— text obsahuje definície potrebné k zavedeniu projektívneho rozšírenia euklidovského priestoru
— text je doplnený aj o niekoľo poznámok, ich cieľom je dopomôcť študentom k lepšiemu pochopeniu pojmov aj súvislostí medzi nimi
— text je tiež doplnený aj o úlohy, vyriešenie ktorých by tiež malo študentom pomôcť k lepšiemu pochopeniu prednášaných tém

G. Monoszová, Analytická geometria 3 - Kapitola VI

KAPITOLA VI
PROJEKTÍVNE ROZŠÍRENIE EUKLIDOVSKÉHO PRIESTORU

VI. 1. Projektívne priestory $\overline{\mathbb{E}}_2$, $\overline{\mathbb{E}}_3$ Ideálne prvky

Definícia.
Nech ϱ_1, ϱ_2 sú rôznobežné roviny v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_3$, nech $S \in \mathbb{E}_3 - (\varrho_1 \cup \varrho_2)$. Zobrazenie

$$\begin{aligned} \Phi : \varrho_1 &\longrightarrow \varrho_2 \\ X_1 &\longmapsto X_2, \text{ pričom } S,\ X_1,\ X_2 \text{ sú kolineárne body,} \end{aligned}$$

nazývame **centrálne premietanie** z roviny ϱ_1 do roviny ϱ_2. Bod S nazývame stredom centrálneho premietania.

V centrálnom premietaní $\Phi : \varrho_1 \longrightarrow \varrho_2$ medzi dvoma rovinami v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_3$ nie každý bod z roviny ϱ_1 má svoj obraz a tiež nie každý bod z roviny ϱ_2 má svoj vzor. V ďalšom rozšírime euklidovský priestor tak, aby sme spomínané "nedostatky" odstránili.

Definícia.
Nech $\mathbb{E}_2(\mathcal{A}; \mathbb{V}_2; -)$ je euklidovská rovina. Pod **ideálnym bodom** euklidovskej roviny rozumieme jednorozmerný vektorový podpriestor jej zamerania $\mathbb{V}_2$.
Ideálna priamka euklidovskej roviny je množina všetkých jej ideálnych bodov.

Definícia.
Pod **projektívnym rozšírením euklidovskej roviny** $\mathbb{E}_2$ rozumieme euklidovský priestor $\mathbb{E}_2$ doplnený o ideálne body a ideálnu priamku. Projektívne rozšírenie euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$ budeme označovať $\overline{\mathbb{E}}_2$.

Poznámky.

1. Ideálny bod je určený nenulovým vektorom.
   Každé dva lineárne nezávislé vektory určujú dva rôzne ideálne body. Lineárne závislé nenulové vektory určujú ten istý ideálny bod.
   Dve rovnobežné priamky v priestore $\overline{\mathbb{E}}_2$ majú spoločný ten istý ideálny bod.
   Dve rôznobežné priamky v priestore $\overline{\mathbb{E}}_2$ majú rôzne ideálne body.
2. Projektívne rozšírenie euklidovskej roviny $\overline{\mathbb{E}}_2$ je tzv. projektívna rovina. Ľubovoľnými dvoma rôznymi bodmi projektívnej roviny je jednoznačne určená práve jedna priamka a ľubovoľné dve rôzne priamky projektívnej roviny sa pretínajú práve v jednom bode (Úloha 1).

Definícia.
Nech $\mathbb{E}_3(\mathcal{A}; \mathbb{V}_3; -)$ je trojdimenzionálny euklidovský priestor. Pod **ideálnym bodom**

euklidoského priestoru $\mathbb{E}_3$ rozumieme jednorozmerný vektorový podpriestor jeho zamerania $\mathbb{V}_3$.
Pod **ideálnou priamkou** euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$ rozumieme dvojrozmerný vektorový podpriestor jeho zamerania $\mathbb{V}_3$.
Ideálna rovina euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$ je množina všetkých ideálnych bodov priestoru $\mathbb{E}_3$.

Definícia.
Pod **projektívnym rozšírením euklidovského priestoru** $\mathbb{E}_3$ rozumieme euklidovský priestor $\mathbb{E}_3$ doplnený o ideálne body, ideálne priamky a ideálnu rovinu. Projektívne rozšírenie euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$ budeme označovať $\overline{\mathbb{E}}_3$.

Poznámka.

3. Analogicky ako sme postupovali pri zavedení projektívneho rošírenia euklidovského priestoru $\mathbb{E}_2$ (prípadne $\mathbb{E}_3$), môžeme postupovať pri projektívnom rozšírení afinného priestoru $\mathbb{A}_2$ (prípadne $\mathbb{A}_3$).

VI. 2. Homogénne súradnice bodu
Analytické vyjadrenie projektívnej priamky

V projektívnej rovine môžeme zaviesť tzv. **homogénne súradnice bodu**. Pod homogénnymi súradnicami bodu X projektívnej roviny $\overline{\mathbb{E}}_2$ rozumieme usporiadanú trojicu $[kx, ky, kz]$, kde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ a $[kx, ky, kz] \neq [0, 0, 0]$. Ak bod X je ideálny, tak $z = 0$ a ak X je vlastný bod (t.j. nie je ideálny), tak $z \neq 0$.

Poznámka.

4. Dve (nenulové) usporiadané trojice $[x, y, z]$, $[x', y', z']$ sú súradnicami toho istého bodu práve vtedy, keď jedna trojica je nenulovým násobkom druhej.

5. Ak $[x, y, z]$ sú homogénne súradnice vlastného bodu X projektívnej roviny $\overline{\mathbb{E}}_2$, tak $[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}]$ sú karteziánske súradnice bodu X ($X \in \mathbb{E}_2$).

Všeobecná rovnica projektívnej priamky určenej bodmi $A[x_1, y_1, z_1]$, $B[x_2, y_2, z_2]$:

$$ax + by + cz = 0, \quad \text{kde} \quad a : b : c = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Parametrické vyjadrenie projektívnej priamky určenej bodmi $A[x_1, y_1, z_1]$, $B[x_2, y_2, z_2]$:

$$\begin{aligned} x &= k_1x_1 + k_2x_2 \\ y &= k_1y_1 + k_2y_2 \\ z &= k_1z_1 + k_2z_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Úloha 1. Dokážte, že dve rôzne priamky v projektívnej rovine $\overline{\mathbb{E}}_2$ majú spoločný práve jeden bod.

Úloha 2. Dokážte, že dvoma rôznymi bodmi projektívnej roviny $\overline{\mathbb{E}}_2$ je jednoznačne určená priamka.