— text obsahuje znenia viet, ktoré budeme dokazovať na prednáškach
— text je doplnený aj o množstvo poznámok, ich cieľom je dopomôcť študentom k lepšiemu pochopeniu pojmov aj súvislostí medzi nimi
— text je tiež doplnený aj o niekoľko úloh, vyriešenie ktorých by tiež malo študentom pomôcť k lepšiemu pochopeniu prednášaných tém

G. Monoszová, Analytická geometria 3 - Kapitola VII

KAPITOLA VII
KUŽEĽOSEČKY

VII. 1. Rôzne pohľady na pojem kužeľosečky

Ešte predtým ako odvodíme analytické vyjadrenie kužeľosečky, ukážeme si rôzne prístupy k pojmu kužeľosečky.

• Kužeľosečka - ako množina bodov danej vlastnosti

Pripomeňme si definície elipsy, paraboly a hyperboly zo strednej školy.

Nech F_1, F_2 sú dva rôzne body euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$. Pod **elipsou** rozumieme množinu všetkých bodov z roviny $\mathbb{E}_2$, ktoré majú od daných bodov F_1, F_2 konštantný súčet vzdialeností, ktorý je väčší ako je vzdialenosť $|F_1F_2|$.

Nech F je bod euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$ a d je priamka v $\mathbb{E}_2$, ktorá neprechádza bodom F. Pod **parabolou** rozumieme množinu všetkých bodov z roviny $\mathbb{E}_2$, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od daného bodu F a danej priamky d.

Nech F_1, F_2 sú dva rôzne body euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$. Pod **hyperbolou** rozumieme množinu všetkých bodov z roviny $\mathbb{E}_2$, ktorých absolútna hodnota rozdielu ich vzdialeností od daných bodov F_1, F_2 je konštantný, menší ako je vzdialenosť $|F_1F_2|$.

• Kužeľosečka - ako rovinný rez rotačnej kužeľovej plochy

Veta 1 (Quetelet - Dandelinova).
Rezom kužeľovej plochy rovinou, ktorá neprechádza jej vrcholom je

a) elipsa (prípadne kružnica), ak rezová rovina pretína všetky tvoriace priamky kužeľovej plochy,

b) parabola, ak rezová rovina je rovnobežná práve s jednou tvoriacou priamkou kužeľovej plochy,

c) hyperbola, ak rezová rovina je rovnobežná práve s dvoma tvoriacimi priamkami kužeľovej plochy.

Veta 2.
Označme ω uhol, ktorý zvierajú tvoriace priamky kužeľvej plochy s rovinou kolmou na os kužeľovej plochy a označme φ uhol rezovej roviny a roviny kolmej na os kužeľovej plochy. Rovinným rezom kužeľovej plochy je

a) elipsa (prípadne kružnica), ak uhol φ je menší ako uhol ω,

b) parabola, ak uhol φ je zhodný s uholom ω,

c) hyperbola, ak uhol φ je väčší ako uhol ω.

• Kužeľosečka - ako obraz kružnice v perspektívnej kolineácii medzi dvoma rovinami v $\overline{\mathbb{E}}_3$

Definícia.
Nech $\overline{\varrho}_1$, $\overline{\varrho}_2$ sú (vlastné) rôznobežné roviny v projektívnom priestore $\overline{\mathbb{E}}_3$, nech S je vlastný bod, $S \in \overline{\mathbb{E}}_3 \setminus (\overline{\varrho}_1 \cup \overline{\varrho}_2)$. Zobrazenie

$$\begin{aligned} \Theta : \overline{\varrho}_1 &\longrightarrow \overline{\varrho}_2 \\ X_1 &\longmapsto X_2, \text{ pričom } S,\, X_1,\, X_2 \text{ sú kolineárne body,} \end{aligned}$$

nazývame **perspektívnou kolineáciou** (medzi rovinami $\overline{\varrho}_1$, $\overline{\varrho}_2$ v $\overline{\mathbb{E}}_3$). Bod S nazývame **stredom** a priesečnicu $\overline{\varrho}_1 \cap \overline{\varrho}_2$ nazývame **osou** perspektívnej kolineácie.

Priamky $u_1 \in \overline{\varrho}_1$ a $v_2 \in \overline{\varrho}_2$, pre ktoré platí, že obrazom u_1 a vzorom v_2 v kolineácii Θ sú ideálne priamky, nazývame **úbežnice**.

Poznámky.

1. Perspektívna kolineácia medzi dvoma rovinami v projektívnom priestore $\overline{\mathbb{E}}_3$ je bijektívne zobrazenie bodov projektívnej roviny $\overline{\varrho}_1$ na body projektívnej roviny $\overline{\varrho}_2$.
2. Priamka a jej obraz v perspektívnej kolineácii medzi dvoma rovinami v projektívnom priestore $\overline{\mathbb{E}}_3$ sa pretínajú na osi kolineácie.
3. Deliaci pomer nie je invraiant perspektívnej kolineácie.
4. Dvojpomer je invariantom perspektívnej kolineácie.

