Planimetria

G. Monoszová

— Text obsahuje definície pojmov z planimetrie a znenia viet, ktoré budeme dokazovať na prednáškach.

— Druhá časť každej kapitoly obsahuje niekoľko úloh, aby sa študent mohol lepšie orientovať, aké typy úloh by mal dokázať riešiť. Upozorňujeme, že (vy)riešenie len týchto úloh nemôže zaručiť, že študent získa dostatok skúseností s riešením úloh podobného typu a na precvičovanie je potrebné siahnuť po ďalšej literatúre, zbierkach uvedených napríklad aj v "Semestrálnom pláne prednášok".

— A ešte jedno upozornenie. Napriek tomu, že v tomto texte sa v prvej kapitol niekoľkými vetami stručne načrtne, že čo sa rozumie pod axiomatickou výstavbou geometrie, celý semester venovaný predmetu *Planimetria* nie je postavený striktne axiomaticky. Práve naopak, zopakovanie a doplnenie stredoškolského učiva planimetrie je rozdelené do kapitol podľa jednotlivých tém. V každej kapitole bolo našou snahou zhrnúť doterajšie poznatky študenta z predchádzajúceho štúdia matematiky na ZŠ a SŠ do ucelenej časti, tieto poznatky doplniť a dosiahnuť nad danou témou potrebný nadhľad.

Kapitola 1

Princíp axiomatickej výstavby euklidovskej geometrie, primárne, sekundárne pojmy a relácie medzi nimi

Definície sekundárnych pojmov

Vedný odbor (v našom prípade geometria) môže byť budovaná axiomaticky. Základ takto budovanej teórie tvoria tzv. primárne pojmy, primárne relácie a axiómy. Primárne pojmy a primárne relácie nedefinujeme. Axiómy sú základné tvrdenia, ktoré nedokazujeme, pojednávajú o primárnych pojmoch a reláciách medzi nimi. Prvú naozaj precíznu axiomatickú výstavbu euklidovskej geometrie podal v 19. storočí nemecký matematik David Hilbert. Hilbertova sústava axióm je bezosporná, nezávislá a úplná. Na základe primárnych pojmov a primárnych relácií pomocou logických spojok a operácií definujeme tzv. sekundárne pojmy a sekundárne relácie. Z axióm pomocou logických pravidiel odvodzovania dokazujeme tvrdenia, ktoré nazývame vety. O takto budovanej geometrii hovoríme, že je budovaná axiomaticky. Viac o historickom vývoji geometrie a o axiomatickej metóde budovania vednej disciplíny, špeciálne geometrie, sa dozviete vo vyšších semestroch štúdia.

Podľa Hilbertovej axiomatiky (pre euklidovskú rovinu $\mathbb{E}_2$)

- •• primárne objekty sú:
  - **bod**
  - **priamka**
- •• primárne relácie sú:
  - **bod leží na priamke** (t.j. incidencia bodu a priamky)
  - **bod leží medzi zvyšnými dvoma bodmi**
  - **zhodnosť úsečiek**

•• axiomatickú sústavu tvorí 20 axióm **axiómy incidencie, usporiadania, zhodnosti, spojitosti a axióma rovnobežnosti**

- Definície niektorých sekundárnych pojmov

Definícia 1.1. *Nech A, B sú dva rôzne body. Pod* **polpriamkou** $\overrightarrow{AB}$ *rozumieme množinu bodov X, pre ktoré platí, že bod X leží medzi bodmi A, B, alebo bod B leží medzi bodmi A, X, zjednotenú s dvojprvkovou množinou $\{A, B\}$.*

$\overrightarrow{AB} := \{X; \mu(AXB) \bigvee \mu(ABX)\} \cup \{A, B\}$

Definícia 1.2. *Nech A, B sú dva rôzne body. Pod* **opačnou polpriamkou** *ku polpriamke $\overrightarrow{AB}$ rozumieme množinu bodov X, pre ktoré platí, že bod A leží medzi bodmi B, X, zjednotenú s jednobodovou množinou $\{A\}$.*

$\overleftarrow{AB} := \{X; \mu(BAX)\} \cup \{A\}$

Definícia 1.3. *Nech A, B sú dva rôzne body. Pod* **úsečkou** *AB rozumieme množinu všetkých bodov X ležiacich medzi bodmi A, B zjednotenú s dvojprvkovou množinou $\{A, B\}$.*

$AB := \{X; \mu(AXB)\} \cup \{A, B\}$

Poznámka 1.4. *V prípade ako je to aj teraz, ak máme už zadefinovanú polpriamku, tak definovať úsečku môžeme aj nasledovne*
$AB := \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

Poznámka 1.5. *Niekedy je užitočné mať zadefinovaný aj pojem tzv.* **nulovej úsečky**. *Ak pre dva body A, B platí, že sa rovnajú, tak hovoríme o nulovej úsečke AB.*

Definícia 1.6. *Nech A, B, C sú dané nekolineárne body (v $\mathbb{E}_2$). Pod* **polrovinou** $\overrightarrow{ABC}$ *rozumieme množinu všetkých bodov $X(\in \mathbb{E}_2)$, pre ktoré platí že prienik úsečky CX s priamkou $\overleftrightarrow{AB}$ je prázdna množina, alebo jednoprvková množina, ktorej prvkom je práve bod X.*

$\overrightarrow{ABC} := \{X \in \mathbb{E}_2; XC \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset \bigvee XC \cap \overleftrightarrow{AB} = \{X\}\}$

Poznámka 1.7. *Zrejme môžeme definovať polrovinu aj nasledovne*
$\overrightarrow{ABC} := \{X \in \mathbb{E}_2; XC \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset\} \cup \overleftrightarrow{AB}$.

Definícia 1.8. *Nech A, B, C sú dané nekolineárne body (v $\mathbb{E}_2$). Pod* **opačnou polrovinou** $\overleftarrow{ABC}$ *ku polrovine $\overrightarrow{ABC}$ rozumieme množinu všetkých bodov $X(\in \mathbb{E}_2)$, pre ktoré platí že prienik úsečky CX s priamkou $\overleftrightarrow{AB}$ je neprázdna množina.*

$\overleftarrow{ABC} := \{X \in \mathbb{E}_2; XC \cap \overleftrightarrow{AB} \neq \emptyset\}$

Definícia 1.9. *Nech A, B, C sú dané nekolineárne body. Pod* **konvexným uhlom** *ABC rozumieme prienik polrovín $\overrightarrow{ABC}$ a $\overrightarrow{BCA}$; (konvexný uhol budeme označovať $\sphericalangle ABC$)*

$\sphericalangle ABC := \overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{BCA}$

Definícia 1.10. *Nech A, B, C sú dané nekolineárne body. Pod* **nekonvexným uhlom** *ABC rozumieme zjednotenie opačných polrovín $\overleftarrow{ABC}$ a $\overleftarrow{BCA}$; (nekonvexný uhol budeme označovať $\angle ABC$)*

$$\angle ABC := \overleftarrow{ABC} \cup \overleftarrow{CBA}$$

Definícia 1.11. *Nech A, B, C sú dané nekolineárne body. Pod* **trojuholníkom** *ABC rozumieme prienik polrovín $\overrightarrow{ABC}$, $\overrightarrow{BCA}$ a $\overrightarrow{CAB}$; (označovať ho budeme $\triangle ABC$)*

$$\triangle ABC := \overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{CAB}$$

