \in H$.

8.6 Propozícia. *Nech H je predhilbertov priestor. Pre ľubovoľné $x \in H$ položme $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, potom je H s normou $\|\cdot\|$ lineárnym normovaným priestorom.*

D ô k a z. Prvá vlastnosť je zrejmá, druhá vyplýva ľahko z definície $\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha^2\|x\|^2$, teda $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$. K dôkazu tretej vlastnosti normy použijeme Cauchyho nerovnosť

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqq$$
$$\leqq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square$$

8.7 Príklady

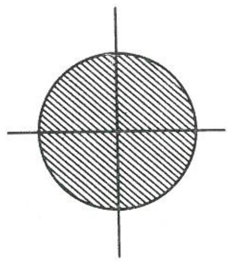
1. *Priestor R^n.* Ukázali sme, že je to predhilbertov priestor so skalárnym súčinom $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, teda s normou $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Norma $\|x\|_2$ je obvyklá Euklidova vzdialenosť bodu x od začiatku (na obr. 17 vidieť jednotkovú guľu, t.j.

množinu $\{x \in R^2;\ \|x\|_2 \leqq 1\}$). Lenže v priestore R^n možno zaviesť aj iné funkcie $\|\cdot\|$ také, aby R^n bol normovaný. Uvedieme ešte dve:

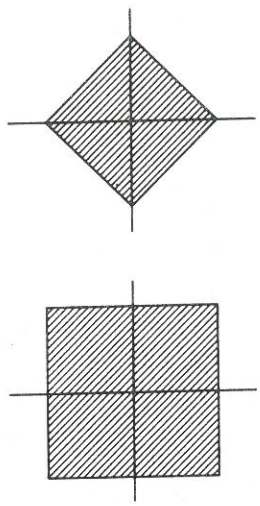
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

2. *Priestor* l^2. Normu $\|x\|_2$ v l^2 možno odvodiť od skalárneho súčinu

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}.$$



Obr. 17



Obr. 18

3. *Priestor* l^1. Je to množina všetkých postupností $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré rad $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ konverguje. Ak definujeme $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$, dostávame, zrejme, normovaný priestor.

4. *Priestor* $C(a, b)$. Videli sme, že priestor všetkých funkcií spojitých na intervale $\langle a, b \rangle$ je predhilbertov, $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$, takže jednu normu by sme mali

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\, dx}.$$

Iná, obvyklejšia norma je tzv. supremálna

$$\|f\| = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x)|.$$

8.8 Propozícia. *Nech H je lineárny normovaný priestor, $\varrho\colon H\times H\to R$, $\varrho(x, y)=\|x-y\|$, potom je (H, ϱ) metrický priestor.*

D ô k a z je triviálny. Napríklad trojuholníková nerovnosť

$$\begin{aligned}\varrho(x, y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\leqq\\ \leqq\|x-z\|+\|z-y\|=\varrho(x, z)+\varrho(z, y).\quad\square\end{aligned}$$

8.9 Definícia. *Predhilbertov priestor sa volá Hilbertovým, ak je úplný (t. j. každá Cauchyho postupnosť je konvergentná) v metrike odvodenej od skalárneho súčinu (t. j. $\varrho(x, y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y, x-y)}$). Lineárny normovaný priestor, ktorý je úplný v metrike odvodenej od normy (t. j. v metrike $\varrho(x, y) = \|x-y\|$) sa volá Banachov.*

8.10 Propozícia. *Priestor l^1 je Banachov, priestor l^2 Hilbertov.*

D ô k a z. Obe tvrdenia dokážeme naraz. Nech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyho postupnosť v priestore l^p, kde p je 1 alebo 2. Označme

$$x_n=(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots).$$

takže $\|x_n\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_n^{(k)}|^p\right)^{1/p}$. Keďže postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyho, k ľubovoľnému $\varepsilon>0$ existuje také n_0, že pre všetky n, $m\geqq n_0$ je $\varrho(x_n, x_m)<\varepsilon$. Avšak

$$|x_n^{(k)}-x_m^{(k)}|^p\leqq\sum_{i=1}^{\infty}|x_n^{(i)}-x_m^{(i)}|^p=\varrho(x_n, x_m)^p<\varepsilon^p,$$

teda postupnosť reálnych čísel $(x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyho pre každé k. Keďže priestor R s obvyklou metrikou $\varrho(x, y)=|x-y|$ je úplný, existuje ku každému k také $x^{(k)}$, že

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(k)}=x^{(k)}.$$

Dostali sme vlastne schému

$$\begin{aligned}x_1&=(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(k)}, \ldots)\\ x_2&=(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_2^{(k)}, \ldots)\\ &\vdots\\ x_n&=(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)\\ &\vdots\end{aligned}$$

Limitný prvok $x\in l^p$ pozbierame z jednotlivých limít $x^{(k)}$, teda $x=(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$. Pravdaže, treba ešte dokázať, že $x\in l^p$ a navyše, že $x_n\to x$ v priestore l^p. Zrejme platí

$$\sum_{k=1}^{q}|x_n^{(k)}-x_m^{(k)}|^p\leqq\sum_{k=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_m^{(k)}|^p<\varepsilon^p$$

pre všetky n, $m\geqq n_0$. Fixujme q, n a nech $m\to\infty$, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{q}|x_n^{(k)}-x^{(k)}|^p=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{q}|x_n^{(k)}-x_m^{(k)}|^p\leqq\varepsilon^p.$$

Keďže posledná nerovnosť platí pre každé q, máme

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x^{(k)}|^p\leqq\varepsilon^p,\quad n\geqq n_0. \tag{8.1}$$

Z (8.1) vyplýva, že postupnosť $x_n-x=(x_n^{(k)}-x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ patrí do l^p; lenže l^p je lineárny priestor, preto

$$x=x_n-(x_n-x)\in l^p \tag{8.2}$$

Z (8.1) ďalej vyplýva, že k ľubovoľnému kladnému číslu ε existuje také n_0, že pre všetky $n\geqq n_0$ platí

$$\varrho(x_n,x)=\|x_n-x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x^{(k)}|^p\right)^{1/p}\leqq\varepsilon,$$

teda $x_n\to x$, $x\in l^p$, l^p je úplný. □

8.2 ÚPLNÉ ORTONORMÁLNE SYSTÉMY

Už sme nadpisov a názvov uviedli dosť. V tomto odseku chceme poukázať na opodstatnenosť a užitočnosť ich zavedenia.

8.11 Definícia. *Postupnosť $(e_i)_{i\in I}$ (konečná alebo nekonečná) prvkov predhilbertovho priestoru H tvorí ortogonálny systém, ak pre všetky $i, j\in I$, $i\neq j$ platí*

$$(e_i,e_j)=0.$$

Ortogonálny systém $(e_i)_{i\in I}$ sa volá ortonormálnym, ak $\|e_i\|=1$ pre všetky $i\in I$. Inak povedané $(e_i)_{i\in I}$ je ortonormálny vtedy, ak

$$(e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & ak\ i=j,\\ 0, & ak\ i\neq j.\end{cases}$$

8.12 Príklady. V priestore R^2 ortonormálny systém tvoria napr. vektory $i=(1,0)$, $j=(0,1)$. Keďže pre skalárny súčin vektorov $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ platí $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2=\|x\|\,\|y\|\cos\varphi$, dva nenulové vektory sú ortogonálne práve vtedy, keď $\cos\varphi=0$, t.j. $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Odtiaľ je aj názov ortogonálne (kolmé).

V priestore l^2 ortonormálny systém tvoria vektory $e_1, e_2, \ldots$, kde e_i je postupnosť samých núl, iba na i-tom mieste je jednotka. Inak povedané

$$e_i=(\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}.$$

V priestore $C(-\pi,\pi)$ ortogonálny systém tvoria funkcie

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$$

Netvoria síce ortonormálny systém, ale to nie je žiadne nešťastie. Ak $(x_i)_{i\in I}$ je ortogonálny systém a žiaden z vektorov x_i nie je nulový, stačí položiť $y_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$ a dostaneme ortonormálny systém $(y_i)_{i\in I}$. V našom prípade trigonometrických funkcií to bude systém

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots$$

Podobne ako v klasickom prípade, aj vo všeobecnej teórii pôjde o aproximáciu. Hodne svetla do situácie vnáša nasledujúce, inak veľmi jednoduché tvrdenie.

