— text obsahuje znenia viet, ktoré budeme dokazovať na prednáškach

— text je tiež doplnený aj o úlohy, vyriešenie ktorých by tiež malo študentom pomôcť k lepšiemu pochopeniu prednášaných tém

— na konci tejto kapitoly nájdete aj zadania úloh semestrálnej práce, vypracované úlohy (každú na osobitnom hárku papiera formátu $A4$) treba odovzdať najneskôr v prvom týždni po skončení semestra

G. Monoszová, Analytická geometria 2 - Kapitola V

KAPITOLA V
PODOBNÉ ZOBRAZENIA

V. 1. Podobné zobrazenie - definícia, vlastnosti

Definícia.
Nech $\mathbb{E}(\mathcal{A};\mathbb{V};-)$, $\mathbb{E}'(\mathcal{A}';\mathbb{V}';-)$ sú euklidovské podpriestory. Zobrazenie

$$g:\,\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$$

nazývame **podobné zobrazenie**, ak existuje kladné reálne číslo k, pričom platí

$$\forall X,Y\in\mathcal{A}:\;|g(X)g(Y)|=k.|XY|.$$

Veta 1.
Každé podobné zobrazenie možno zložiť z rovnoľahlosti a zhodného zobrazenia (v ľubovoľnom poradí).

Veta 2.
a) Podobné zobrazenie je prostým zobrazením.
b) Podobné zobrazenie je afinným zobrazením.

Úloha 1.
Určte pravdivostnú hodnotu nasledovných výrokov. Svoje tvrdenia zdôvodnite.
a) Každé podobné zobrazenie je zhodným zobrazením.
b) Každé zhodné zobrazenie je podobným zobrazením.
c) Nakreslite Vennov diagram pre štyri množiny - množinu prostých zobrazení, množinu afinných zobrazení, množinu zhodných zobrazení a množinu podobných zobrazení. Vyznačte v diagrame, ktoré z polí znázorňujú prázdnu množinu.

Úloha 2.
Afinné zobrazenie g, $g:\mathbb{E}\to\mathbb{E}'$ (kde $\mathbb{E}(\mathcal{A};\mathbb{V};-)$, $\mathbb{E}'(\mathcal{A}';\mathbb{V}';-)$ sú euklidovské podpriestory) je podobným zobrazením s koeficientom podobnosti k práve vtedy, keď
a) $\forall\overline{u}\in\mathbb{V}:||\overline{g}(\overline{u})||=k.||\overline{u}||$,
b) $\forall\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{V}:\overline{g}(\overline{u}).\overline{g}(\overline{v})=k^2(\overline{u}.\overline{v})$,
c) $\overline{g}(\overline{u}_i).\overline{g}(\overline{v}_j)=k^2(\overline{u}_i.\overline{v}_j)$, kde $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\dots,\overline{u}_n\}$ je báza vektorového priestoru $\mathbb{V}$.

Veta 3.
Nech $P_0,P_1,\dots,P_n$ sú lineárne nezávislé body euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$, nech $P'_0,P'_1,\dots,P'_n$ sú body euklidovského priestoru $\mathbb{E}'$. Afinné zobrazenie g, také že $g(P_i)=P'_i$, $i\in\{0,1,\dots,n\}$ je podobné zobrazenie práve vtedy, ak existuje kladné reálne číslo k, také že platí $|P'_iP'_j|=k.|P_iP_j|$, $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$.

Veta 4.
Afinné zobrazenie $g:\,\mathbb{E}_n\longrightarrow\mathbb{E}'_m$ je podobným zobrazením práve vtedy, ak existuje nenulové reálne číslo k také, že pre maticu zobrazenia M_g platí

$$M_g.M_g^T=k^2.I_n,$$

kde M_g^T je transponovaná matica k matici M_g zobrazenia g.

Definícia.
Podobné zobrazenie euklidovského priestoru do toho istého priestoru sa nazýva **podobnosť**.

Veta 5.
Všetky podobnosti v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_n$ *vzhľadom na skladanie tvoria grupu. Nazývame ju* **grupa podobností** *priestoru* $\mathbb{E}_n$.