Definícia 1.12. *Nech $S \in \mathbb{E}_2$ je ľubovoľný bod a r je daná nenulová úsečka. Pod* **kružnicou** *so stredom S a polomerom r rozumieme množinu všetkých bodov $X \in \mathbb{E}_2$, pre ktoré platí, že úsečka SX je zhodná s úsečkou r; (kružnicu so stredom S a polomerom r označujeme $k(S;r)$)*

$$k(S;r) := \{X \in \mathbb{E}_2; SX \cong r\}$$

Definícia 1.13. *Nech $S \in \mathbb{E}_2$ je ľubovoľný bod a r je daná nenulová úsečka. Pod* **kruhom** *so stredom S a polomerom r rozumieme množinu všetkých bodov $X \in \mathbb{E}_2$, pre ktoré platí, že úsečka SX je menšia ako úsečka r, alebo je zhodná s úsečkou r; (kruh so stredom S a polomerom r budeme označovať $\mathbf{K}(S;r)$)*

$$\mathbf{K}(S;r) = \{X \in \mathbb{E}_2; SX < r \bigvee SX \cong r\}$$

Definícia 1.14. *Nech A_0, A_1, …, A_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sú dané body (v euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$), pričom A_{i-1}, A_i, A_{i+1} pre $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ sú nekolineárne body. Pod* **lomenou čiarou** *$A_0A_1 \ldots A_n$ rozumieme zjednotenie úsečiek A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$.*

Definícia 1.15. *Lomenú čiaru $A_0A_1 \ldots A_n$ nazývame* **jednoduchou lomenou čiarou***, ak $A_{i-1}A_i \cap A_jA_{j+1} = \emptyset$ pre $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $i < j$ (t.j. jednoduchá lomená čiara samú seba nepretína).*

Definícia 1.16. *Lomenú čiaru $A_0A_1 \ldots A_n$ nazývame* **uzavretou lomenou čiarou***, ak $A_0 = A_n$.*

Definícia 1.17. *Jenoduchá uzavretá lomená čiara $A_0A_1 \ldots A_n$ (v $\mathbb{E}_2$) rozdelí rovinu na dve oblasti. Body vnútornej oblasti a body tejto jednoduchej uzavretej lomenej čiary tvoria* **n-uholník** *$A_1A_2 \ldots A_n$.*

- <u>Definície niektorých sekundárnych relácií</u>
  <u>- vzájomná poloha dvoch priamok v euklidovskej rovine</u>

Pre vzájomnú polohu dvoch priamok v euklidovskej rovine môžu nastať dva prípady, buď sú priamky rovnobežné alebo rôznobežné.

Definícia 1.18. *Dve priamky v $\mathbb{E}_2$ sú* **rovnobežné** *(rovnobežky), ak sú totožné (t.j. rovnajúce sa priamky), alebo ak ich prienikom je prázdna množina; (rovnobežnosť priamok a, b zapisujeme $a \| b$).*

Definícia 1.19. *Dve priamky v* $\mathbb{E}_2$ *sú* **rôznobežné** *(rôznobežky), ak nie sú rovnobežné; (pre rôznobežné priamky a, b budeme používať zápis* $a \nparallel b$*, ale samozrejme v* $\mathbb{E}_2$ *môžeme použiť aj* $a \not\parallel b$*).*

Poznámka 1.20. *Keďže z axióm vyplýva, že dvoma rôznymi bodmi je určená práve jedna priamka, tak je zrejmé, že rôznobežné priamky majú spoločný práve jeden bod. Spoločný bod* P *rôznobežiek a, b nazývame* **priesečník priamok** a, b*; zapisujeme* $a \cap b = \{P\}$.

Definícia 1.21. *Nech* a, b *sú rôzne rovnobežky a nech* A, B *sú body ležiace na priamkach* a, b *(v poradí). Pod* **rovinným pásom** *určeným rovnobežkami* a, b *rozumieme prienik polrovín* $\overrightarrow{aB}$ *a* $\overrightarrow{bA}$.

- Definície význačných dvojíc uhlov a pravého uhla, stredu a osi úsečky, osi uhla.

Definícia 1.22. *Uhly* α, β *nazývame* **styčné**, *ak ležia v jednej rovine a ich prienikom je ich spoločné rameno.*

Definícia 1.23. *Styčné uhly* α, β *nazývame* **susedné**, *ak ich zjednotením je polrovina.*

Poznámka 1.24. *V niektorej literatúre sa pre susedné uhly používa aj pojem vedľajšie uhly.*

Definícia 1.25. *Uhly* α, β *nazývame* **vrcholové**, *ak každé rameno uhla* α *je opačnou polpriamkou k niektorému ramenu uhla* β *(zrejme platí aj naopak).*

Definícia 1.26. *Uhly* α, β *nazývame* **súhlasné**, *ak jedno rameno uhla* α *je vlastnou podmnožinou ramena uhla* β *(prípadne naopak) a zároveň druhé dve ramená týchto uhlov ležia v tej istej polrovine s hraničnou priamkou, ktorá je nositeľkou prv spomínaných ramien uhlov* α *a* β.

Definícia 1.27. *Uhly* α, β *nazývame* **striedavé**, *ak existuje uhol* α'*, pre ktorý platí, že* α, α' *sú vrcholové uhly a zároveň* α', β *sú súhlasné uhly.*

Poznámka 1.28.
Vrcholové uhly sú zhodné.
Ak obidve ramená súhlasných (striedavých) uhlov ležia na rovnobežných priamkach, potom sú tieto uhly zhodné.

Definícia 1.29. *Uhol, ktorý je zhodný so svojím susedným uhlom nazývame* **pravým uhlom**.

Definícia 1.30. *Bod* S *nazývame* **stredom úsečky** AB*, ak* S *patrí úsečke a platí, že úsečky* AS, BS *sú zhodné.*

Definícia 1.31. *Priamku, ktorá prechádza stredom úsečky* AB *a je na priamku* $\overleftrightarrow{AB}$ *kolmá nazývame* **os úsečky** AB*; (os úsečky* AB *budeme označovať* o_{AB}*).*

Definícia 1.32. *Priamku, ktorá prechádza vrcholom uhla a rozpoľuje ho, nazývame* **osou uhla***; (os uhla ABC budeme označovať $o_{\sphericalangle ABC}$, prípadne $o_{\angle ABC}$, podľa toho, či ide o konvexný alebo nekonvexný uhol).*

Poznámka 1.33.
V niektorej literatúre sa pod osou uhla rozumie polpriamka, ktorá je podmnožinou daného uhla, rozpoluje ho a vrchol uhla je jej počiatok. Vždy je nutné ujasniť si, ktorú z definícií budeme používať. Ak uvažujeme definíciu 1.32, tak je zrejmé, že platí rovnosť $o_{\sphericalangle ABC} = o_{\angle ABC}$.

Typové úlohy

Úloha 1.1. *Daný je rovnobežník $ABCD$, označme S priesečník jeho uhlopriečok.*

a) *Koľko rôznych polpriamok je možné určiť pomocou bodov A, B, C, D, S?*

b) *Koľko rôznych polrovín je možné určiť pomocou bodov A, B, C, D, S?*

c) *Vypíšte všetky navzájom rôzne polpriamky z časti a), ktoré sú podmnožinou polroviny $\overleftarrow{SBA}$.*

Úloha 1.2. *Dané sú dva rôzne body A, B. Určte množinu $\mathcal{M}$, ak*

a) $\mathcal{M} = \{X; \mu(AXB) \vee \mu(ABX) \vee \mu(XAB)\}$,

b) $\mathcal{M} = \{X \in \mathbb{E}_2; \neg\mu(ABX)\}$,

c) $\mathcal{M} = \{X \in \mathbb{E}_2; \neg\mu(BAX) \& \neg\mu(XAB)\}$,

d) $\mathcal{M} = \{X \in \mathbb{E}_2; \mu(BAX) \vee \mu(XBA)\}$.