8.13 Propozícia. *Nech $e_1, \ldots, e_n$ tvoria ortonormálny systém, $x \in H$. Definujme funkciu $f\colon R^n \to R$ rovnosťou*

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|,$$

potom funkcia f nadobúda najmenšiu hodnotu v bode $(c_1, \ldots, c_n)$, kde $c_i = (x, e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Dôkaz. Počítajme $f^2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \, x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, x) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x, e_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j (e_i, e_j) = \|x\|^2 - 2 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - c_j)^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2.$$

Keďže $\|x\|^2$, $-\sum_{j=1}^{n} c_j^2$ sú konštanty, mení sa iba stredný člen, ktorý je najmenší, keď je nulový. A to je vtedy, keď $\alpha_i = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. □

8.14 Definícia. *Nech $(e_i)_{i\in I}$ je ortonormálny systém, $x \in H$, potom čísla $c_i = (x, e_i)$, $i \in I$ sa nazývajú Fourierovými koeficientami prvku x.*

8.15 Propozícia *(Besselova nerovnosť). Nech $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ je ortonormálny systém, $c_i = (x, e_i)$ sú Fourierove koeficienty prvku x, potom*

$$\|x\|^2 \geqq \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2.$$

Dôkaz. Pre ľubovoľné n platí

$$0 \leqq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i,\ x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Keďže nerovnosť $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leqq \|x\|^2$ platí pre každé n, platí aj $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqq \|x\|^2$.

8.16 Definícia. *Ortonormálny systém $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ nazývame úplným, ak je množina jeho lineárnych kombinácií*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\ ;\ \alpha_i \in R,\ n \in N \right\}$$

hustá v priestore H, t.j. ak k ľubovoľnému $x \in H$ a k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také $n \in N$ a také $\alpha_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, že

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| = \varrho\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right) < \varepsilon.$$

8.17 Príklad. Systém $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \ldots$ je úplný ortonormálny systém v l^2. Skutočne, nech $x \in l^2$, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$. Keďže $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, existuje k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ také n, že $\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 < \varepsilon^2$. Potom

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots),$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots),$$

teda

$$\varrho\left(x, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2} < \varepsilon.$$

8.18 Lema. *Ak $a_n \to a$, potom $(a_n, b) \to (a, b)$.*

Dôkaz. Z Cauchyho nerovnosti (propozícia 8.3) vyplýva

$$|(a_n, b) - (a, b)| = |(a_n - a, b)| \leqq \|a_n - a\|\ \|b\|. \quad \square$$

8.19 Veta. *Nech H je ľubovoľný predhilbertov priestor, $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ je ortonormálny systém, potom sú ekvivalentné nasledujúce tri podmienky:*

1. *$(e_i)_{i=1}^{\infty}$ je úplný ortonormálny systém.*
2. *Pre každý prvok $x \in H$ platí Parsevalova rovnosť*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2.$$

3. *Pre každý prvok $x \in H$ platí rovnosť* $x=\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, *t.j.* $\sum_{i=1}^{n} c_i e_i \to x \ (n \to \infty)$.

Každá z týchto podmienok implikuje podmienku.

4. *Ak* $(c, e_i)=0$ *pre všetky* i, *potom* $x=0$.

Ak je H Hilbertov, potom sú ekvivalentné všetky štyri podmienky.

Dôkaz. $1 \Rightarrow 2$.

Podľa definície úplného systému existujú ku každému $\varepsilon>0$ také $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, že

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\|<\sqrt{\varepsilon}.$$

Podľa propozície 8.13 však

$$\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n} c_i^2=\left\|x-\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right\|^2 \leqq\left\|x-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\|^2<\varepsilon,$$

teda

$$\|x\|^2<\sum_{i=1}^{n} c_i^2+\varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2+\varepsilon.$$

Keďže posledná nerovnosť platí pre každé $\varepsilon>0$, platí aj $\|x\|^2 \leqq \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$. Opačnú nerovnosť dáva Besselova nerovnosť (propozícia 8.15).

$2 \Rightarrow 3$

Keďže $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ je ortonormálny, platí $\left\|x-\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n} c_i^2$. Z Parsevalovej rovnosti dostaneme, že uvedená postupnosť konverguje k nule, teda $\varrho\left(x, \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right)$ $=\left\|x-\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right\| \to 0$.

$3 \Rightarrow 1$

Keďže $\left\|x-\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right\| \to 0$, k ľubovoľnému $\varepsilon>0$ existuje také n, že $\left\|x-\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right\|<\varepsilon$ (dokonca to platí pre všetky dosť veľké n).

$2 \Rightarrow 4$

Ak $(x, e_i)=0$ pre všetky i, potom $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)^2=0$, teda aj $x=0$.

$4 \Rightarrow 3$ (H je Hilbertov priestor)

Najprv ukážeme, že postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n=\sum_{i=1}^{n} c_i e_i$, je Cauchyho. Za tým účelom počítame $(n>m)$

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} c_i^2. \tag{8.3}$$

Uvážime (propozícia 8.15), že $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqq \|x\|^2$, teda $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ je konvergentný. To značí, že postupnosť $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov tohto radu je konvergentná, a teda aj Cauchyho, teda k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také n_0, že pre všetky $n, m \geqq n_0$ platí $(n \geqq m)$

$$\sum_{i=m+1}^{n} c_i^2 = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon^2. \tag{8.4}$$

Z (8.3) a (8.4) skutočne vyplýva, že $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyho. Z toho, že H je Hilbertov, t. j. úplný vyplýva, že postupnosť $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ konverguje; jej limitu označujeme znakom $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$.

Vezmime ľubovoľné e_j, $n \geqq j$ a počítajme

$$\left(x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i,\ e_j\right) = (x, e_j) - \sum_{i=1}^{n} c_i (e_i, e_j) = c_j - c_j = 0.$$

Vidíme, že

$$\lim_{n \to \infty} \left(x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i,\ e_j\right) = 0.$$

Podľa lemy 8.18 však platí

$$\left(x - \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i,\ e_j\right) = \lim_{n \to \infty} \left(x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i,\ e_j\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Z podmienky 4 potom vyplýva, že $x - \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = 0$, teda $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$. □

8.3 PRIESTORY $\mathscr{L}^p$

V predošlom odseku sme naznačili zmysel celej teórie. Základné aplikácie naznačujú príklady 8.12, resp. 8.7, kde $H = C(a, b)$, $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$. Pravda, potrebovali by sme priestor úplný v odpovedajúcej metrike. Túto úlohu spĺňa Hilbertov priestor $\mathscr{L}^2$. Znakom $\mathscr{M}$ budeme označovať množinu všetkých merateľných funkcií (vzhľadom na daný merateľný priestor $(X, \mathscr{S})$).

8.20 Definícia. *Nech $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je priestor s mierou. Znakom $L^2 = L^2(X, \mathscr{S}, \mu)$ budeme označovať množinu všetkých merateľných funkcií s integrovateľným kvadrátom*

$$L^2 = \{f \in \mathscr{M};\ f^2 \in \mathscr{L}\}.$$

8.21 Propozícia. *Priestor L^2 je lineárny. Pre každé $f, g \in L^2$ je $fg \in \mathscr{L}$. Ak položíme $(f, g) = \int fg \, d\mu$, potom platí*

1. $(f, f) \geqq 0$ *pre všetky* $f \in L^2$,
2. $(f, g) = (g, f)$ *pre všetky* $f, g \in L^2$,
3. $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$ *pre všetky* $f, g \in L^2$, $\alpha \in R$,
4. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$ *pre všetky* $f_1, f_2; g \in L^2$.