Veta 3.
Nech $\Theta : \overline{\varrho}_1 \longrightarrow \overline{\varrho}_2$ je perspektívna kolineácia (medzi dvoma rovinami v projektívnom priestore $\overline{\mathbb{E}}_3$) a nech $u_1 \subset \overline{\varrho}_1$ je jej úbežnica.

a) *Obrazom bodu v perspektívnej kolineácii Θ je bod.*
b) *Obrazom priamky v perspektívnej kolineácii Θ je priamka.*
c) *Obrazom úsečky AB v perspektívnej kolineácii Θ je*
   - *úsečka, ak $AB \cap u_1 = \emptyset$,*
   - *polpriamka, ak $AB \cap u_1 = \{A\}$, prípadne ak $AB \cap u_1 = \{B\}$,*
   - *zjednotenie dvoch polpriamok, ktoré ležia na jednej priamke a sú disjunktné, ak $AB \cap u_1 = \{C\}$, pričom bod C leží medzi bodmi A, B (t.j. platí $\mu(ACB)$).*
d) *Obrazom kružnice k v perspektívnej kolineácii Θ je*
   - *elipsa, ak úbežnica u_1 je nesečnicou kružnice k,*
   - *parabola, ak úbežnica u_1 je dotyčnicou kružnice k,*
   - *hyperbola, ak úbežnica u_1 je sečnicou kružnice k.*

• <u>Kužeľosečka - ako obraz kružnice v perspektívnej kolineácii v projektívnej rovine $\overline{\mathbb{E}}_2$</u>

Nech $\Theta : \overline{\varrho}_1 \longrightarrow \overline{\varrho}_2$ je perspektívna kolineácia so stredom S v projektívnom priestore $\overline{\mathbb{E}}_3$. Zvoľme vlastný bod O, $O \notin \overline{\varrho}_1 \cup \overline{\varrho}_2 \cup \{S\}$ a vlastnú rovinu $\overline{\nu}$, $\overline{\nu} \neq \overline{\varrho}_i$, $i \in \{1, 2\}$. Stredovým premietaním perspektívnej kolineácie Θ zo stredu O do roviny $\overline{\nu}$ dostaneme tzv. **perspektívnu kolineáciu θ v projektívnej rovine $\overline{\nu}$**. Stredom tejto perspektívnej kolineácie θ v rovine $\overline{\nu}$ je stredový priemet bodu S v stredovom premietaní zo stredu O do roviny $\overline{\nu}$ a osou je obraz priamky $\overline{\varrho}_1 \cap \overline{\varrho}_2$ v spomínanom stredovom premietaní. Zrejme platí, že stred perspektívnej kolineácie θ, ľubovoľný bod X ($X \in \overline{\nu}$) a jeho obraz $\theta(X)$ sú kolineárne body, a tiež ľubovoľná priamka p ($p \subset \overline{\nu}$) a jej obraz $\theta(p)$ sa pretínajú na osi perspektívnej kolineácie θ.

Veta 4.
Nech $\theta(S; o; u)$ je perspektívna kolineácia v projektívnej rovine daná stredom S, osou o a úbežnicou u. Nech k je kružnica. Potom $\theta(k)$ je

a) *elipsa (v špeciálnom prípade kružnica), ak úbežnica u je nesečnicou kružnice k,*
b) *parabola, ak úbežnica u je dotyčnicou kružnice k,*
c) *hyperbola, ak úbežnica u je sečnicou kružnice k.*

VII. 2. Analytické vyjadrenie kužeľosečky. Ohnisková, vrcholová, stredová rovnica.

Pri odvodení analytického vyjadrenia kužeľosečky sa sústredíme na kužeľosečku z pohľadu množiny bodov danej vlastnosti. Vyriešte najprv nasledovné úlohy.

Úloha 1.
Určte analytické vyjadrenie množiny bodov $X[x; y]$ roviny $\mathbb{E}_2$, ktoré majú od daného bodu $A[a, b]$ vzdialenosť rovnú danému kladnému číslu r.

Úloha 2.
Určte analytické vyjadrenie množiny bodov $X[x; y]$ roviny $\mathbb{E}_2$, ktoré majú od danej priamky $p:\ ax + by + c = 0$ vzdialenosť rovnú danému kladnému číslu r.

Úloha 3.
Určte analytické vyjadrenie množiny bodov $X[x; y]$ roviny $\mathbb{E}_2$, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od daných dvoch rôznych bodov $A[a; 0]$, $B[b; 0]$ (t.j. pre pomer vzdialeností k od bodov A, B platí $k = 1$).

Úloha 4.
Určte analytické vyjadrenie množiny bodov $X[x; y]$ roviny $\mathbb{E}_2$, ktorých pomer vzdialeností od daných dvoch rôznych bodov $A[a; 0]$, $B[b; 0]$ je dané kladné číslo k, $k \neq 1$.

Hľadajme teraz

> **množinu bodov $X[x; y]$ roviny $\mathbb{E}_2$ ktorých pomer vzdialeností od daného bodu F a od danej priamky d sa rovná danému kladnému číslu k.**

Pre hľadané body $X[x; y]$ teda platí

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = k \text{ (pričom zrejme } |Xd| \neq 0, \text{ t.j. } X \notin d).$$

Označme p vzdialenosť daného bodu F od danej priamky d,

$$p = |Fd|.$$

V ďalšom budeme postupne voliť KSS (karteziánsku súradnicovú sústavu) čo najvýhodnejšie vzhľadom na vyjadrenie pomeru vzdialeností hľadaného bodu od daného bodu a od danej priamky.