Úloha 1.3. *Určte pravdivostnú hodnotu výrokov, ak A, B sú dané rôzne body.*

a)
$$AB \subset \overrightarrow{BA}$$
$$AB \subset \overleftarrow{BA}$$
$$AB \subset \overrightarrow{AB}$$

b)
$$\overrightarrow{AB} \cap \overleftarrow{BA} = \overleftarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{AB} \cap \overleftarrow{BA} = AB$$
$$\overrightarrow{AB} \cap \overleftarrow{BA} = \overleftarrow{AB}$$

Úloha 1.4. *Dané sú nekolineárne body A, B, C. Určte šrafovaním množinu $\mathcal{U}$, ak*

a) $\mathcal{U} = \{X \in \mathbb{E}_2; CX \cap \overrightarrow{AB} = \emptyset\}$,

b) $\mathcal{U} = \{X \in \mathbb{E}_2; CX \cap \overleftarrow{AB} \neq \emptyset\}$,

c) $\mathcal{U} = \{X \in \mathbb{E}_2; \overrightarrow{CX} \cap AB \neq \emptyset\}$,

d) $\mathcal{U} = \{X \in \mathbb{E}_2; \overrightarrow{CX} \cap \overleftarrow{AB} \neq \emptyset \bigvee \overrightarrow{CX} \cap \overleftarrow{BA} \neq \emptyset\}$.

Úloha 1.5. *Dané sú navzájom rôzne body A, B, C. Určte pravdivostnú hodnotu výrokov:*

a) $\{X; X \in CY \& Y \in AB\} = \triangle ABC$,

b) $\{X; X \in CY \& \mu(AYB\} = \triangle ABC$,

c) $\{X; X \in \overrightarrow{CY} \& Y \in AB\} = \triangle ABC$,

d) $\{X; X \in CY \& Y \in \overrightarrow{AB}\} = \sphericalangle CAB$.

Úloha 1.6. *Daný je pravidelný 6-uholník ABCDEF so stredom S.*

a) *Určte, ktoré z nasledovných dvojíc uhlov sú styčné a ktoré sú susedné:* $\sphericalangle ASB, \sphericalangle BEC$; $\sphericalangle ASB, \sphericalangle DSB$; $\sphericalangle AVS, \sphericalangle BSC$; $\sphericalangle ASB, \sphericalangle BSC$.

b) *Z uhlov* $\sphericalangle BAS$, $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle BSD$, $\sphericalangle DSE$, $\sphericalangle DSF$, $\sphericalangle ASF$, $\sphericalangle ADF$ *vyberte dve dvojice súhlasných a dve dovice striedavých uhlov.*

Kapitola 2

Konvexná množina

Definícia a vlastnosti

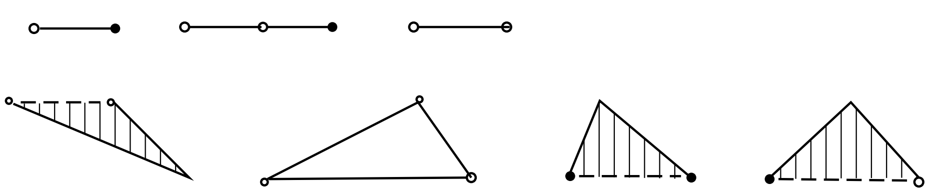
Definícia 2.1. *Množinu bodov nazývame* **konvexnou množinou***, ak ide o prázdnu množinu alebo jednobodovú množinu, alebo ak je množina aspoň dvojbodová, pričom pre jej ľubovoľné dva body platí, že úsečka s týmito krajnými bodmi je podmnožinou tejto množiny.*
Bodová množina, ktorá nie je konvexná sa nazýva **nekonvexná***.*

Veta 1. *Prienikom dvoch konvexných množín je konvexná množina.*

Typové úlohy - (Ne)konvexná množina

Úloha 2.1. *Ktoré z nasledovných množín sú kovexné: úsečka, trojuholník štvorec, kružnica, kruh, medzikružie, polrovina.*

Úloha 2.2. *Ktoré z množín na obrázku sú konvexné?*



Obr. 2.1:

—— označenie na obrázku:

• bod patrí množine
○ bod nepatrí množine
——- body "plnej" úsečky patria množine
- - - - body čiarkovanej úsečky nepatria množine
||||| body šrafovanej časti roviny patria množine

Úloha 2.3. *Určte pravdivostnú hodnotu nasledovných výrokov:*

a) *Zjednotením dvoch konvexných množín je konvexná množina.*

b) *Zjednotením dvoch nekonvexných množín je konvexná množina.*

c) *Zjednotením dvoch nekonvexných množín je nekonvexná množina.*

Kapitola 3

Základné topologické pojmy

Definície

Definícia 3.1. *Nech $\mathcal{Z}$ je základná množina, nech bod $A \in \mathcal{Z}$ a nech δ je ľubovoľne zvolená nenulová úsečka. Pod* **okolím bodu** *A (presnejšie δ-okolím bodu A) rozumieme množinu všetkých bodov $X \in \mathcal{Z}$, pre ktoré platí, že úsečka AX je menšia ako δ; (δ-okolie bodu A v základnej množine $\mathcal{Z}$ budeme označovať $O_{\mathbb{Z}}(A;\delta)$).*

$$O_{\mathcal{Z}}(A,\delta) := \{X \in \mathcal{Z};\ AX < \delta\}$$

Definícia 3.2. *Nech $\mathcal{Z}$ je základná množina a nech $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$. Množinu $\mathcal{U}$ nazývame* **ohraničenou množinou***, ak existuje taký bod v $\mathcal{Z}$ a také jeho $\delta-$okolie, pre ktoré platí, že $\mathcal{U}$ je jeho podmnožinou.*

Definícia 3.3. *Nech $\mathcal{Z}$ je základná množina a nech $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$. Bod $B \in \mathcal{Z}$ nazývame* **vnútorným bodom** *množiny $\mathcal{U}$, ak existuje také jeho δ-okolie, ktoré je podmnožinou množiny $\mathcal{U}$.*

Definícia 3.4. *Nech $\mathcal{Z}$ je základná množina a nech $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$. Bod $B \in \mathcal{Z}$ nazývame* **vonkajším bodom** *množiny $\mathcal{U}$, ak existuje také jeho δ-okolie, ktorého prienik s množinou $\mathcal{U}$ je prázdna množina.*

Definícia 3.5. *Nech $\mathcal{Z}$ je základná množina a nech $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$. Bod $B \in \mathcal{Z}$ nazývame* **hraničným bodom** *množiny $\mathcal{U}$, ak pre každé jeho δ-okolie platí, že obsahuje aspoň jeden bod množiny $\mathcal{U}$ a aspoň jeden bod, ktorý jej nepatrí.*

Definícia 3.6. *Pod* **hranicou** *množiny $\mathcal{U}$ rozumieme množinu všetkých jej hraničných bodov.*

Definícia 3.7. *Množinu nazývame* **uzavretou** *množinou, ak každý jej hraničný bod jej patrí.*

Definícia 3.8. *Množinu nazývame* **otvorenou** *množinou, ak žiaden jej hraničný bod jej nepatrí.*

Definícia 3.9. *Dve množiny budeme nazývať* **neprekrývajúce sa***, ak ich prienik neobsahuje žiaden vnútorný bod ani jednej z týchto množín.*