Dôkaz. Nech $f, g \in L^2$, potom funkcia $f + g$ je merateľná,

$$0 \leqq (f+g)^2 \leqq 2(f^2 + g^2),$$

teda $(f+g)^2 \in \mathscr{L}$ a $f + g \in \mathscr{L}^2$. Zrejme tiež $\alpha f \in \mathscr{L}^2$, teda L^2 je lineárnym priestorom. Ak $f, g \in \mathscr{L}^2$, potom aj fg je merateľná a z nerovnosti

$$0 \leqq |fg| \leqq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$$

vyplýva, že $|fg| \in \mathscr{L}$, teda aj $fg \in \mathscr{L}$. Vlastnosti 1—4 sú zrejmé. □

Priestor L^2 so „skalárnym súčinom" $(f, g) = \int fg \, d\mu$ sa podobá na predhilbertov priestor. Jediný defekt je vo vlastnosti 1. Môže sa stať, že $(f, f) = \int f^2 \, d\mu = 0$, ale f nie je nulová funkcia. Vieme iba (propozícia 7.42), že f^2, a teda aj f sa μ-skoro všade rovná 0. Preto funkcie líšiace sa na množine nulovej miery stotožníme. Zopakujme, že $f = g$ μ-skoro všade, ak existuje také $E \in \mathscr{S}$, že $\mu(E) = 0$ a $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \notin E$.

8.22 Lema. *Pre $f \in L^2$ položme $[f] = \{g \in L^2;\ g = f\ \mu\text{-skoro všade}\}$, potom systém $\{[f];\ f \in L^2\}$ je rozkladom množiny L^2. Ak $f_1 \in [f]$, $g_1 \in [g]$, $\alpha \in R$, potom $f_1 + g_1 \in [f + g]$, $\alpha f_1 \in [\alpha f]$, $\int f_1 g_1 \, d\mu = \int fg \, d\mu$.*

Dôkaz. Nech $[f] \cap [g] \neq \emptyset$. Ukážeme, že $[f] = [g]$. Nech totiž $h \in [f] \cap [g]$, teda $h = f$ μ-skoro všade a tak isto $h = g$ μ-skoro všade. Zo vzťahu

$$\{x;\ f(x) \neq g(x)\} \subset \{x;\ f(x) \neq h(x)\} \cup \{x;\ h(x) \neq g(x)\}$$

vyplýva, že aj $f = g$ μ-skoro všade. Ak $f_1 \in [f]$, potom $f_1 = f$, $f = g$ oboje μ-skoro všade, teda $f_1 = g$ μ-skoro všade, takže $f_1 \in [g]$. Dokázali sme teda, že $[f] \subset [g]$. Podobne možno dokázať, že $[g] \subset [f]$, preto $[f] = [g]$. Ostatné tvrdenie možno dokázať podobnou technikou. Posledné vyplýva z toho, že $f_1 g_1 = fg$ μ-skoro všade.

8.23 Definícia. *Pre ľubovoľný priestor s mierou $(X, \mathscr{S}, \mu)$ definujeme $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(X, \mathscr{S}, \mu) = \{[f];\ f \in L^2\}$. Pre $[f], [g] \in L^2$ ďalej definujeme*

$$[f] + [g] = [f + g], \quad \alpha[f] = [\alpha f], \quad ([f], [g]) = (f, g).$$

8.24 Propozícia. *$\mathscr{L}^2$ je predhilbertov priestor.*

Dôkaz. Hoci verifikácia všetkých axióm je rovnako triviálna, všimneme si aspoň implikáciu $([f], [f]) = 0 \Rightarrow [f] = [0]$. Nech teda $\int f^2 \, d\mu = (f, f) = ([f], [f]) = 0$, potom $f = 0$ μ-skoro všade, teda $f \in [0]$. Pretože súčasne $f \in [f]$, platí rovnosť $[f] = [0]$. □

8.25 Dôsledok. *Pre všetky f, $g \in L^2$ platí*

$$\left|\int fg \, d\mu\right| \leqq \sqrt{\int f^2 \, d\mu}\sqrt{\int g^2 \, d\mu}.$$

Dôkaz. Vyplýva z propozície 8.24 a Cauchyho nerovnosti (propozícia 8.3). □

Pravdaže, my by sme potrebovali dokázať, že $\mathscr{L}^2$ je Hilbertov priestor. To nie je také ťažké. Lenže podobne ako v propozícii 8.10 radi by sme tak urobili naraz pre dvojku aj pre jednotku.

8.26 Definícia. Nech $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je priestor s mierou, $p \geqq 1$. Znakom $L^p = L^p(X, \mathscr{S}, \mu)$ budeme značiť množinu

$$\{f \in \mathscr{M};\ |f|^p \in \mathscr{L}\}.$$

Pre $p = 1$ je ľahké dokázať, že L^1 je pseudometrický priestor, v prípade L^2 to zase vyplýva z našich vedomostí o predhilbertových priestoroch. V prípade ľubovoľného $p \geqq 1$ už táto skutočnosť nie je zrejmá a vyžaduje si osobitný, síce jednoduchý, ale trochu umelý dôkaz.

8.27 Propozícia *(Hölderova nerovnosť). Nech $p, q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$. Potom $fg \in L^1$ a platí*

$$\left|\int fg \, d\mu\right| \leqq \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q \, d\mu\right)^{1/q}.$$

Dôkaz. V prípade, že niektorá z funkcií f, g je μ-skoro všade nulová, nemáme veľmi čo dokazovať, pretože aj fg je μ-skoro všade nulová a číslo na ľavej strane nerovnosti je 0.

V opačnom prípade najprv použijeme tú skutočnosť, že funkcia $y = \varphi(x) = -\log x$ je konvexná na $(0, \infty)$, teda pre každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ a ľubovoľné a, $b > 0$ platí $\varphi(\alpha a + (1-\alpha)b) \leqq \alpha\varphi(a) + (1-\alpha)\varphi(b)$. Keď to prepíšeme a dosadíme $\alpha = \dfrac{1}{p}$, t.j. $1 - \alpha = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$, dostaneme

$$-\log\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \leqq -\frac{1}{p}\log a - \frac{1}{q}\log b = -\log a^{1/p} b^{1/q},$$

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \geqq a^{1/p} b^{1/q},$$

pretože $y = -\log x$ je klesajúcou funkciou. Nakoniec položíme

$$a = \frac{|f|^p}{\int |f|^p \, d\mu}, \quad b = \frac{|g|^q}{\int |g|^q \, d\mu},$$

teda

$$\frac{|f|}{(\int |f|^p \,d\mu)^{1/p}} \cdot \frac{|g|}{(\int |g|^q \,d\mu)^{1/q}} \leqq \frac{|f|^p}{p \int |f|^p \,d\mu} + \frac{|g|^q}{q \int |g|^q \,d\mu},$$

odkiaľ po integrovaní ($|f|^p$, $|g|^q \in \mathscr{L}$)

$$\frac{\int |fg| \,d\mu}{(\int |f|^p \,d\mu)^{1/p} (\int |g|^q \,d\mu)^{1/q}} \leqq$$

$$\leqq \frac{\int |f|^p \,d\mu}{p \int |f|^p \,d\mu} + \frac{\int |g|^q \,d\mu}{q \int |g|^q \,d\mu} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

teda

$$\int |fg| \,d\mu \leqq (\int |f|^p \,d\mu)^{1/p} (\int |g|^q \,d\mu)^{1/q}. \quad \square$$

8.28 Propozícia *(Minkowského nerovnosť). Nech $p \geqq 1$, f, $g \in L^p$, potom aj $f + g \in L^p$ a platí*

$$(\int |f + g|^p \,d\mu)^{1/p} \leqq (\int |f|^p \,d\mu)^{1/p} + (\int |g|^p \,d\mu)^{1/p}.$$