♠ *Voľba KSS — nech súradnicová os x prechádzala bodom F a je kolmá na priamku d.*

Potom

$$\underline{d:\ x=c}$$
$$\underline{F[e;0]}$$
$$\underline{e=c+p}.$$

Teda

$$\frac{|XF|}{|Xd|}=k$$
$$(x-e)^2+y^2=k^2(x-c)^2$$
$$x^2(1-k^2)-2(e-k^2c)x+y^2+e^2-k^2c^2=0 \tag{R}$$

A) ak $F\in d$

♣ — *umiestnime počiatok KSS do bodu F*
potom

$\underline{e=0=p}$ a preto $\underline{c=0}$

$$\overset{\text{(R)}}{\Longrightarrow} x^2(1-k^2)+y^2=0$$

pre $k<1$ je hľadaná množina bodov
PRÁZDNA MNOŽINA
(vyhovuje len bod $F[0;0]$, ale $F\in d$)

pre $k=1$ je hľadaná množina bodov
TOTOŽNÉ ROVNOBEŽKY okrem bodu F
(rovnica je $y^2=0$)

pre $k>1$ je hľadaná množina bodov
ZJEDNOTENIE RÔZNOBEŽIEK okrem bodu F
(ich rovnice sú $y=x\sqrt{k^2-1}$, $y=-x\sqrt{k^2-1}$)

B) ak $F \notin d$

potom zrejme $p \neq 0$ a hľadaná množina bodov je súmerná podľa osi x;
nazývame ju **KUŽEĽOSEČKA**,

F je **ohnisko kužeľosečky**,
d je **riadiaca priamka kužeľosečky**,

ak $k < 1$, kužeľosečka sa nazýva **elipsa**,
ak $k = 1$, kužeľosečka sa nazýva **parabola**,
ak $k > 1$, kužeľosečka sa nazýva **hyperbola**.

k - nazývame *číselná excentricita kužeľosečky*
e - nazývame *lineárna excentricita kužeľosečky*
p - nazývame *parameter kužeľosečky*

Teraz z rovnice (R) odvodíme takzvanú ohniskovú, vrcholovú a stredovú rovnicu kužeľosečky. Urobíme to tak, že dokončíme už začatú (♠ zo str. 61) voľbu kartézskej súradnicovej sústavy, t.j. postupne budeme voliť jej počiatok rôznym spôsobom.

$\boxed{1}$ ♣ — *zvoľme počiatok KSS v bode F,*

potom

$\underline{e = 0}$ a teda $\underline{c = -p}$

$$\overset{(R)}{\Longrightarrow} x^2(1-k^2) - 2(k^2p)x - k^2p^2 + y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = k^2(x^2 + 2px + p^2)$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 = k^2(x + p)^2} \qquad \text{(OhR)}$$

ohnisková rovnica kužeľosečky

$\boxed{2}$ ♣ — *zvoľme počiatok KSS tak, aby v rovnici* (R) *vypadol absolútny člen, t.j.* $e^2 = k^2c^2$, keďže možnosť $e = kc$ nevyhovuje pre ľubovoľné kladné k, tak budeme predpokladať, že $e = -kc$;

potom

$\underline{c = -\frac{p}{1+k}}$ a $\underline{e = \frac{pk}{1+k}}$

$$\overset{(R)}{\Longrightarrow} x^2(1-k^2) - 2\left(\frac{pk}{1+k} + k^2\frac{p}{1+k}\right)x + \frac{p^2k^2}{(1+k)^2} - k^2\frac{p^2}{(1+k)^2} + y^2 = 0$$

$$x^2(1-k^2) - 2\frac{pk(1+k)}{1+k}x + y^2 = 0$$

$$x^2 - x^2k^2 - 2pkx + y^2 = 0$$

$$\mathbf{y^2 = 2pkx + (k^2 - 1)x^2} \qquad \text{(VrR)}$$

vrcholová rovnica kužeľosečky

Poznámka.

3. Z vrcholovej rovnice kužeľosečky je zrejmé, že počiatok KSS je bodom kužeľosečky (pre parabolu je to jej vrchol, pre elipsu a hyperbolu je to jeden z jej hlavných vrcholov).

$\boxed{3}$ ♣ — *skúsme teraz dokončiť voľbu KSS tak, aby v rovnici* (R) *vypadol lineárny člen*

$$x^2(1-k^2) - 2(e-k^2c)x + e^2 - k^2c^2 + y^2 = 0 \tag{R}$$

teda nech $e = k^2c$
zároveň $e = c + p$ (z predchádzajúcej voľby LSS)

$$\Downarrow$$

$$k^2c = c + p$$

a) pre $\mathbf{k = 1}$ (t.j. pre **parabolu**) zrejme tento prípad nemôže nastať

b) ak $\mathbf{k \neq 1}$, tak $c = \frac{p}{k^2-1}$, $e = \frac{k^2p}{k^2-1}$

$$\overset{(R)}{\Longrightarrow} x^2(1-k^2) + \frac{k^4p^2}{(k^2-1)^2} - k^2\frac{p^2}{(k^2-1)^2} + y^2 = 0$$