Typové úlohy - Topologické pojmy

Úloha 3.1. *Daná je úsečka XY so stredom S. Aké množiny môžu byť okolím bodu X, resp. bodu S, ak základná množina je*

a) *úsečka XY,*

b) *priamka XY,*

c) *rovina $\mathbb{E}_2$ (v ktorej XY leží).*

Úloha 3.2. *Daný je obdĺžnik $ABCD$ so stredom S. Načrtnite rôzne typy okolí bodu A, resp. bodu S v základnej množine $\mathcal{M}$, ak*

a) *$\mathcal{M}$ je obdĺžnik $ABCD$,*

b) *$\mathcal{M} = \overleftrightarrow{AC} \cup \overleftrightarrow{BD}$.*

Úloha 3.3. *Určte hraničné body úsečky $AB(\subset \mathbb{E}_2)$, ak základnou množinou je*

a) *$\overleftrightarrow{AB}$,*

b) *$\mathbb{E}_2$.*

Úloha 3.4. *Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Určte hranicu trojuholníka ABC, $\overrightarrow{BCA}$, kruhu $\mathbf{K}(A;AC)$, a kružnice $k(A;AC)$, ak základnou množinou je a) $\overleftrightarrow{ABC}$, b) $\overrightarrow{CBA}$ c) $\overrightarrow{CBA} \cup \overleftarrow{ABC}$.*

Úloha 3.5. *Určte hranicu štvorca $ABCD$, trojuholníka ABC, ak základnou množinou je*

a) *$\overleftrightarrow{ABC}$,*

b) *$\overrightarrow{ABC}$.*

Úloha 3.6. *Nech základná množina je euklidovská priamka $\mathbb{E}_1$. Uveďte dva príklady množín, ktoré sú zároveň*

a) *neohraničené, uzavreté a nekonvexné,*

b) *ohraničené, nie uzavreté, nie otvorené, konvexné,*

c) *neohraničené, uzavreté, otvorené.*

Úloha 3.7. *Uveďte príklad takej množiny v základnej množine $\mathbb{E}_2$, ktorá je zároveň*

a) *konvexná, uzavretá a otvorená,*

b) *konvexná, nie otvorená a uzavretá,*

c) *nekonvexná, otvorená a nie uzavretá,*

d) *nekonvexná, nie otvorená a nie uzavretá.*

Kapitola 4

Miera

Definície a znenia viet

Definícia 4.1. *Nech $\mathcal{M}$ je množina merateľných útvarov.*
Funkcia $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ s vlastnosťami

(M1) $\exists \mathcal{U}_0 \in \mathcal{M} : \quad f(\mathcal{U}_0) = 1,$

(M2) $\forall\, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{M} : \ (\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_2 \Longrightarrow f(\mathcal{U}_1) = f(\mathcal{U}_2)),$

(M3) *pre neprekrývajúce sa útvary $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 (\in \mathcal{M})$ platí*
$f(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) = f(\mathcal{U}_1) + f(\mathcal{U}_2),$

sa nazýva **funkcia miery** *(stručne* **miera***). Útvar $\mathcal{U}_0$ nazývame* **jednotkový útvar** *alebo* **jednotka miery***. Hodnotu $f(\mathcal{U})$, ktorú funkcia f priradí útvaru $\mathcal{U}$, nazývame* **veľkosť útvaru** $\mathcal{U}$.

Poznámka 4.2. *Obor hodnôt $\mathbb{R}_0^+$ funkcie miery sú nezáporné reálne čísla, ide o vlastnosť, ktorú nazývame nezápornosť miery. Vlastnosť* (M3) *nazývame aditívnosť miery.*

Poznámka 4.3. *Veľkosť úsečky často nazývame aj* **dĺžka úsečky** *(bežne pre dĺžku úsečky AB používame namiesto $f(AB)$ označenie $|AB|$) a veľkosť rovinného útvaru často nazývame aj* **obsah útvaru** *(bežne pre obsah útvaru $\mathcal{U}$ používame namiesto $f(\mathcal{U})$ označenie $S(\mathcal{U})$).*

Veta 2. *Nech f je funkcia miery a nech $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ sú merateľné útvary. Ak $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, tak $f(\mathcal{U}_1) \leq f(\mathcal{U}_2)$.*

- Princíp merania dĺžky úsečky

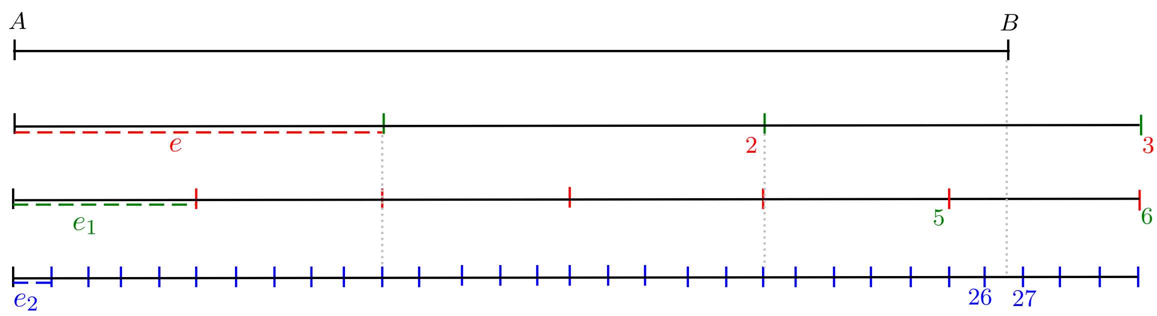
Zopakujte si zo základnej školy princíp merania úsečky. My ho aplikujeme na tomto mieste bez komentára, na konkrétnom príklade merania danej úsečky AB (Obr. 4.1).
Nech f je funkcia miery, ktorej jednotkou je úsečka e.

- označenie $|AB|_e$ znamená veľkosť úsečky AB, pričom za jednotku miery je zvolená úsečka e

- mierky sme volili nasledovne:

  – najprv sme zvolili za jednotku miery úsečku e

- potom sme mierku zjemnili zvolením úsečky e_1 za jednotku miery, pričom $e_1 = \frac{1}{2}e$
- a na záver sme ešte zjemnili mierku zvolením úsečky e_2 za jednotku miery, pričom $e_2 = \frac{1}{5}e_1 = \frac{1}{10}e$



Obr. 4.1: Meranie dĺžky úsečky

teda

$$\begin{array}{rcccl} 2 & \leq & |AB|_e & \leq & 3 \\ 5 & \leq & |AB|_{e_1} & \leq & 6 \\ 26 & \leq & |AB|_{e_2} & \leq & 27 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \text{t.j.} \\ \text{t.j.} \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} \mathbf{2} & \leq & |AB|_e & \leq & \mathbf{3} \\ \mathbf{2{,}5} & \leq & |AB|_e & \leq & \mathbf{3} \\ \mathbf{2{,}6} & \leq & |AB|_e & \leq & \mathbf{2{,}7} \end{array}$$

Získané hodnoty **2; 2,5; 2,6** sú tzv. *dolné ohraničenia* a hodnoty **3; 3; 2,7** sú tzv. *horné ohraničenia* dĺžky úsečky AB. Pri postupnom zjemňovaní mierky dolné ohraničenia vytvoria neklesajúcu zhora ohraničenú postupnosť a horné ohraničenia nerastúcu zdola ohraničenú postupnosť. Ide teda o konvergentné postupnosti, ich limity sa rovnajú. **Dĺžkou úsečky** je potom limita postupnosti jej dolných (rovnajúca sa limite postupnosti horných) ohraničení získaných postupným zjemňovaním zvolenej mierky.