Dôkaz. Prípad $p = 1$ je zrejmý. Ak $p > 1$, položíme $q = \frac{p}{p-1}$, potom je aj $q > 1$ a platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prvé tvrdenie vyplýva z nerovností

$$|f + g|^p \leqq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leqq 2^p (|f|^p + |g|^p).$$

V druhom prípade musíme postupovať rafinovanejšie; kľúčom je Hölderova nerovnosť

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p \,d\mu &\leqq \int |f| \, |f + g|^{p-1} \,d\mu + \\ &+ \int |g| \, |f + g|^{p-1} \,d\mu \leqq (\int |f|^p \,d\mu)^{1/p} \\ &(\int |f + g|^{(p-1)q} \,d\mu)^{1/q} + (\int |g|^p \,d\mu)^{1/p} \\ &(\int |f + g|^{(p-1)q} \,d\mu)^{1/q} = (\int |f|^p \,d\mu)^{1/p} + \\ &+ (\int |g|^p \,d\mu)^{1/p} (\int |f + g|^p \,d\mu)^{1/q}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

(V Hölderovej nerovnosti sme použili to, že $|f + g|^{p-1} \in L^q$, čo však vyplýva z rovnosti $(p-1)q = p$.) Dokazovaná nerovnosť je zrejmá, ak $\int |f + g|^p \,d\mu = 0$. V opačnom prípade zo vzťahu (8.5) už dostávame

$$\begin{aligned} (\int |f + g|^p \,d\mu)^{1/p} &= (\int |f + g|^p \,d\mu)^{1 - 1/q} \leqq \\ &\leqq (\int |f|^p \,d\mu)^{1/p} + (\int |g|^p \,d\mu)^{1/p}. \quad \square \end{aligned}$$

8.29 Propozícia. *Nech $p \geqq 1$, potom L^p je lineárnym priestorom. Ak pre každé $f \in L^p$ položíme $\|f\|_p = (\int |f|^p \,d\mu)^{1/p}$, potom $\|\cdot\|_p$ je polonormou, t.j. platí*

1. $\|f\|_p \geqq 0$ *pre všetky* $f \in L^p$,
2. $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$ *pre všetky* $f \in L^p$, $\alpha \in R$,
3. $\|f + g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p$ *pre všetky* f, $g \in L^p$.

Dôkaz. Jedinou netriviálnou vlastnosťou je tretia. A tú sme dokázali v 8.28. □

8.30 Lema. *Pre $f \in L^p$ položme $[f] = \{g \in L^p ; g = f$ μ-skoro všade$\}$, potom systém $\{[f] ; f \in L^p\}$ je rozkladom množiny L^p. Ak $f_1 \in [f]$, $g_1 \in [g]$, potom $f_1 + g_1 \in [f+g]$, $\alpha f_1 \in [\alpha f]$, $\int |f_1|^p \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu$.*

8.31 Definícia. *Nech $p \geqq 1$. Pre ľubovoľný priestor s mierou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ definujeme $\mathcal{L}^p = \{[f] ; f \in L^p\}$. Pre $[f], [g] \in \mathcal{L}^p$ definujeme $[f] + [g] = [f+g]$, $\alpha[f] = [\alpha f]$, $\|[f]\|_p = \|f\|_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{1/p}$.*

8.32 Propozícia. *$\mathcal{L}^p$ je lineárny priestor, $\|\cdot\|_p$ je norma, teda $\mathcal{L}^p$ je lineárnym normovaným priestorom.*

Dôkaz. Vzhľadom na propozíciu 8.29 stačí dokázať implikáciu $\|[f]\|_p = 0 \Rightarrow [f] = [0]$. Avšak z toho, že $(\int |f|^p \, d\mu)^{1/p} = \|[f]\|_p = 0$ vyplýva, že $f = 0$ μ-skoro všade, preto platí $[f] = [0]$. □

8.4 ÚPLNOSŤ PRIESTOROV $\mathcal{L}^p$

Aby sme sa vyhli ťažkopádnej práci s triedami patriacimi do L^p a súčasne, aby sme boli akurátni, budeme dokazovať najprv úplnosť L^p s tým, že k L^p sa už potom ľahko dostaneme.

8.33 Definícia. *Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ pseudometrického priestoru (Y, d) sa nazýva Cauchyho, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také n_0, že pre všetky $n, m \geqq n_0$ platí $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, ak existuje taký prvok $x \in Y$, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Priestor (Y, d) sa volá úplným, ak každá Cauchyho postupnosť je konvergentná.*

Na prvý pohľad všetko tak ako v metrickom priestore. Je tu, pravda, rozdiel. Postupnosť môže konvergovať aj k viacerým limitám nielen k jednej. Najbližším príkladom nám môže poslúžiť $L^2 = L^2(\langle 0, 1\rangle, \mathcal{B}, \lambda)$. Postupnosť konštantných funkcií $(f_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje nielen k nulovej funkcii, ale ku každej, ktorá sa rovná nule μ-skoro všade.

8.34 Lema. *Nech $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť nezáporných, merateľných, integrovateľných funkcií, $\lim\limits_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu < \infty$, potom $\mu\left(\left\{x ; \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = \infty\right\}\right) = 0$.*

Dôkaz. Položme najprv $h(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$ a skúmajme (pre pevné k) množinu $E = \{x ; h(x) > k\}$. Ak ešte položíme $E_n = \{x ; h_n(x) > k\}$, potom $E_n \nearrow E$, teda podľa vety 5.13 platí

$$\int_E h_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_i} h_n \, d\mu \geqq \lim_{i\to\infty} k\mu(E_i) = k\mu(E). \tag{8.6}$$

Položme ešte $F=\{x\,;\,h(x)=\infty\}$, $F_k=\{x\,;\,h(x)>k\}$. Zrejme $F_k\searrow F$. Aplikujme (8.6) na množinu $E=F_k$, potom

$$\mu(F_k)\leqq\frac{1}{k}\int_{F_k}h\,\mathrm{d}\mu\leqq\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}\int h_n\,\mathrm{d}\mu<\infty$$

a preto z polospojitosti zhora

$$0\leqq\mu(F)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_k)\leqq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left(\lim_{n\to\infty}\int h_n\,\mathrm{d}\mu\right)=0.\quad\square$$

8.35 Lema. *Nech $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných, merateľných, integrovateľných funkcií, konvergujúca μ-skoro všade k merateľnej funkcii h. Nech K je také číslo, že $\int h_n\,\mathrm{d}\mu\leqq K$ pre všetky n, potom funkcia h je integrovateľná a platí*

$$\int h\,\mathrm{d}\mu\leqq K.$$

Dôkaz. Stačí zostrojiť takú postupnosť $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ merateľných funkcií, aby $0\leqq g_n\nearrow h$ μ-skoro všade (napr. $g_n=\inf_{i\geqq n}h_i$). Podľa Leviho vety (veta 7.33) potom funkcia h je integrovateľná a platí

$$\int h\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int g_n\,\mathrm{d}\mu\leqq K,$$

pretože g_n sú merateľné (podľa vety 6.23), integrovateľné (vzhľadom na lemu 7.21 a nerovnosť $0\leqq g_n\leqq h_n$) a platia nerovnosti $\int g_n\,\mathrm{d}\mu\ \leqq\ \int h_n\,\mathrm{d}\mu\ \leqq\ K$ $(n=1,2,\ldots)$. $\square$

8.36 Propozícia. *Nech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť funkcií z L^p, že $\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i-f_{i+1}\|_p<\infty$, potom existuje taký prvok $f\in L^p$, že $\|f_n-f\|_p\to 0$ a $f_n\to f$ μ-skoro všade.*