V. 2. Samodružné prvky podobnosti

Postup pri určovaní samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok podobnosti je analogický ako pri určovaní samodružných prvkov afinného zobrazenia.

Úloha 3.
Čo viete povedať o charakteristickom čísle podobnosti?

Veta 6.
Každá vlastná podobnosť (t.j. koeficient podobnosti $k \neq 1$*) má práve jeden samodružný bod.*

V. 3. Analytické vyjadrenie podobnosti euklidovskej roviny

Veta 7.
Každá podobnosť g *v euklidovskom priestore* $\mathbb{E}_2$ *s koeficientom podobnosti* k *má analytické vyjadrenie*

buď v tvare

$$\begin{aligned} g: x' &= ax - by + p \\ y' &= bx + ay + q \end{aligned}$$

alebo v tvare

$$\begin{aligned} g: x' &= ax + by + p \\ y' &= bx - ay + q \end{aligned}$$

pričom platí $a^2 + b^2 = k^2$.

Semestrálna práca

Geometria 2

úlohu č. 1 - by ste mali byť schopní vyriešiť po 5. týždni semestra
úlohy č. 2 až 9 - by ste mali byť schopní vyriešiť po 8. týždni semestra
úlohu č. 10 - by ste mali byť schopní vyriešiť po 9. týždni semestra

- vypracované úlohy (každú na osobitnom hárku papiera formátu $A4$) treba odovzdať <u>najneskôr</u> v prvom týždni po skončení letného semestra

Semestrálna práca

Geometria 2 (Afinné a zhodné zobrazenia)

- prvá časť

Úloha č. 1 Uveďte jeden príklad na každý typ afinného zobrazenia v $\mathbb{A}_2$ (pozrite si klasifikáciu afinných zobrazení v $\mathbb{A}_2$ z prednášky). Pri každom príklade určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky. Jednotlivé afinné zobrazenia označte f_1, f_2, ... a zapíšte ich analytické vyjadrenie do pripravenej tabuľky.

	ss: $\nexists$	**ss:** $\exists!$	**ss:** $\exists$ **dva**	**ss: všetky**
sb: $\nexists$				
sb: $\exists!$				
sb: tvoria priamku				
sb: všetky				

sb - samodružné body
ss - samodružné smery

Semestrálna práca

Geometria 2 (Afinné a zhodné zobrazenia)

- druá časť

Úloha č. 2 Dané sú dve osové súmernosti σ_{o_1} a σ_{o_2}, pričom ich osi o_1 a o_2 sú totožné. Zistite aké zobrazenie vznikne zložením $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2}$. Zvoľte (vhodne) kartézsku súradnicovú sústavu a svoje tvrdenie dokážte na základe určenia samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok zobrazenia $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2}$.

Úloha č. 3 Dané sú dve osové súmernosti σ_{o_1} a σ_{o_2}, pričom ich osi o_1 a o_2 sú rovnobežné rôzne. Zistite aké zobrazenie vznikne zložením $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2}$. Zvoľte (vhodne) kartézsku súradnicovú sústavu a svoje tvrdenie dokážte na základe určenia samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok zobrazenia $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2}$. Potom situáciu vo vami zvolenej súradnicovej sústave aj načrtnite.

Úloha č. 4 Dané sú dve osové súmernosti σ_{o_1} a σ_{o_2}, pričom ich osi o_1 a o_2 sú kolmé. Zistite aké zobrazenie vznikne zložením $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2}$. Zvoľte (vhodne) kartézsku súradnicovú sústavu a svoje tvrdenie dokážte na základe určenia samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok zobrazenia $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2}$. Potom situáciu vo vami zvolenej súradnicovej sústave aj načrtnite.

Úloha č. 5 Dané sú dve osové súmernosti σ_{o_1} a σ_{o_2}, pričom ich osi o_1 a o_2 sú rôznobežné nie kolmé. Zistite aké zobrazenie vznikne zložením $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2}$. Zvoľte (vhodne) kartézsku súradnicovú sústavu a svoje tvrdenie dokážte na základe určenia samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok zobrazenia $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2}$. Potom situáciu vo vami zvolenej súradnicovej sústave aj načrtnite.