Definícia 4.4. *Pod* **vzdialenosťou dvoch bodov** *rozumieme dĺžku úsečky, pre ktorú spomínané body sú jej krajnými bodmi.*

Veta 3. *Pre každé tri body A, B, C platí, že $|AC| + |BC| \geq |AB|$.*

Veta 4. *Pre každé tri kolineárne body A, B, C platí $|AC|+|BC| = |AB|$, alebo $|AC|+|AB| = |BC|$, alebo $|AB| + |BC| = |AC|$.*

Pomocou vzdialenosti dvoch bodov môžeme definovať vzdialenosť bodu od množiny a vzdialenosť dvoch množín.

Definícia 4.5. *Pod* **vzdialenosťou bodu** B **od množiny** $\mathcal{U}$ *rozumieme minimum zo všetkých možných dĺžok $|BX|$, kde $X \in \mathcal{U}$;*

$$|B,\mathcal{U}| := \min\{|BX|;\ X \in \mathcal{U}\}.$$

Pod **vzdialenosťou množín** $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ *rozumieme minimum zo všetkých možných dĺžok $|XY|$, kde $X \in \mathcal{U}_1$ a $Y \in \mathcal{U}_2$;*

$$|\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2| := \min\{|XY|;\ X \in \mathcal{U}_1 \& Y \in \mathcal{U}_2\}.$$

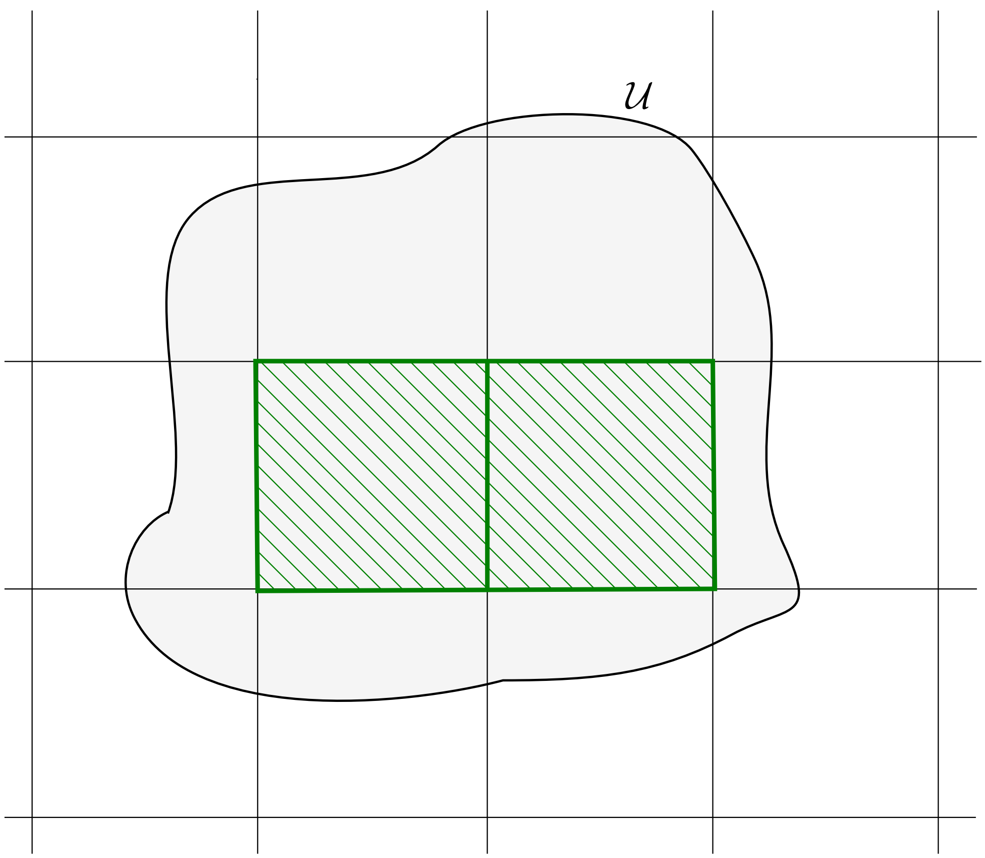
- Jordanova teória miery

Stručne ukážeme princíp merania merateľných útvarov v $\mathbb{E}_2$ pomocou tzv. Jordanovej teórie miery. Jordanova teória miery je viazaná na zvolenú štvorcovú sieť, jednotkou miery (označíme ju E) je jeden štvorec zvolenej siete. Obsah (veľkosť) meraného útvaru $\mathcal{U}$ pri zvolenej jednotke E budeme označovať $S_E(\mathcal{U})$, prípadne aj $S(\mathcal{U})$, ak nebude potrebné v označení uvádzať zvolenú jednotku miery.

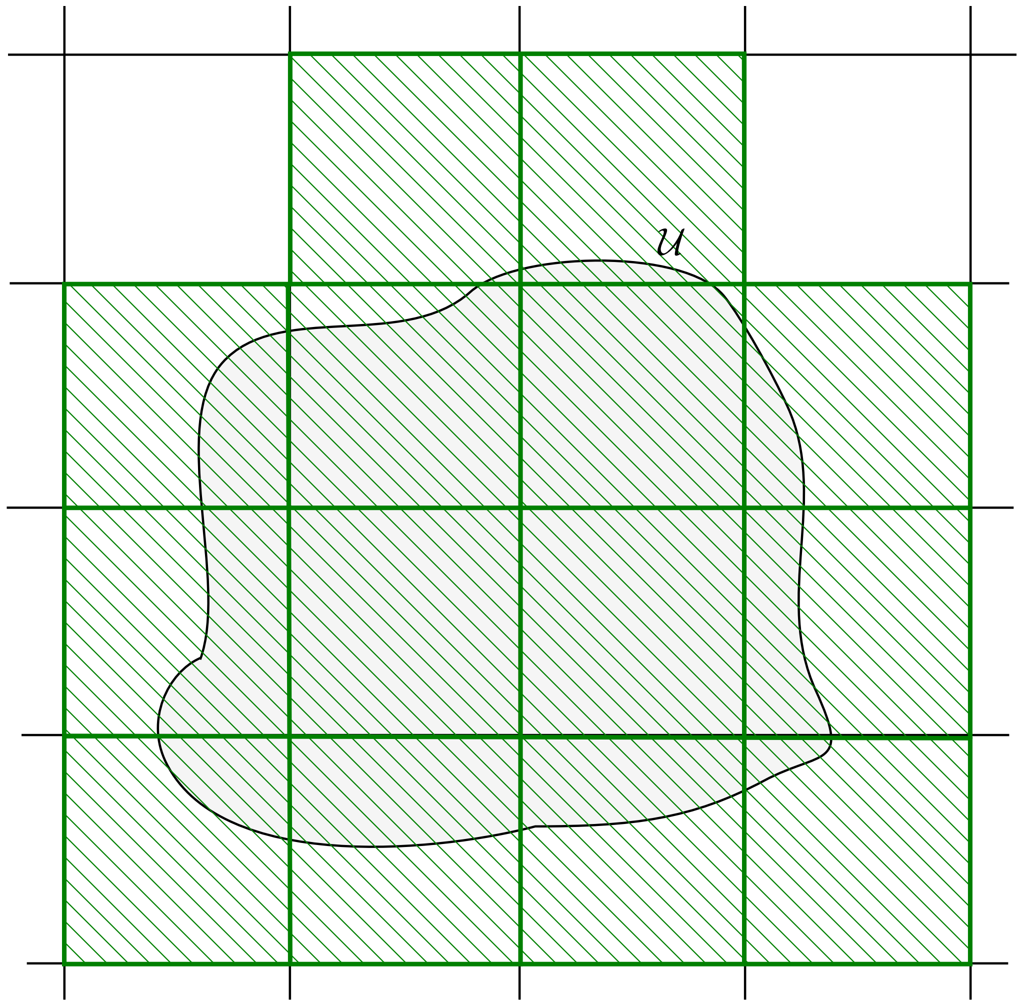
Definícia 4.6. *Nech $\mathcal{U}$ je merateľný útvar v $\mathbb{E}_2$ umiestnený do štvorcovej siete.*