Dôkaz. Označme $\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i-f_{i+1}\|_p=M$ a položme $g_n=\sum_{i=1}^{n}|f_i-f_{i+1}|$. Podľa propozície 8.29 $g_n\in L^p$ a

$$\left(\int|g_n|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}=\|g_n\|_p\leqq\sum_{i=1}^{n}\|f_i-f_{i+1}\|_p\leqq M,$$

preto

$$\int|g_n|^p\,\mathrm{d}\mu\leqq M^p,\quad n=1,2,\ldots$$

Na funkcie $h_n=|g_n|^p$ môžeme aplikovať lemu 8.34. Podľa nej je $\lim_{n\to\infty}|g_n|^p$ μ-skoro všade konečná, a preto je aj $\lim_{n\to\infty}|g_n|$ μ-skoro všade konečná, čo vlastne značí, že

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i-f_{i+1}|=\lim_{n\to\infty}g_n=\lim_{n\to\infty}|g_n|$$

konverguje μ-skoro všade. Môžeme teda definovať funkciu f pomocou predpisu

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)+\sum_{i=1}^{\infty}(f_{i+1}(x)-f_i(x)), & \text{ak ten rad absolútne konverguje} \\ 0 \text{ v opačnom prípade.} & \end{cases}$$

Funkcia f je merateľná a pre μ-skoro všetky x platí

$$f(x)=f_1(x)+\sum_{i=1}^{\infty}(f_{i+1}(x)-f_i(x))=$$

$$=f_1(x)+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f_{i+1}(x)-f_i(x))=\lim_{n\to\infty}f_n(x),$$

teda $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f μ-skoro všade, a preto konverguje μ-skoro všade aj

$$h_m=|f_n-f_m|^p\to|f_n-f|^p(m\to\infty). \tag{8.7}$$

Navyše

$$(\int h_m\,d\mu)^{1/p}=\|f_n-f_m\|_p\leqq\sum_{i=n}^{m-1}\|f_{i+1}-f_i\|_p\leqq$$

$$\leqq\sum_{i=n}^{\infty}\|f_{i+1}-f_i\|_p=K,$$

odkiaľ

$$\int h_m\,d\mu\leqq K^p,\quad m=1,2,\dots \tag{8.8}$$

Z (8.7), (8.8) a z lemy 8.35 vyplýva, že limitná funkcia $|f_n-f|^p$ je integrovateľná a platí

$$\int|f_n-f|^p\,d\mu\leqq\Big(\sum_{i=n}^{\infty}\|f_{i+1}-f_i\|_p\Big)^p. \tag{8.9}$$

Odtiaľ dostávame, že $f_n-f\in L^p$ a keďže L^p je lineárnym priestorom, aj

$$f=f_n-(f_n-f)\in L^p.$$

Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Vyberme n_0 tak, aby

$$\sum_{i=n_0}^{\infty}\|f_{i+1}-f_i\|_p<\varepsilon.$$

Z (8.9) potom vyplýva, že pre všetky $n\geqq n_0$ je

$$\|f_n-f\|_p\leqq\sum_{i=n}^{\infty}\|f_{i+1}-f_i\|_p\leqq\sum_{i=n_0}^{\infty}\|f_{i+1}-f_i\|_p<\varepsilon,$$

teda $f_n\to f$ v zmysle konvergencie v L^p. □

8.37 Propozícia. *Pseudometrický priestor (Y, d) je úplný práve vtedy, keď je konvergentná každá postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú $\sum_{i=1}^{\infty}d(x_i, x_{i+1})<\infty$.*

Dôkaz. $\Leftarrow$

Začneme tou časťou, ktorú vlastne potrebujeme. Nech $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ je Cauchyho postupnosť. Vyberme z nej takú podpostupnosť $(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, aby

$$d(y_{n_i}, y_{n_{i+1}}) < \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

a položme $x_i = y_{n_i}$, potom

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1,$$

teda existuje $x \in Y$, pre ktoré $d(y_{n_i}, x) = d(x_i, x) \to 0$. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ vyberme také n_0, aby pre všetky n, $m \geqq n_0$ platilo

$$d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2},$$

a ďalej také i_0, aby

$$d(y_{n_i}, x) = d(x_i, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pre všetky $i \geqq i_0$. Vyberme také $i \geqq i_0$, aby $n_i \geqq n_0$, potom pre všetky $n \geqq n_0$ platí

$$d(y_n, x) \leqq d(y_n, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, x) < \varepsilon,$$

teda $y_n \to x$.

$\Rightarrow$

Obrátene, nech Y je úplný a nech konverguje rad $\sum_{i=1}^{\infty} d(x_i, x_{i+1})$. Potom k ľubovoľnému kladnému číslu ε existuje také n_0, že

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon.$$

Potom pre všetky n, $m \geqq n_0$ platí (nech napr. $n > m$)

$$d(x_n, x_m) \leqq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leqq \sum_{i=n_0}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon,$$

teda $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyho a vzhľadom na to, že Y je úplný, aj konvergentná. □

8.38 Veta. *Priestor L^p so pseudometrikou $\varrho_p(f, g) = \|f - g\|_p$ je úplným pseudometrickým priestorom.*

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z propozície 8.36 a z propozície 8.37. □

8.39 Veta. *Priestor $\mathscr{L}^p$ je Banachov pre každé $p \geqq 1$.*

Dôkaz. Nech $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyho postupnosť v $\mathscr{L}^p$, potom $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyho postupnosť v L^p. Podľa vety 8.38 existuje také $f \in L^p$, že $\|f_n - f\|_p \to 0$, avšak potom (definícia 8.31)

$$\|[f_n]-[f]\|_p=\|[f_n-f]\|_p=\|f_n-f\|_p\to 0,$$

teda $\mathscr{L}^p$ je úplným lineárnym normovaným priestorom. □

8.5 LINEÁRNE OHRANIČENÉ FUNKCIONÁLY

8.40 Definícia. *Nech H je lineárny normovaný priestor. Zobrazenie $f\colon H\to R$ nazývame lineárnym ohraničeným funkcionálom, ak je lineárne a ak platí táto podmienka:*

Existuje také K, že pre všetky $x\in H$ platí $|f(x)|\leqq K\|x\|$.

8.41 Propozícia. *Lineárny funkcionál $f\colon H\to R$ je ohraničený práve vtedy, keď je spojitý v každom bode priestoru H.*

Dôkaz. Nech f je ohraničený lineárny funkcionál, K taká konštanta, že pre všetky $u\in H$ platí $|f(u)|\leqq K\|u\|$, potom pre každé x, $x_0\in H$ platí

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x-x_0)|\leqq K\|x-x_0\|.$$

Vidíme teda, že k ľubovoľnému $\varepsilon>0$ existuje také $\delta>0$, že pre všetky x, pre ktoré $\varrho(x,x_0)=\|x-x_0\|<\delta$, platí $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Naopak, nech f je spojitý v každom bode, teda aj v bode $x_0=0$, potom aj k číslu $\varepsilon=1$ existuje také $\delta>0$, že

$$\|x\|=\|x-0\|<\delta\Rightarrow|f(x)|<1.$$

Položme $K=\dfrac{2}{\delta}$. Nech $x\neq 0$, potom

$$\left\|\frac{\delta}{2\|x\|}\,x\right\|=\frac{\delta}{2\|x\|}\,\|x\|=\frac{\delta}{2}<\delta,$$

teda

$$\frac{\delta}{2\|x\|}\,|f(x)|=f\left(\frac{\delta}{2\|x\|}\,x\right)<1,$$

odkiaľ

$$|f(x)|<\frac{2}{\delta}\,\|x\|=K\|x\|.$$

Nerovnosť $|f(x)|\leqq K\|x\|$ platí triviálne pre $x=0$. □

8.42 Príklad. Nech H je predhilbertov priestor, $y\in H$. Definujme $f\colon H\to R$ rovnosťou

$$f(x)=(x,y),$$

potom f je lineárnym ohraničeným funkcionálom. Za konštantu K môžeme vziať $\|y\|$. Z Cauchyho nerovnosti totiž vyplýva, že

$$|f(x)| = |(x, y)| \leqq \|x\| \, \|y\| = K\|x\|.$$

8.43 Definícia. *Pod normou lineárneho ohraničeného funkcionálu f rozumieme číslo*

$$\|f\| = \inf \{K; \text{pre všetky } x \in H: |f(x)| \leqq K\|x\|\}.$$

8.44 Propozícia. *Nech f je lineárny ohraničený funkcionál, potom pre všetky $x \in H$ platí*

$$|f(x)| \leqq \|f\| \, \|x\|. \tag{8.10}$$

Platia tiež rovnosti

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|; \|x\| \leqq 1\} = \sup \{|f(x)|; \|x\| = 1\}. \tag{8.11}$$

Dôkaz. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také K, $\|f\| \leqq K < \|f\| + \varepsilon$, že pre všetky $x \in H$ je $|f(x)| \leqq K\|x\|$ a preto

$$|f(x)| \leqq K\|x\| \leqq (\|f\| + \varepsilon)\|x\|.$$

Keďže táto nerovnosť platí pre každé $\varepsilon > 0$, platí aj (8.10).