$$x^2(1-k^2) + y^2 + \frac{k^2p^2}{k^2-1} = 0$$

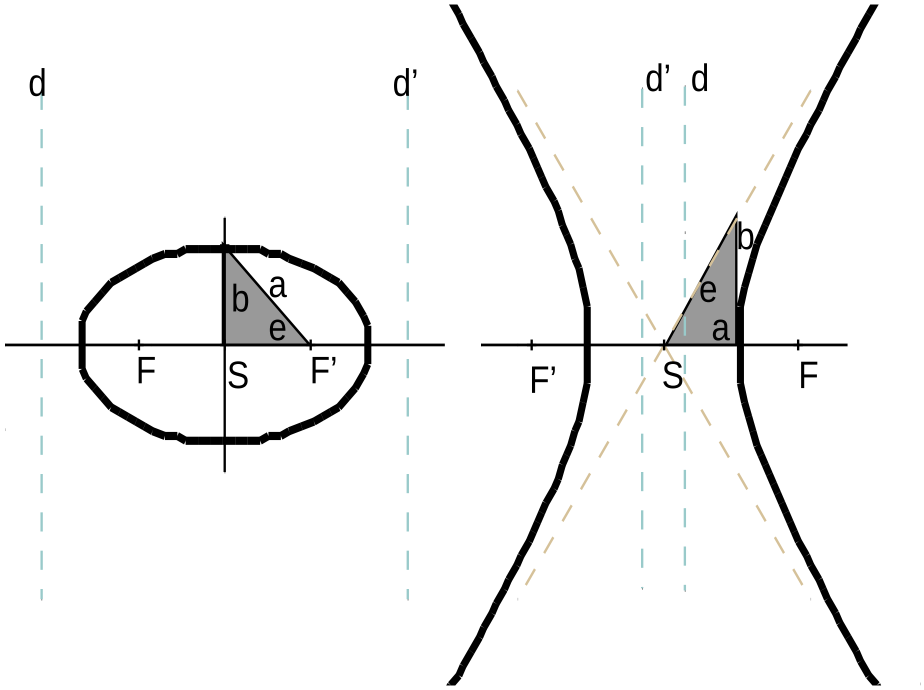
$$x^2(1-k^2) + y^2 = \frac{k^2p^2}{1-k^2} \tag{StR}$$

stredová rovnica kužeľosečky

pre $\mathbf{k < 1}$ – **elipsa**
pre $\mathbf{k > 1}$ – **hyperbola**

Poznámka.

4. Všimnime si, že elipsa aj hyperbola sú stredovo súmerné krivky, hovoríme im aj *stredové kužeľosečky*. Navyše majú dve osi súmernosti, tzv. hlavnú a vedľajšiu os elipsy, hyperboly (pri našej voľbe súradnicovej sústavy ide o x-ovú a y-ovú súradnicovú os).



$\mathfrak{E} : F[-\sqrt{a^2 - b^2}; 0]$

$F'[\sqrt{a^2 - b^2}; 0]$

$$d :\ x = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$d' :\ x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$\mathfrak{H} : F[\sqrt{a^2 + b^2}; 0]$

$F'[-\sqrt{a^2 + b^2}; 0]$

$$d :\ x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d' :\ x = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\boxed{3_1}$ - <u>najprv sa sústreďme na elipsu:</u>
vieme, že (StR) je rovnica elipsy pre $k < 1$

$$x^2(1-k^2) + y^2 = \frac{k^2p^2}{1-k^2} \qquad \text{(StR)}$$

$$\frac{x^2(1-k^2)(1-k^2)}{k^2p^2} + \frac{y^2(1-k^2)}{k^2p^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{kp}{1-k^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{kp}{\sqrt{1-k^2}}\right)^2} = 1$$

ak označíme $a = \frac{kp}{1-k^2}$
$b = \frac{kp}{\sqrt{1-k^2}}$

tak

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}}$$

a je tzv. *hlavná polos elipsy*
b je tzv. *vedľajšia polos elipsy*

Odvodíme ešte vzťahy medzi hlavnou a vedľajšou polosou elipsy na jednej strane a číselnou excentricitou k, lineárnou excentricitou $|e|$, parametrom p na strane druhej, ako aj vyjadrenie polohy riadiacej priamky vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu.

		$k^2c = c + p$ (str. 64)	$e = k^2c$ (str. 64)
$\frac{b}{a} = \sqrt{1-k^2}$	$a = \frac{kp}{1-k^2}$	$c = \frac{p}{k^2-1}$	$e = \frac{k^2p}{k^2-1}$
$\frac{b^2}{a^2} = 1-k^2$	$p = \frac{a(1-k^2)}{k}$	$c = \frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} . \left(-\frac{a^2}{b^2}\right)$	$e = \frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} . \frac{b^2-a^2}{b^2}$
$k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$	$p = a\frac{b^2}{a^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$c = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$e = -\sqrt{a^2-b^2}$
$k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$		

$$\left[\frac{k^2}{k^2-1} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) . \left(-\frac{a_2}{b^2}\right) = \frac{b^2-a^2}{b^2}\right]$$

(posledný vzťah odvodený pre číselnú excentricitu k je možné vhodne využiť pri odvodení vzťahu medzi lineárnou excentricitou $|e|$ a hlavnou a vedľajšou polosou elipsy)

Na základe poznámky 4 platí, že k danému bodu F a danej priamke d existuje podľa stredu elipsy stredovo súmerný bod F' a stredovo súmerná priamka d', pričom pre body elipsy platí (analogicky ako pre F a d), že ich podiel vzdialeností od bodu F' a od priamky d' je rovný danej konštante k ($k < 1$).