Zjednotenie tých štvorcov štvorcovej siete, ktoré sú podmnožinou daného útvaru, nazývame **jadro** *útvaru, ozn. $\mathcal{J}$.*

Zjednotenie tých štvorcov štvorcovej siete, pre ktoré platí, že ich prienik s útvarom obsahuje aspoň jeden jeho vnútorný bod, nazývame **obal** *útvaru, ozn. $\mathcal{O}$.*



Obr. 4.2: Jadro útvaru $\mathcal{U}$



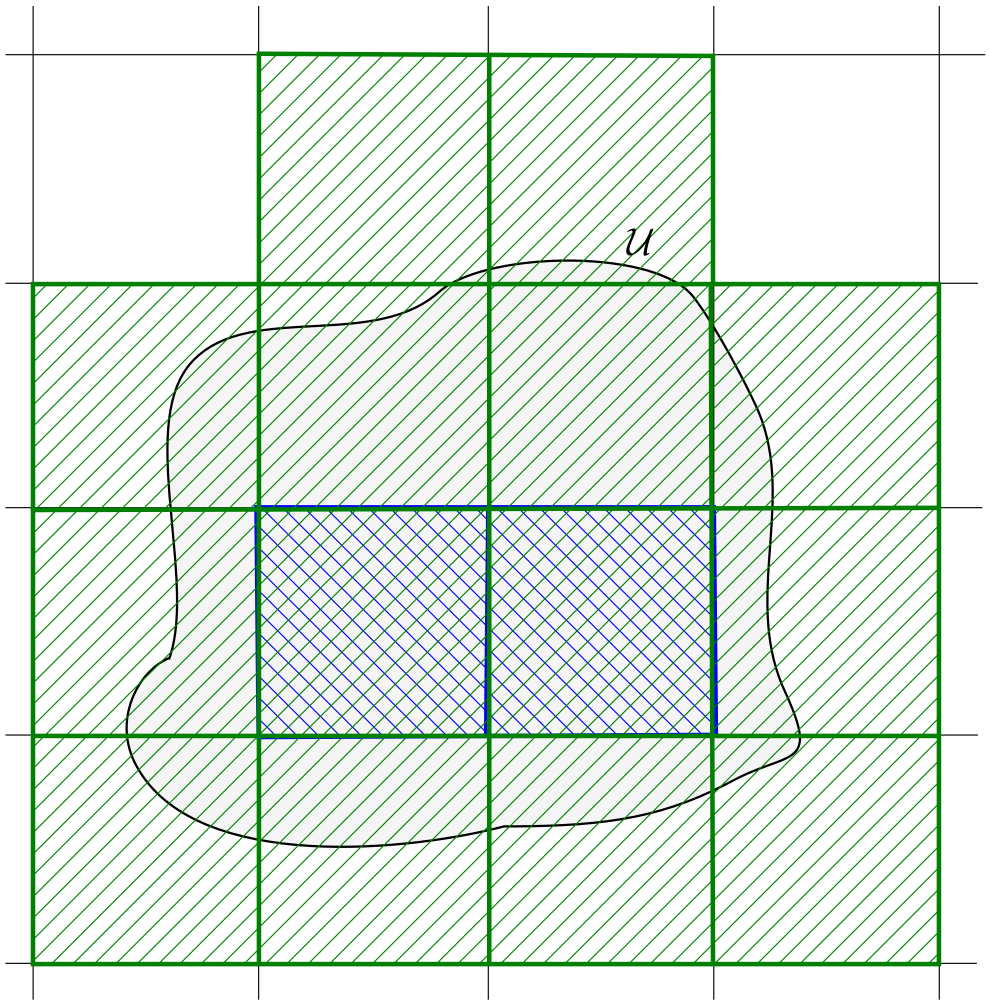
Obr. 4.3: Obal útavru $\mathcal{U}$

Poznámka 4.7. *Nech* $\mathcal{U}$ *je útvar umiestnený v štvorcovej sieti, nech* $\mathcal{J}$ *je jadro a* $\mathcal{O}$ *je obal útavru* $\mathcal{U}$. *Potom zrejme*

$$\mathcal{J} \subseteqq \mathcal{U} \subseteqq \mathcal{O}$$

a teda podľa vety 2

$$S(\mathcal{J}) \leq S(\mathcal{U}) \leq S(\mathcal{O}).$$



Obr. 4.4: $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$

Postup určenia obsahu útvaru:

– meraný útvar umiestnime do zvolenej štvorcovej siete

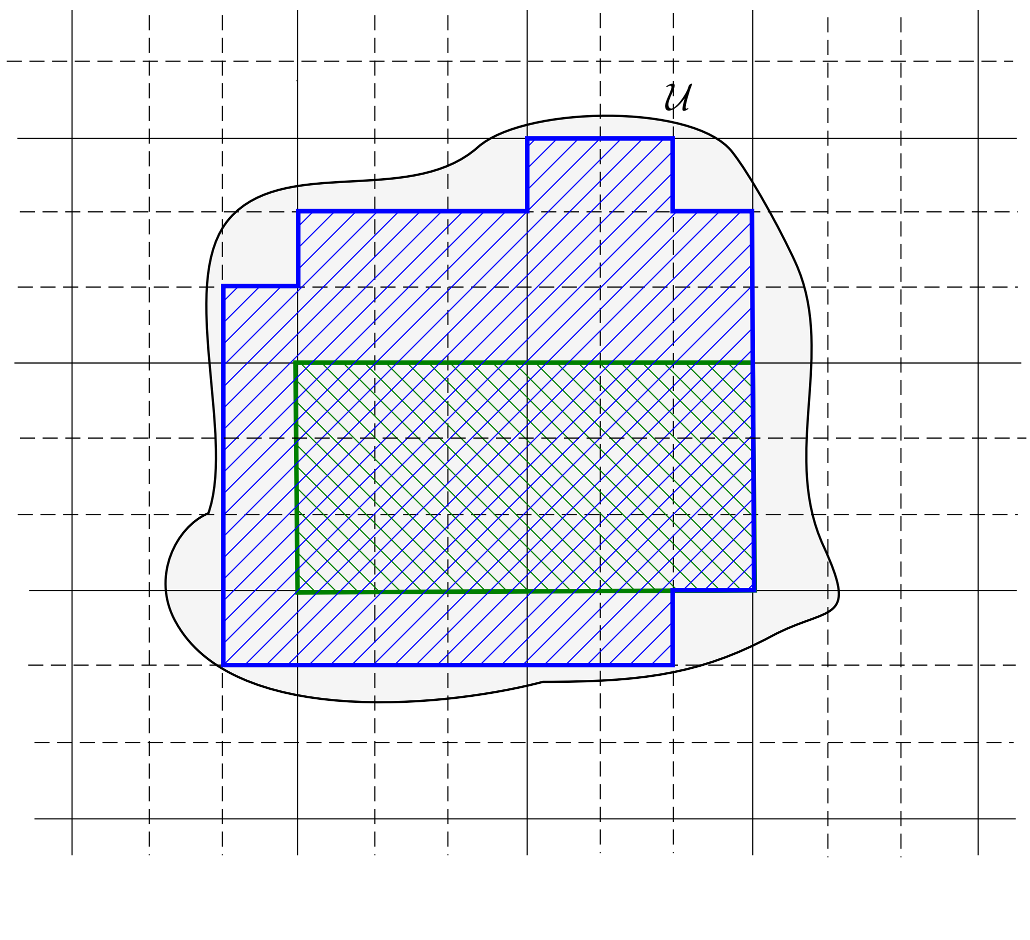
– určíme jadro aj obal útvaru a ich obsahy