Aby sme dokázali (8.11), najprv uvážme, že triviálne platí

$$\{|f(x)|; \|x\| \leqq 1\} \supset \{|f(x)|; \|x\| = 1\},$$

teda

$$\sup \{|f(x)|; \|x\| \leqq 1\} \geqq \sup \{|f(x)|; \|x\| = 1\}. \tag{8.12}$$

Nech $\|x\| \leqq 1$, potom podľa (8.10) $|f(x)| \leqq \|f\| \, \|x\| \leqq \|f\|$, číslo $\|f\|$ je horným ohraničením množiny $\{|f(x)|; \|x\| \leqq 1\}$, teda

$$\|f\| \geqq \sup \{|f(x)|; \|x\| \leqq 1\}. \tag{8.13}$$

Nakoniec označme $\alpha = \sup \{|f(x)|; \|x\| = 1\}$. Ak $x \neq 0$, potom $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, teda $\left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leqq \alpha$, teda $|f(x)| \leqq \alpha\|x\|$. Posledná nerovnosť platí aj pre $x = 0$. Číslo α patrí teda do množiny, ktorej $\|f\|$ je infimom. Odtiaľ dostaneme

$$\|f\| \leqq \alpha = \sup \{|f(x)|; \|x\| = 1\}. \tag{8.14}$$

Z nerovností (8.12), (8.13) a (8.14) vyplýva (8.11). □

8.45 Príklad. Pokračujme v príklade 8.42 a vypočítajme normu funkcionálu f, $f(x) = (x, y)$. Už sme zistili, že $|f(x) \leqq \|y\| \, \|x\|$ pre všetky x, teda $\|f\| \leqq \|y\|$. Ukážme, že platí rovnosť $\|f\| = \|y\|$. Ak $y = 0$, rovnosť je zrejmá. Ak $y \neq 0$, môžeme pracovať s prvkom $\frac{y}{\|y\|}$, ktorého norma je 1, a preto

$$\|f\| \geqq \sup \{|f(x)|; \|x\| = 1\} \geqq$$

$$\geqq f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)=\left(\frac{y}{\|y\|}, y\right)=\frac{1}{\|y\|}(y, y)=\frac{1}{\|y\|}\|y\|^2=\|y\|.$$

8.6 RIESZOVA VETA O REPREZENTÁCII

V tomto paragrafe dokážeme, že každý lineárny ohraničený funkcionál na Hilbertovom priestore má taký typ, ako sme uviedli v príklade 8.42. Pravda, chvíľu bude trvať, kým to dokážeme, ale vynaložená námaha stojí za to.

8.46 Propozícia *(štvoruholníková rovnosť). Nech H je predhilbertov priestor x, $y \in H$, potom*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Dôkaz. Stačí použiť definíciu

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y, x+y)+(x-y, x-y)=$$
$$=\|x\|^2+2(x, y)+\|y\|^2+\|x\|^2-2(x, y)+\|y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \quad \square$$

8.47 Propozícia. *Ak H je lineárny normovaný priestor a $x_n \to x$, potom $\|x_n\| \to \|x\|$.*

Dôkaz. Stačí sa oprieť o nerovnosť $|\|x_n\|-\|x\|| \leqq \|x_n-x\|$. $\square$

8.48 Veta. *Nech H je Hilbertov priestor, $C \subset H$ je neprázdna, konvexná (t.j. platí implikácia x, $y \in C$, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle \Rightarrow \alpha x+(1-\alpha)y \in C$), uzavretá množina, potom existuje také $x_0 \in C$, že*

$$\|x_0\|=\inf\{\|x\|;\ x \in C\}.$$

Dôkaz. Položme $d=\inf\{\|x\|;\ x \in C\}$ a zvoľme $x_n \in C$ tak, aby $\|x_n\| \to d$. Štvoruholníková rovnosť (propozícia 8.46) aplikovaná na prvky $\frac{x_n}{2}$, $\frac{x_m}{2}$ dáva

$$\left\|\frac{x_n}{2}-\frac{x_m}{2}\right\|^2=2\left(\left\|\frac{x_n}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x_m}{2}\right\|^2\right)-\left\|\frac{x_n}{2}+\frac{x_m}{2}\right\|^2. \tag{8.15}$$

Keďže C je konvexná, prvok $\frac{x_n}{2}+\frac{x_m}{2}$ patrí do C, teda $\left\|\frac{x_n}{2}+\frac{x_m}{2}\right\| \geqq d$. Z rovnosti (8.15) dostaneme nerovnosť

$$\frac{1}{4}\|x_n-x_m\|^2 \leqq \frac{1}{2}\|x_n\|^2+\frac{1}{2}\|x_m\|^2-d^2.$$

Keďže $\|x_n\|^2 \to d^2$, postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyho. Podrobnejšie zvolíme n_0 také, aby pre všetky $n \geqq n_0$ platilo $\|x_n\|^2<d^2+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$, potom pre všetky n, $m \geqq n_0$ platí

$$\|x_n - x_m\|^2 < 2d^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2d^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} - 4d^2 = \varepsilon^2,$$

teda $\varrho(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Keďže H je úplný, existuje také $x_0 \in H$, že $x_n \to x_0$. Pretože $x_n \in C$ a množina C je uzavretá, aj $x_0 \in C$. Podľa propozície 8.47 bude $\|x_n\| \to \|x_0\|$. Pretože podľa definície $\|x_n\| \to d$, platí $\|x_0\| = d$. □

8.49 Propozícia *(Pytagorova veta). Nech x, y sú také prvky predhilbertovho priestoru H, že $(x, y) = 0$, potom*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

8.50 Veta *(Riesz). Nech H je Hilbertov priestor, $f\colon H \to R$ lineárny spojitý funkcionál, potom existuje práve jeden prvok $y \in H$, že pre všetky $x \in H$ platí*

$$f(x) = (x, y).$$

Dôkaz. Ak $f = 0$, stačí položiť $y = 0$. Ak $f \neq 0$, existuje prvok x, pre ktorý $f(x) \neq 0$. Potom $f\left(\frac{1}{f(x)}\,x\right) = 1$, teda množina

$$C = \{x \in H\,;\, f(x) = 1\}$$

je neprázdna, konvexná, uzavretá. Nech $x_0 \in C$ je taký prvok, že

$$\|x_0\| = d = \inf\,\{\|x\|\,;\, x \in C\}.$$

Dokážeme implikáciu

$$f(u) = 0 \Rightarrow (u, x_0) = 0. \tag{8.16}$$

Nech $f(u) = 0$, $u \neq 0$. Najprv zvolíme číslo α také, aby $(\alpha u, x_0 - \alpha u) = 0$. Stačí vziať

$$\alpha = \frac{(u, x_0)}{(u, u)}, \tag{8.17}$$

potom

$$(\alpha u, x_0 - \alpha u) = \alpha(u, x_0) - \alpha^2(u, u) =$$
$$= \alpha\left((u, x_0) - \frac{(u, x_0)}{(u, u)}(u, u)\right) = 0.$$

Keďže $f(x_0 - \alpha u) = f(x_0) - \alpha f(u) = 1$, platí $x_0 - \alpha u \in C$, teda

$$\|x_0 - \alpha u\| \geqq d.$$

Odtiaľ a z Pytagorovej vety dostaneme

$$d^2 = \|x_0\|^2 = \|(x_0 - \alpha u) + \alpha u\|^2 =$$
$$= \|x_0 - \alpha u\|^2 + \|\alpha u\|^2 \geqq d^2 + \|\alpha u\|^2.$$

odkiaľ vyplýva, že $\|\alpha u\|^2 = 0$, teda $\alpha u = 0$. Lenže u je nenulový prvok, preto $\alpha = 0$, z čoho podľa (8.17) vyplýva, že $(u, x_0) = 0$. Tým je implikácia (8.16) dokázaná.