Symbolicky môžeme teda zapísať

$$\forall X \in \mathbb{E}_2 : X \in \mathfrak{E} \Longleftrightarrow \frac{|XF|}{|Xd|} = k \Longleftrightarrow \frac{|XF'|}{|Xd'|} = k,$$

kde $F' = \varrho_S(F)$, $d' = \varrho_S(d)$ a S je stred súmernosti elipsy $\mathfrak{E}$,
(obrázok elipsy $\mathfrak{E}$, str. 65).

$\boxed{3_2}$ - <u>teraz sa sústreďme na hyperbolu:</u>
vieme, že (StR) je rovnica hyperboly pre $k > 1$

$$x^2(1-k^2)+y^2=\frac{k^2p^2}{1-k^2} \qquad \text{(StR)}$$
$$-x^2(k^2-1)+y^2=-\frac{k^2p^2}{k^2-1} \qquad /:\left(-\frac{k^2p^2}{k^2-1}\right)$$
$$\frac{x^2}{\frac{k^2p^2}{(k^2-1)^2}}-\frac{y^2}{\frac{k^2p^2}{k^2-1}}=1$$

ak označíme $a=\frac{kp}{k^2-1}$
$b=\frac{kp}{\sqrt{k^2-1}}$

tak
$$\underline{\underline{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}}$$

a je tzv. *hlavná polos hyperboly*
b je tzv. *vedľajšia polos hyperboly*

Odvodíme ešte, podobne ako u elipsy, vzťahy medzi hlavnou a vedľajšou polosou hyperboly na jednej strane a číselnou excentricitou k, lineárnou excentricitou $|e|$, parametrom p na strane druhej, ako aj vyjadrenie polohy riadiacej priamky vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu.

		$k^2c=c+p$ (str. 64)	$e=k^2c$ (str. 64)
$\frac{b}{a}=\sqrt{k^2-1}$	$a=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.p.\frac{a^2}{b^2}$	$c=\frac{p}{k^2-1}$	$e=\frac{k^2p}{k^2-1}$
$\frac{b^2}{a^2}=k^2-1$	$p=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$c=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{a^2}{b^2}$	$e=\frac{a^2+b^2}{a^2}.\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{a^2}{b^2}$
$k^2=1+\frac{b^2}{a^2}$		$c=-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$e=\sqrt{a^2+b^2}$
$k=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$			

Na základe poznámky 4 platí, že k danému bodu F a danej priamke d existuje podľa stredu hyperboly stredovo súmerný bod F' a stredovo súmerná priamka d', pričom pre body hyperboly platí (analogicky ako pre F a d), že ich podiel vzdialeností od bodu F' a od priamky d' je rovný danej konštante k $(k > 1)$.

Symbolicky môžeme teda zapísať

$$\forall X\in\mathbb{E}_2:\ X\in\mathfrak{H}\iff\frac{|XF|}{|Xd|}=k\iff\frac{|XF'|}{|Xd'|}=k,$$

kde $F'=\varrho_S(F)$, $d'=\varrho_S(d)$ a S je stred súmernosti hyperboly $\mathfrak{H}$,
(obrázok hyperboly $\mathfrak{H}$, str. 65).

Poznámka.

5. Na základe vzťahov odvodených v predchádzajúcich častiach $\boxed{3_1}$ a $\boxed{3_2}$ pre stredovú kužeľosečku platí nasledovný vzťah medzi číselnou excentricitou, lineárnou excentricitou a hlavnou polosou

$$k=\frac{|e|}{a}.$$

VII. 3. Všeobecná rovnica kužeľosečky

Definícia.
Kvadratickú rovnicu s reálnymi koeficientami o dvoch premenných

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A \neq 0 \vee B \neq 0 \vee C \neq 0) \tag{VsR}$$

nazývame **všeobecnou rovnicou kužeľosečky**.

Veta 5.
Každá kužeľosečka má analytické vyjadrenie v tvare rovnice typu (VsR), a naopak každej rovnici typu (VsR) prislúcha práve jedna kužeľosečka.

Dôkaz tejto vety je časovo pomerne náročný. Preto z dôvodu efektívnejšieho využitia času na prednáške budeme využívať ako pomôcku nižšie uvedený text, v ktorom prehľadnou formou stručne naznačíme myšlienku dôkazu tejto vety.