– pôvodne zvolenú štvorcovú sieť zjemníme

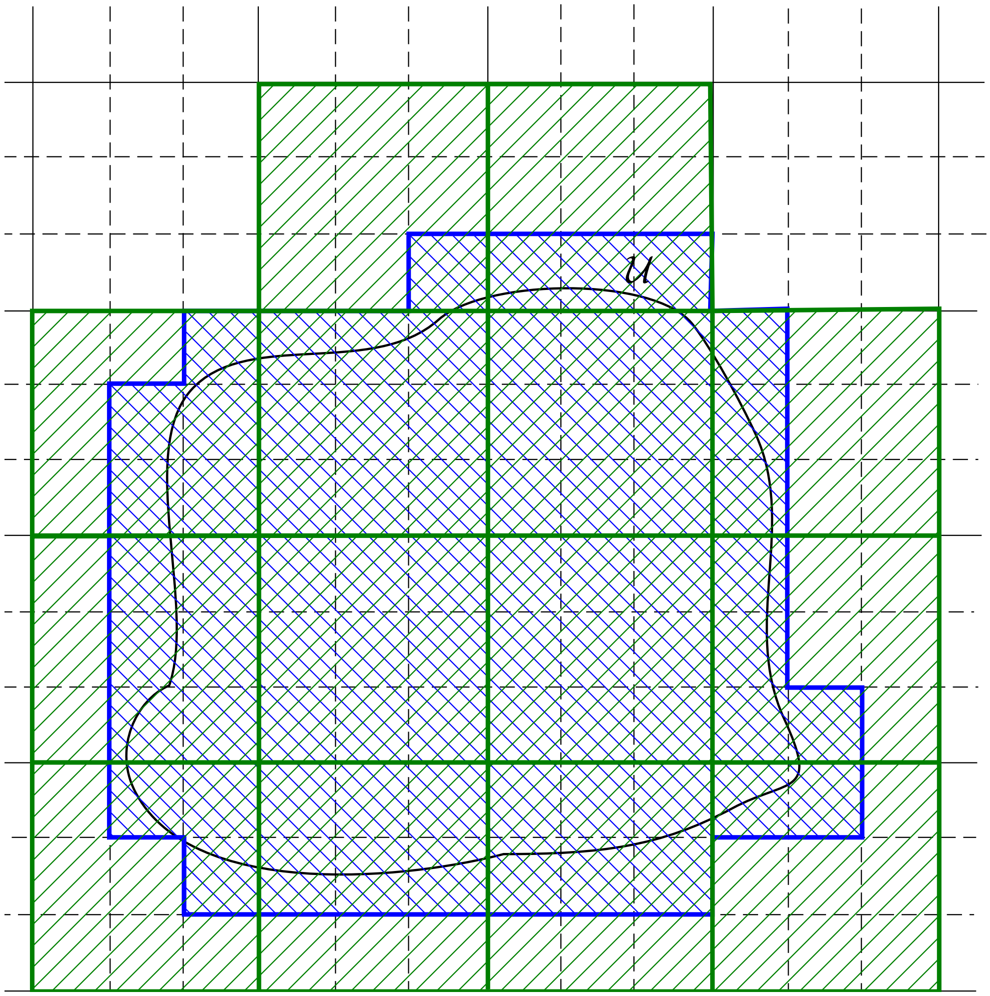
– určíme jadro aj obal útvaru (vzhľadom na novú zjemnenú sieť) a ich obsahy

– podľa potreby presnosti určenia miery útvaru postup opakujeme (ďalšími zjemneniami dostávame presnejšie odhady)

Poznámka 4.8. *Nech* $\mathcal{U}$ *je merateľný útvar umiestnený vo štvorcovej sieti. Uvažujme postupne nasledujúce zjemnenia danej siete. Označme* $\mathcal{J}_0$ *jadro útvaru* $\mathcal{U}$ *v pôvodne zvolenej sieti,* $\mathcal{J}_1$ *jadro útvaru v zjemnenej sieti (prvé zjemnenie) a* $\mathcal{J}_{i+1}$ *jadro útvaru v sieti, ktorá vznikla pri* $(i+1)$*-om zjemnení zo siete, ktorá bola* i*-tym zjemnením pôvodnej siete. Analogicky označme* $\mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_1, \ldots,$ $\mathcal{O}_{i+1}$, $\ldots$ *vzniknuté obaly útvaru* $\mathcal{U}$ *pri týchto zjemneniach. Potom zrejme postupnosť* $(S(\mathcal{J}_i))_{i=0}^{\infty}$ *je neklesajúca, zhora ohraničená a postupnosť* $(S(\mathcal{O}_i))_{i=0}^{\infty}$ *je nerastúca, zdola ohraničená.*
Členy postupnosti $(S(\mathcal{J}_i))_{i=0}^{\infty}$ *sú dolné ohraničenia a členy postupnosti* $(S(\mathcal{O}_i))_{i=0}^{\infty}$ *sú horné ohraničenia veľkosti útvaru* $\mathcal{U}$ *a limity týchto postupností sa rovnajú hodnote* $S(\mathcal{U})$.