Nech x je ľubovoľný prvok z H. Pretože $f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0$, podľa (8.16)

$$0 = (x - f(x)x_0, x_0) = (x, x_0) - f(x)(x_0, x_0),$$

teda

$$f(x) = \left(x, \frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right), \quad x \in H.$$

Zostáva dokázať jednoznačnosť vyjadrenia. Ak pre všetky $x \in H$ platí $f(x) = (x, y_1) = (x, y_2)$, potom $(x, y_1 - y_2) = 0$ pre všetky $x \in H$, teda aj pre prvok $x = y_1 - y_2$. Dostaneme, že $\|y_1 - y_2\|^2 = (y_1 - y_2, y_1 - y_2) = 0$, odtiaľ $y_1 - y_2 = 0$, teda $y_1 = y_2$. □

8.51 Dôsledok. *Nech F je lineárny spojitý funkcionál na $\mathscr{L}^2$, potom existuje taký prvok $[g] \in \mathscr{L}^2$, že*

$$F([f]) = \int fg \, d\mu$$

pre všetky $f \in L^2$.

Dôkaz. Keďže $\mathscr{L}^2$ je podľa vety 8.39 Hilbertov priestor, podľa vety 8.50 existuje taký prvok $[g] \in \mathscr{L}^2$, že

$$F([f]) = ([f], [g]) = \int fg \, d\mu$$

pre všetky $[f] \in \mathscr{L}^2$, t.j. všetky $f \in L^2$. □

Úlohy

A n-rozmerný priestor

Uvažujme o priestore $R^n = \{(x_1, \dots, x_n);\ x_i \in R\}$ s metrikou odvodenou od skalárneho súčinu $xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

(a) Dokážte, že postupnosť prvkov $(x^{(i)})_{i=1}^{\infty}$ priestoru R^n $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ konverguje k prvku $x = (x_1, \dots, x_n)$ práve vtedy, keď $x_k^{(i)} \to x_k$ pre $k = 1, \dots, n$.

(b) Na základe (a) dokážte, že R^n je Hilbertov priestor.

B Vnorenie R^n do l^2

Definujme zobrazenie $\varphi\colon R^n \to l^2$ pomocou vzťahu $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$.

(a) Dokážte, že φ je izometrickým zobrazením priestoru R^n na uzavretú podmnožinu priestoru l^2.

(b) Dokážte, že uzavretá podmnožina úplného metrického priestoru je úplným metrickým priestorom.

(c) Na základe (a), (b) a propozície 8.10 dokážte, že R^n je úplným metrickým priestorom.

C Komplexný predhilbertov priestor

Axiómy sú podobné ako v odseku 8.1, lenže ide o zobrazenie $(\cdot, \cdot): H \times H \to C$ a druhá axióma má tvar: $(x, y) = \overline{(y, x)}$, kde $\bar{z}$ je komplexné číslo združené k číslu z. Dokážte, že platí

(a) $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$ pre všetky $x, y \in H$, $\alpha \in C$.

(b) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ pre všetky $x, y_1, y_2 \in H$.

(c) $|(x, y)|^2 \leqq (x, x)(y, y)$.

(*Návod.* Vezmite $\alpha \in R$, $\beta \in C$, vypočítajte $(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y)$ a dosaďte $\beta = (x, y)/|(x, y)|^2$.)

D Príklady komplexných priestorov

(a) $C^n = \{(z_1, \ldots, z_n); z_i \in C\}$, $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$.

(b) Priestor l^2 všetkých postupností $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ komplexných čísel takých, že $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty$; $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$.

(c) Priestor všetkých komplexných funkcií spojitých na intervale $\langle a, b \rangle$; $(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$.

E Lineárne normované priestory

(a) Dokážte, že aj v komplexnom prípade je každý predhilbertov priestor lineárnym normovaným priestorom, ak $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

(*Návod.* Pri dôkaze trojuholníkovej nerovnosti použite vzťah $2 \operatorname{Re} z \leqq 2|z|$.)

(b) Dokážte, že priestor l^1 všetkých postupností $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ komplexných čísel takých, že $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i| < \infty$, je lineárnym normovaným priestorom s normou $\|z\| = \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|$.

(c) Dokážte, že aj v komplexnom prípade sú priestory l^1, l^2 úplné.

F Identity v predhilbertovom priestore

Dokážte, že aj v komplexnom prípade platí

(a) Štvoruholníková rovnosť: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

(b) Pytagorova veta: $(x, y) = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

G Konvergencia v predhilbertovom priestore

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti prvkov v predhilbertovom priestore, $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dokážte, že platí

(a) $a_n + b_n \to a + b$.

(b) $(a_n, b_n) \to (a, b)$.

(c) Ak $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel, $\alpha_n \to \alpha$, potom $\alpha_n a_n \to \alpha a$.

H Ortonormálne systémy

Nech $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ je ortonormálny systém v predhilbertovom priestore H, $x \in H$, $c_i = (x, e_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

(a) Dokážte, že $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$.

(b) Dokážte Besselovu nerovnosť: $\|x\|^2 \geqq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$.

(c) Dokážte, že funkcia $f\colon C^n \to R$, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2$ nadobúda minimum v bode $(c_1, \ldots, c_n)$.

(*Návod.* Využite túto vlastnosť komplexných čísel:

$$|a - b|^2 = |a|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b + |b|^2.)$$

I Fourierove rady

Rad $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, kde $c_i = (x, e_i)$, nazvime Fourierovým radom patriacim k prvku x a k ortonormálnemu systému $(e_i)_{i=1}^{\infty}$.

(a) Zostrojte Fourierov rad patriaci k ľubovoľnému prvku $x \in l^2$, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$. Napíšte jeho n-tý čiastočný súčet.

(b) Zostrojte Fourierov rad patriaci k funkcii $f \in C(-\pi, \pi)$ a k ortonormálnemu systému

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

J Priestor L^1

(a) Dokážte, že $L^1 = \mathscr{L} \cap \mathscr{M}$, kde $\mathscr{M}$ je množina všetkých merateľných funkcií v danom priestore.

(b) Nech pre $f \in \mathscr{L}$ je $[f] = \{g \in L;\ f = g\ \mu\text{-skoro všade}\}$, $[\mathscr{L}] = \{[f];\ f \in \mathscr{L}\}$. Dokážte, že $[\mathscr{L}]$ je lineárny normovaný izometrický izomorfný s priestorom $\mathscr{L}^1$, t. j. existuje lineárne bijektívne zobrazenie $\varphi\colon [\mathscr{L}] \to \mathscr{L}^1$, ktoré zachováva normu $\|\varphi([f])\| = \|[f]\|$ pre každé $f \in \mathscr{L}$.

K Úplnosť $\mathscr{L}^p$

(a) Dokážte Čebyševovu nerovnosť. Ak $f \in L^p$, potom

$$\mu(\{x\,;\, f(x) \geqq \varepsilon\}) \leqq \frac{1}{\varepsilon^p} \int f^p \, d\mu.$$

(b) Nech $g_k \in L^p$, $\|g_k - g_{k+1}\| < \frac{1}{4^k}$. Dokážte, že potom existuje taká funkcia g, že $g_k(x) \to g(x)$ pre μ-skoro všetky x.