♠ I. – Najprv ukážeme, že ku každej kuželosečke$^{(\bullet)}$ existuje kvadratický polynóm dvoch premenných tak, že daná kužeľosečka je jeho nulovou množinou;

$^{(\bullet)}$ kužeľosečka ako rovinný rez kužeľovej (valcovej) plochy, t.j.

elipsa (kružnica)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{ak } a = b)$
hyperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
parabola	$y^2 = 2px$
totožné rovnobežky	$k^2x^2 - 2kxy + y^2 = 0 \quad (\Longleftrightarrow \quad (y - kx)^2 = 0)$
rôzne rovnobežky	$y^2 - c^2 = 0 \quad (\Longleftrightarrow \quad (y - c)(y + c) = 0)$
rôznobežky	$k^2x^2 - y^2 = 0$
bod	$x^2 + y^2 = 0$
prázdna množina	$x^2 + y^2 + k^2 = 0, \quad k \neq 0$

Všetky kužeľosečky sme analyticky vyjadrili v KSS (kartézska súradnicová sústava) špeciálne zvolenej tak, že v prípade, ak je príslušná kužeľosečka stredovo súmerná, tak jej stred je zvolený za počiatok súradnicovej sústavy, v prípade paraboly je jej vrchol zvolený za počiatok KSS; súradnicová os x je zvolená za os súmernosti kužeľosečky. Je zrejmé, že každé iné umiestnenie ktorejkoľvek kuželosečky v KSS môžeme dostať zo spomínanej polohy transformáciou f, ktorá je buď posunutím v smere osi x, t.j. $f = \tau_{\overline{u}}$, kde $\overline{u}(u; 0)$,
alebo posunutím v smere osi y, t.j. $f = \tau_{\overline{v}}$, kde $\overline{v}(0; v)$,
alebo otočením so stredom v počiatku KSS o orientovaný uhol α, t.j. $f = \varrho_{P;\alpha}$,
alebo zložením ktorýchkoľvek zo spomínaných zhodností.
Pripomeňme analytické vyjadrenia týchto troch zhodností:

$$\tau_{\overline{u}} : \begin{aligned} x' &= x + u \\ y' &= y \end{aligned} \qquad \tau_{\overline{v}} : \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + v \end{aligned} \qquad \varrho_{P;\alpha} : \begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$

Potom ľahko odvodíme rovnicu kužeľosečky po príslušnej transformácii.
Ilustrujme túto úvahu na príklade elipsy. (Po použití príslušnej transformácie f dostávame súradnice bodov elipsy označené $[x'; y']$ vzhľadom na súradnicovú sústavu, ktorá vznikla transformáciou pôvodnej súradnicovej sústavy. V uvedenom príklade sme čiarky z dôvodu ľahšej čitateľnosti, pri označení súradníc vynechali.).

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$$x^2b^2+y^2a^2-a^2b^2=0 \qquad \text{(t.j. } b^2x^2+0.xy+a^2y^2+0.x+0.y-a^2b^2=0)$$

$$\Downarrow f$$

$$\begin{array}{llllllll}
 & x^2 & xy & y^2 & x & y & & \\
f=\tau_{\overline{u}} & b^2x^2 & & +a^2y^2 & -2ub^2x & & +u^2b^2-a^2b^2 & =0 \\
f=\tau_{\overline{v}} & b^2x^2 & & +a^2y^2 & & -2a^2vy & +a^2v^2-a^2b^2 & =0 \\
f=\tau_{\overline{u}}\circ\tau_{\overline{v}} & b^2x^2 & & +a^2y^2 & -2b^2ux & -2a^2vy & +b^2u^2+a^2v^2-a^2b^2 & =0 \\
f=\varrho_{P;\alpha} & (b^2\cos^2+a^2\sin^2)x^2 & +2(b^2\cos\sin-a^2\sin\cos)xy & +(b^2\sin^2+a^2\cos^2)y^2 & & & -a^2b^2 & =0 \\
\vdots & & & & & & & \\
f=\underbrace{\varrho_{P;\alpha}\circ\tau_{\overline{u}}\circ\tau_{\overline{v}}}_{\text{v ľubovoľnom poradí}} & Ax^2 & +2Bxy & +Cy^2 & +2Dx & +2Ey & +F & =0
\end{array}$$

Schéma ukazuje ako sa menia koeficienty v jednotlivých členoch horeuvedenej všeobecnej rovnice elipsy, po zobrazení tejto elipsy v spomínaných zhodných zobrazeniach a ich možných zloženiach. V prvom stĺpci schémy môžeme sledovať zmenu koeficientu (v závislosti od použitého typu zobrazenia) v kvadratickom člene s premennou x^2, v druhom stĺpci zmenu koeficientu v člene, ktorý obsahuje súčin premenných xy, v treťom stĺpci zmenu koeficientu v člene, ktorý obsahuje y^2, atď.
Označenie, ktoré sme použili pre jednotlivé koeficienty vzniknutej rovnice v poslednom riadku schémy sú štandardne zaužívané. A a C sme označili koeficienty v kvadratických členoch rovnice, B, D a E sme označili vždy polovicu koeficientu pri xy, x, y, v poradí a absolútny člen rovnice je označený F.

♠ II. – Teraz ukážeme, že každá rovnica typu

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A \neq 0 \vee B \neq 0 \vee C \neq 0) \qquad \text{(VsR)}$$

je všeobecnou rovnicou nejakej kužeľosečky.

Skúmajme množinu bodov $X \in \mathbb{E}_2$, súradnice ktorých vyhovujú rovnici (VsR). Postupne rozlíšime prípady pre všetky možnosti, ktoré môžu nastať pre koeficienty A, B, C.