Úloha č. 6 Dané sú tri osové súmernosti σ_{o_1}, σ_{o_2} a σ_{o_3}, pričom ich osi o_1, o_2 a o_3 sú sú navzájom rovnobežné rôzne. Zistite aké zobrazenie vznikne zložením $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2} \circ \sigma_{o_3}$. Zvoľte (vhodne) kartézsku súradnicovú sústavu a svoje tvrdenie dokážte na základe určenia samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok zobrazenia $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2} \circ \sigma_{o_3}$. Potom situáciu vo vami zvolenej súradnicovej sústave aj načrtnite.

Úloha č. 7 Dané sú tri osové súmernosti σ_{o_1}, σ_{o_2} a σ_{o_3}, pričom prienikom ich osí o_1, o_2 a o_3 je jednobodová množina. Zistite aké zobrazenie vznikne zložením $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2} \circ \sigma_{o_3}$. Zvoľte (vhodne) kartézsku súradnicovú sústavu a svoje tvrdenie dokážte na základe určenia samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok zobrazenia $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2} \circ \sigma_{o_3}$. Potom situáciu vo vami zvolenej súradnicovej sústave aj načrtnite.

Úloha č. 8 Dané sú tri osové súmernosti σ_{o_1}, σ_{o_2} a σ_{o_3}, pričom osi o_1, o_2 sú rôzne rovnobežky a os o_3 je na ne kolmá. Zistite aké zobrazenie vznikne zložením $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2} \circ \sigma_{o_3}$. Zvoľte (vhodne) kartézsku súradnicovú sústavu a svoje tvrdenie dokážte na základe určenia samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok zobrazenia $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2} \circ \sigma_{o_3}$. Potom situáciu vo vami zvolenej súradnicovej sústave aj načrtnite.

Úloha č. 9 Dané sú tri osové súmernosti σ_{o_1}, σ_{o_2} a σ_{o_3}, pričom ich osi o_1, o_2 a o_3 sú nositeľky strán všeobecného trojuholníka. Zistite aké zobrazenie vznikne zložením $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2} \circ \sigma_{o_3}$. Zvoľte (vhodne) kartézsku súradnicovú sústavu a svoje tvrdenie dokážte na základe určenia samodružných bodov, samodružných smerov a samodružných priamok zobrazenia $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2} \circ \sigma_{o_3}$. Potom situáciu vo vami zvolenej súradnicovej sústave aj načrtnite.

Semestrálna práca

Geometria 2 (Afinné a zhodné zobrazenia)

- tretia časť

Úloha č. 10

a) Určte analytické vyjadrenie podobného zobrazenia g, ktoré vznikne zložením rovnoľahlosti f_1 a posunutia f_2. Rovnoľahlosť $f_1 = \kappa_{S;h}$, stredom rovnoľahlosti je bod $S[-1;8]$, koeficient je $h = 3$, posunutie $f_2 = \tau_{\overline{u}}$, vektor posunutia $\overline{u} = (10;-4)$.

b) Určte obraz $\triangle ABC$ v podobnosti g a overte na vrcholoch trojuholníka, že $g = f_1 \circ f_2$.
$A[-3;\frac{13}{2}]$, $B[0;\frac{13}{2}]$, $C[-1;5]$

c) Narysujte v KSS $\triangle ABC$, potom narysujte jeho obraz $A_1B_1C_1$ v rovnoľahlosti f_1 a potom narysujte obraz $\triangle A_1B_1C_1$ v posunutí f_2 (označte ho $\triangle A_{1,2}B_{1,2}C_{1,2}$).
(KSS si umiestnite tak, aby ste na x-ovej súradnicovej osi mohli vyznačiť hodnoty v intervale $\langle -10;15\rangle$ a na y-ovej súradnicovej osi hodnoty v intervale $\langle -10;9\rangle$.)