(*Návod.* Položme $A_k = \{x\,;\, |g_k(x) - g_{k+1}(x)| \geqq 2^{-k}\}$; potom z (a) vyplýva, že $\mu(A_k) < 2^{-kp}$, $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0.$)

(c) Pomocou (b) a Fatouovej lemy (úloha **L** z kap. 7) dokážte, že L^p je úplný. (*Návod.* Z danej Cauchyho postupnosti $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ vyberte takú $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, aby $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \frac{1}{4^k}$.)

L Priestory l^p

Nech $X = N$ je množina všetkých prirodzených čísel, $\mathscr{S}$ je σ-algebra všetkých podmnožín množiny N, $\mu(E) =$ počet prvkov množiny E, ak je E konečná, a $\mu(E) = \infty$ v opačnom prípade. Položme $l^p = L^p(N, \mathscr{S}, \mu)$.

(a) Dokážte, že l^p pozostáva zo všetkých postupností $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ (t. j. funkcií na N), pre ktoré je $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

(b) Pomocou (a) dokážte propozíciu 8.10.

(c) Nájdite taký priestor $(X, \mathscr{S}, \mu)$, aby $R^n = L^2(X, \mathscr{S}, \mu)$.

M Lineárne ohraničené funkcionály

Pomocou Rieszovej vety o reprezentácii určite všeobecný tvar lineárneho ohraničeného funkcionálu

(a) v priestore R^n,

(b) v priestore l^2.

N Priestory lineárnych ohraničených funkcionálov

Znakom H' označme množinu všetkých lineárnych ohraničených funkcionálov definovaných na lineárnom normovanom priestore H.

(a) Dokážte, že H' je lineárny normovaný priestor, ak definujeme $\|f\| = \sup\{|f(x)|\,;\, \|x\| = 1\}$.

(b) Dokážte, že H' je Banachov priestor.

(*Návod.* Použijeme nerovnosti $|f_n(x) - f_m(x)| \leqq \|f_n - f_m\| \, \|x\| \leqq \varepsilon \|x\|$.)

(c) Nech H je Hilbertov priestor. Dokážte, že H' je izometricky izomorfný s priestorom H.

(*Návod.* Použite Rieszovu vetu o reprezentácii.)

O Ortogonálny rozklad

Podmnožina L lineárneho normovaného priestoru H sa nazýva podpriestorom, ak je uzavretá vzhľadom na lineárne kombinácie prvkov z L (t.j. $x, y \in L \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L$) a uzavretá podmnožina metrického priestoru H (t.j. $x_n \in L, x_n \to x \Rightarrow x \in L$.)

(a) Nech J je predhilbertov priestor, $L \subset H$. Položme $L^{\perp} = \{x \in H; (x, y) = 0$ pre všetky $y \in L\}$. Dokážte, že $L^{\perp}$ je podpriestorom.

(b) Nech H je Hilbertov priestor, L jeho podpriestor. Dokážte, že ku každému $x \in H$ existujú také $y \in L$ a $z \in L^{\perp}$, že $x = y + z$.

(*Návod.* Zobrazenie f: $L \to R$ definované rovnosťou $f(t) = (t, x)$ je lineárnym ohraničeným funkcionálom; existuje teda také $y \in L$, že $f(t) = (t, y)$, $t \in L$; $z = x - y$.)

P Porovnateľné miery

Nech μ, ν sú konečné miery definované na σ-algebre $\mathcal{S}$ podmnožín množiny X, $\nu \leqq \mu$. Označme $L^2(\mu) = L^2(X, \mathcal{S}, \mu)$, $L^1(\nu) = L^1(X, \mathcal{S}, \nu)$.

(a) Dokážte, že $L^2(\mu) \subset L^1(\nu)$.

(*Návod.* Použite Cauchyho nerovnosť.)

(b) Definujme F: $L^2(\mu) \to R$ predpisom $F(f) = \int f \, d\nu$. Dokážte, že F je lineárnym ohraničeným funkcionálom.

(c) Dokážte, že existuje také $g \in L^2(\mu)$, že pre všetky $f \in L^2(\mu)$ platí $\int f \, d\nu = \int fg \, d\mu$.

(*Návod.* Použite Rieszovu vetu o reprezentácii.)

(d) Dokážte, že $0 \leqq g \leqq 1$ μ-skoro všade.

(*Návod.* Položte $f = \chi_E$.)

Q Radonova—Nikodymova veta

Nech μ, ν sú konečné miery na σ-algebre $\mathcal{S}$. Nech $\mu(E) = 0$ implikuje $\nu(E) = 0$. Položme $\tilde{\mu} = \mu + \nu$.

(a) Dokážte, že $\tilde{\mu}$ je miera a pre každú $\tilde{\mu}$-integrovateľnú funkciu f platí

$$\int f \, d\tilde{\mu} = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu.$$

(b) Dokážte, že existuje taká funkcia $g \in L^2(\tilde{\mu})$ $\tilde{\mu}$-skoro všade medzi 0 a 1, že pre všetky $f \in L^2(\tilde{\mu})$ platí

$$\int f(1 - g) \, d\nu = \int fg \, d\mu.$$

(*Návod.* Použite (a) a úlohu **P**(c).)

(c) Dokážte, že $g < 1$ μ-skoro všade.

(*Návod.* Položte v (b) $f = \chi_E$, $E = \{x\,;\ g(x) = 1\}$.)

(d) Existuje taká funkcia $h \in L^1(\mu)$, že pre všetky $E \in \mathcal{S}$ $\nu(E) = \int_E h \, d\mu$.

$\Big($*Návod.* V (b) položte $f = \chi_E \chi_A \sum_{i=0}^{n-1} g_i$, kde $A = \{x\,;\ g(x) < 1\}$ a použite tej skutočnosti, že

$$\chi_A(x) \sum_{i=0}^{n} g^i(x) \nearrow \chi_A(x) \frac{1}{1 - g(x)}.\Big)$$

Poznámky a doplnky

Priestory $\mathscr{L}^p$ sú peknou ukážkou použitia teórie Lebesguovho integrálu. Na čo sú dobré, to sme sa pokúsili naznačiť na príklade Hilbertovho priestoru $\mathscr{L}^2$. Čitateľa upozorňujeme na to, že keby sme mali k dispozícii iba Riemannovu teóriu integrovania a nie Lebesguovu, odpovedajúce priestory $\mathscr{L}^p$ by nemuseli byť úplné. Pokiaľ ide o ortogonálne systémy, táto partia je veľmi dôkladne a precízne popísaná v knihe Jarníka [1].

Pravda, nezostali sme len pri priestoroch $\mathscr{L}^p$. Nezdržali sme sa, aby sme neuviedli ešte aspoň niečo z funkcionálnej analýzy. Skutočným dôvodom pre výber Rieszovej vety o reprezentácii (ktorá je aj sama osebe krásna) bola možnosť alternatívneho dôkazu Radonovej—Nikodymovej vety (úloha **Q**; pozri tiež vetu 10.17). Funkcionálna analýza patrí inak medzi ozdoby súčasnej matematiky a kniha venovaná Lebesguovej teórii integrovania nemôže nezdôrazniť úlohu, ktorú táto teória vo funkcionálnej analýze hrá. So základmi funkcionálnej analýzy sa môže čitateľ zoznámiť z prekladov Šilova [2], Taylora [1], Kolmogorova—Fomina [1], Rudina [3], zo skrípt Mišíka [2], ďalej napr. z Riesza—Nagya [1] a z Ljusternika—Soboleva [1]. Literatúra venovaná funkcionálnej analýze sa bude u nás aj ďalej rozvíjať a stojí za to ju sledovať.

Pokiaľ ide o výskumnú problematiku, môžeme snáď upozorniť na drobnosti týkajúce sa priestorov $\mathscr{L}^p$, obsiahnuté v prácach Vavrovej [1], Kulcsárovej [1], Riečana [22] a Šiposa [5].