1) Ak $B = 0$, $\neg(A = C = 0)$

$\overset{\text{(VsR)}}{\Longrightarrow} \quad Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

1a) nech $AC > 0$ (potom možno predpokladať, že koeficienty A aj C sú kladné)

$$A\left(x^2 + \frac{2D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{2E}{C}y\right) + F = 0$$
$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$$

$1a_1$) ak $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F > 0$

$$\frac{(x+\frac{D}{A})^2}{\left(\sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{A}}\right)^2} + \frac{(y+\frac{E}{C})^2}{\left(\sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{C}}\right)^2} = 1$$

ELIPSA

stred $\left[-\frac{D}{A}; -\frac{E}{C}\right]$

ak $A < C$, tak

hlavná polos $a = \sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{A}}$

vedľajšia polos $b = \sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{C}}$

ak $A > C$, tak

hlavná polos $a = \sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{C}}$

vedľajšia polos $b = \sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{A}}$

ak $A = C$, tak ide o **KRUŽNICU** (s polomerom $r = a = b$ ako špeciálny prípad elipsy)

$1a_2$) ak $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F < 0$

$\frac{(x+\frac{D}{A})^2}{a^2} + \frac{(y+\frac{E}{C})^2}{b^2} = -1, \qquad$ kde $a^2 = \frac{-\frac{D^2}{A}-\frac{E^2}{C}+F}{A}, \quad b^2 = \frac{-\frac{D^2}{A}-\frac{E^2}{C}+F}{C}$

PRÁZDNA MNOŽINA

$1a_3$) ak $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F = 0$

$A(x + \frac{D}{A})^2 + C(y + \frac{E}{C})^2 = 0$

JEDNOPRVKOVÁ MNOŽINA $\{\left[-\frac{D}{A}; -\frac{E}{C}\right]\}$

1b) nech $AC < 0$, potom A, C majú opačné znamienka
potom z rovnice (VsR) dostaneme

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F \qquad (\blacksquare)$$

$1b_1$) ak $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F = 0$

potom

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = -\frac{A}{C}\left(x + \frac{D}{A}\right)^2$$
$$y'^2 = k^2 x'^2$$

RÔZNOBEŽKY $y' = kx'$, $y' = -kx'$

$1b_2$) ak $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$ a A majú rovnaké znamienka, potom z rovnice ($\blacksquare$) dostaneme

$$\frac{(x+\frac{D}{A})^2}{\left(\sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{A}}\right)^2} - \frac{(y+\frac{E}{C})^2}{\left(\sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{-C}}\right)^2} = 1$$

HYPERBOLA

stred $\left[-\frac{D}{A}; -\frac{E}{C}\right]$

hlavná polos $a = \sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{A}}$

vedľajšia polos $b = \sqrt{\frac{\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F}{-C}}$

$1b_3$) ak $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$ a C majú rovnaké znamienka, tak zameníme osi x, y a dostávame prípad $1b_2$);

1c) nech $AC = 0$, potom podľa predpokladu prípadu 1) práve jeden z A, C je nulový; nech $A = 0$ a $C \neq 0$ (v opačnom prípade zameníme osi x, y), potom z rovnice (VsR) dostaneme

$$C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 + 2Dx + F - \frac{E^2}{C} = 0$$

ak $D \neq 0$

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = -\frac{2D}{C}x - \frac{F}{C} + \frac{E^2}{C^2}$$

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = 2\left(-\frac{D}{C}\right)\left(x + \frac{F}{2D} - \frac{E^2}{2DC}\right)$$

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = 2\left(-\frac{D}{C}\right)\left(x + \frac{FC - E^2}{2DC}\right)$$

PARABOLA

vrchol $V\left[\frac{E^2 - FC}{2DC}; -\frac{E}{C}\right]$

parameter $p = \left| -\frac{D}{C} \right|$

jej os je rovnobežná s os. x

ak $D = 0$

$$C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{E^2}{C} - F$$

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \underbrace{\frac{E^2 - FC}{C^2}}_{\text{ozn } g}$$

$g > 0$	$g < 0$	$g = 0$
RÔZNE ROVNOBEŽKY	**PRÁZDNA MNOŽ.**	**TOTOŽNÉ ROVNOBEŽKY**
$y = -\frac{E}{C} + \sqrt{g}$ $y = -\frac{E}{C} - \sqrt{g}$	$\emptyset$	$y = -\frac{E}{C}$

---

2) Ak $B \neq 0$, tak použijeme vhodnú transformáciu KSS (otočením tak, aby koeficient v člene pri xy bol nulový) a dostaneme jeden z predchádzajúcich prípadov z časti 1).

VII. 4. Veľký a malý diskriminant kužeľosečky
Regulárne a singulárne kužeľosečky

V tejto poslednej časti VII. kapitoly budeme pracovať v projektívnom rozšírení euklidovskej roviny $\overline{\mathbb{E}}_2$.
Všeobecnú rovnicu kužeľosečky $\mathcal{K}$ v karteziánskych súradniciach ($X[x;y]$ - karteziánske súradnice bodu X)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

môžeme prepísať v projektívnej rovine $\overline{\mathbb{E}}_2$ do homogénnych súradníc nasledovne ($X[x_1;x_2;x_3]$ - homogénne súradnice bodu X)

$$Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 + 2Dx_1x_3 + 2Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0. \tag{2}$$

Všeobecnú rovnicu (2) môžeme prepísať do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \tag{3}$$

stručný zápis maticového tvaru (3) je nasledovný

$$X^T.M_{\mathcal{K}}.X = 0.$$

Maticu

$$M_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

nazývame **maticou kužeľosečky** $\mathcal{K}$, budeme ju označovať $M_{\mathcal{K}}$, determinant matice $M_{\mathcal{K}}$ nazývame **veľký diskriminant kužeľosečky** $\mathcal{K}$, označovať ho budeme $\Delta_{\mathcal{K}}$,

$$\Delta_{\mathcal{K}} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

pod **malým diskriminantom kužeľosečky** $\mathcal{K}$ rozumieme determinant $\delta_{\mathcal{K}}$,

$$\delta_{\mathcal{K}} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Poznámka (zopakujte si z lineárnej algebry).

6. Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{T}$. Zobrazenie

$$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{T},$$

pre ktoré platí

$$\forall c, d \in \mathbb{T}, \quad \forall \overline{u}, \overline{v}, \overline{r}, \overline{s} \in \mathbb{V},$$
$$f(c(\overline{u} + \overline{v}), d(\overline{r} + \overline{s})) = cd.f(\overline{u}, \overline{r}) + cd.f(\overline{u}, \overline{s}) + cd.f(\overline{v}, \overline{r}) + cd.f(\overline{v}, \overline{s}),$$

nazývame **bilineárna forma**.

Zobrazenie

$$f' : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{T},$$

pre ktoré existuje bilineárna forma $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{T}$, taká, že $f'(\overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{x})$, nazývame **kvadratická forma**.

Všeobecnú rovnicu (2) môžeme zapísať aj nasledovne, kde f je zrejme bilineárna forma,

$$x_1(Ax_1 + Bx_2 + Dx_3) + x_2(Bx_1 + Cx_2 + Ex_3) + x_3(Dx_1 + Ex_2 + Fx_3) = 0$$
$$f(X, X) = 0.$$

Namiesto $f(X, X) = 0$ budeme často stručne písať len $f(X) = 0$, pričom f je zrejme kvadratická forma.

Poznámka.

7. Zrejme f vo vyššie spomenutom zápise je symetrická bilineárna forma, t.j. pre ľubovoľné dva body P, Q platí rovnosť $f(P, Q) = f(Q, P)$.

Označme funkcie

$$f_1(X) = Ax_1 + Bx_2 + Dx_3,$$
$$f_2(X) = Bx_1 + Cx_2 + Ex_3,$$
$$f_3(X) = Dx_1 + Ex_2 + Fx_3,$$

kde $X[x_1; x_2, x_3]$.

Veta 6.
Nech $\mathcal{K}$ je kužeľosečka v projektívnej rovine $\overline{\mathbb{E}}_2$. Potom projektívna priamka má s kužeľosečkou $\mathcal{K}$ spoločné všetky body, alebo dva body, alebo jeden bod, alebo nemajú žiadny spoločný bod.

Definícia.
Priamka ležiaca v rovine kužeľosečky sa nazýva **dotyčnicou kužeľosečky**, ak má s kužeľosečkou práve jeden spoločný bod, alebo ak je súčasťou kužeľosečky.

Definícia.
Bod P kužeľosečky $\mathcal{K}$ nazývame **singulárny bod** kužeľosečky $\mathcal{K}$, ak platí $f_1(P) = f_2(P) = f_3(P) = 0$.

Veta 7.
Bod P je singulárnym bodom kužeľosečky práve vtedy, keď každá priamka ním prechádzajúca je dotyčnicou kužeľosečky.

Definícia.
Kužeľosečku nazývame **regulárnou**, ak neobsahuje žiaden singulárny bod a nazývame ju **singulárnou**, ak obsahuje aspoň jeden singulárny bod.

Veta 8.
Kužeľosečka $\mathcal{K}$ je singulárna práve vtedy, keď jej veľký diskriminant $\Delta_{\mathcal{K}}$ sa rovná nule.

Dôsledok vety 8.
Kužeľosečka $\mathcal{K}$ je regulárna práve vtedy, keď jej veľký diskriminant $\Delta_{\mathcal{K}}$ je rôzny od nuly.

Veta 9.
Regulárne kužeľosečky sú elipsa (kružnica), parabola, hyperbola.
Singulárne kužeľosečky sú bod, totožné priamky, rôzne rovnobežky, rôznobežky.
Prázdnu množinu nazývame formálne reálnou kužeľosečkou.

Veta 10.
Regulárna kužeľosečka $\mathcal{K}$ je
a) elipsa práve vtedy, keď jej malý diskriminant $\delta_{\mathcal{K}}$ je väčší ako nula,
b) parabola práve vtedy, keď jej malý diskriminant $\delta_{\mathcal{K}}$ je rovný nule,
c) hyperbola práve vtedy, keď jej malý diskriminant $\delta_{\mathcal{K}}$ je menší ako nula.

Veta 11.
Singulárna kužeľosečka $\mathcal{K}$ je
a) jednobodová množina práve vtedy, keď jej malý diskriminant $\delta_{\mathcal{K}}$ je väčší ako nula,
b) zjednotením rovnobežiek práve vtedy, keď jej malý diskriminant $\delta_{\mathcal{K}}$ je rovný nule,
c) zjednotením rôznobežiek práve vtedy, keď jej malý diskriminant $\delta_{\mathcal{K}}$ je menší ako nula.