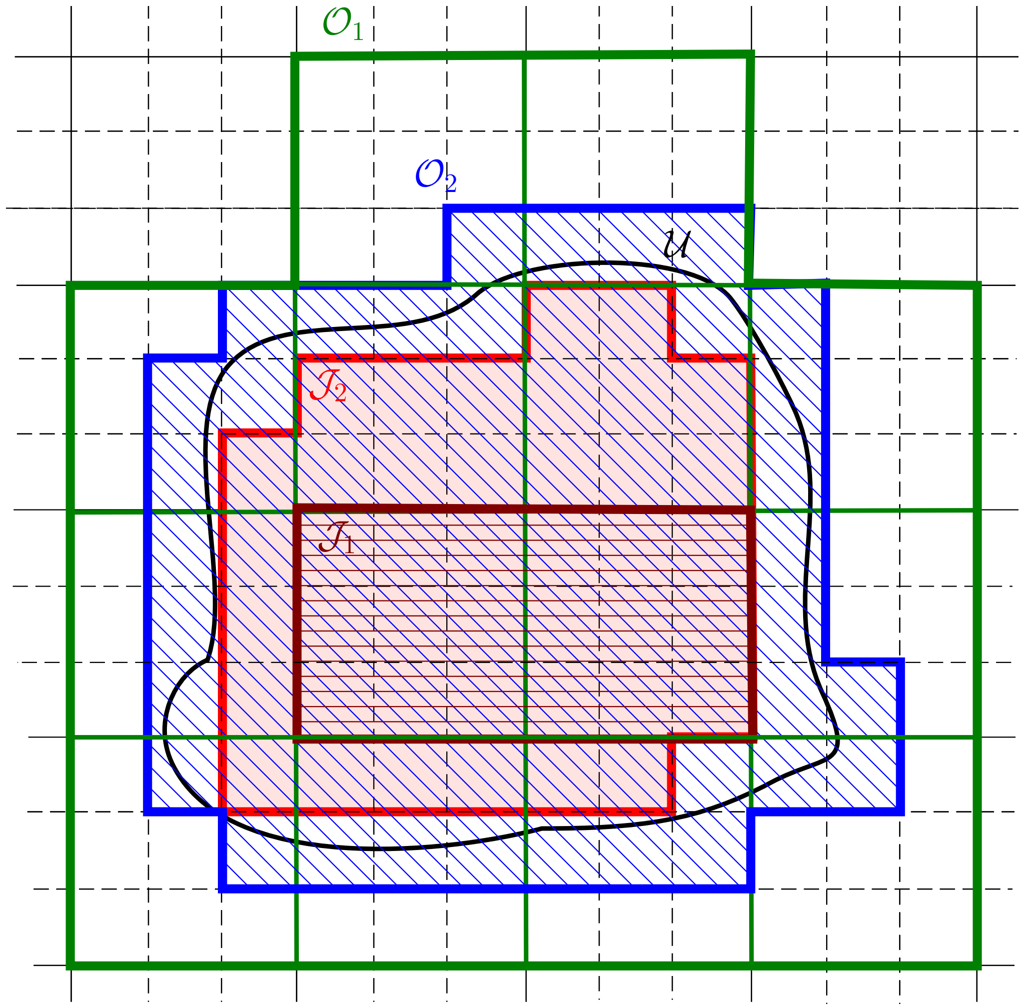


Obr. 4.5: Jadro útvaru $\mathcal{U}$ po zjemnení štvorcovej siete



Obr. 4.6: Obal útvaru $\mathcal{U}$ po zjemnení štvorcovej siete

Poznámka 4.9. *Členy postupnosti dolných (horných) ohraničení veľkosti útvaru sa zmenia v závislosti od umiestnenia útvaru do siete, čo však zrejme nemá vplyv na limitu postupnosti dolných ohraničení a ani limitu postupnosti horných ohraničení veľkosti útvaru.*



Obr. 4.7: $S(\mathcal{J}_1) \leq S(\mathcal{J}_2) \leq S(\mathcal{U}) \leq S(\mathcal{O}_2) \leq S(\mathcal{O}_1)$

Veta 5. *Pre obsahy nasledovných útvarov platí:*

útvar	**obsah útvaru**
štvorec o strane a	a^2
obdĺžnik o stranách a, b	ab
pravouhlý trojuholník s odvesnami a, b	$\frac{ab}{2}$
trojuholník (obecný) označenie prvkov - pozri kapitolu 9	$\frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$ $\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$
rovnobežník so stranou z a k nej prislúchajúcou výškou v	zv
lichobežník so základňami a, c a výškou v	$\frac{(a+c)v}{2}$
deltoid o uhlopriečkach e, f	$\frac{ef}{2}$
kruh s polomerom r	πr^2
kruhový výsek s polomerom r a stredovým uhlom α (α v oblúkovej miere)	$\frac{r^2\alpha}{2}$
kruhový odsek s polomerom r a stredovým uhlom α (α v oblúkovej miere)	$\frac{r^2(\sin\alpha-\alpha)}{2}$

- Meranie uhla

Spomenieme ešte tri rôzne možnosti merania uhla, a to meranie uhla v stupňovej miere, v grádovej miere a v oblúkovej miere.

Stupňová miera – jej jednotkou je *jeden stupeň*, ozn. 1°,
používame aj zjemnenia tejto mierky:
jedna minúta, ozn. $1'$,
jedna sekunda, ozn. $1''$;
jeden stupeň definujeme ako veľkosť $\frac{1}{90}$-iny pravého uhla
$1' = \frac{1}{60}1^\circ$, $\quad 1'' = \frac{1}{60}1'$.

Grádová miera – jej jednotkou je *jeden grád* ozn. 1^g,
používame aj zjemnenia tejto mierky:
jedna grádová minúta, ozn. 1^c,
jedna grádová sekunda, ozn. 1^{cc};
jeden grád definujeme ako veľkosť $\frac{1}{100}$-iny pravého uhla
$1^c = \frac{1}{100}1^g$, $\quad 1^{cc} = \frac{1}{100}1^c$.

Oblúková miera – jej jednotkou je jeden radián
pri zavedení využívame dĺžku meranému uhlu prislúchajúceho kružnicového oblúka jednotkovej kružnice.

Typové úlohy - Miera

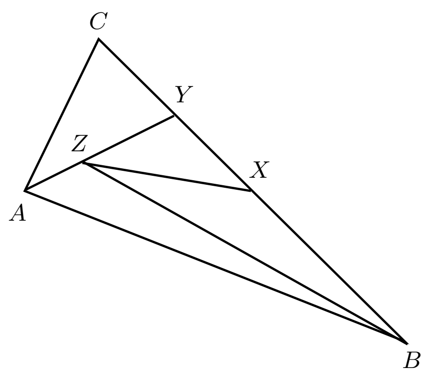
Úloha 4.1. *Daný je pravidelný 6-uholník $ABCDEF$ so stredom S ($|AB| = a$) a body X, Y tak, že B je stred úsečky AX a X jke stred úsečky BY. Určte vzdialenosti*

a) $|XS|$, $|YD|$,

b) $|E, \overleftrightarrow{SC}|$, $|E, \overrightarrow{SC}|$, $|E, \overleftarrow{SC}|$, $|E, \overrightarrow{FE}|$, $|E, \overleftarrow{FE}|$,

c) $|\overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{SD}|$, $|\overleftrightarrow{AE}, \overrightarrow{SD}|$, $|\overleftarrow{EA}, \overrightarrow{SY}|$, $|FE, SD|$, $|\triangle\, ASF, \overrightarrow{XY}|$.

Úloha 4.2. *Daný je trojuholník ABC a body X, Y, Z tak, že bod X je stred strany BC, Y je stred úsečky XC a $Z \in AY$, pričom $AZ : ZY = 1 : 2$. Určte obsahy všetkých štyroch neprekrývajúcich sa častí, na ktoré je trojuholník ABC rozdelený (pozri obrázok), ak obsah trojuholníka $S_{\triangle\, ABC} = 12$.*



Obr. 4.8:

Úloha 4.3. *Rozdelte obdĺžnik na sedem neprekrývajúci ch sa trojuholníkov, ktorých obsahy tvoria $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$ z obsahu obdĺžnika.*

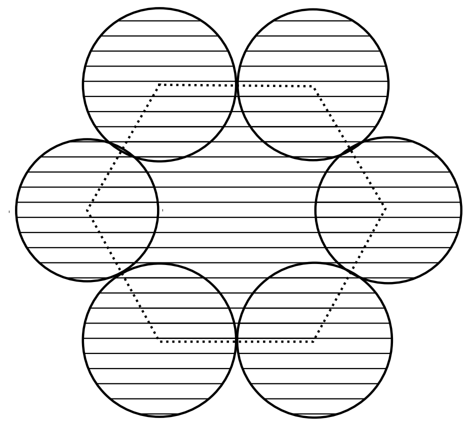
Úloha 4.4. *Odvoďte vzťah pre výpočet obsahu rovnostranného trojuholníka, ak je daný a) polomer r jemu opísanej kružnice, b) polomer ϱ jemu vpísanej kružnice.*

Úloha 4.5. *Odvoďte vzťah pre výpočet obsahu pravidelného 6-uholníka, ak je daný a) polomer r jemu opísanej kružnice, b) polomer ϱ jemu vpísanej kružnice.*

Úloha 4.6. *Odvoďte vzťah pre výpočet obsahu pravidelného 8-uholníka, ak je daný a) polomer r jemu opísanej kružnice, b) polomer ϱ jemu vpísanej kružnice.*

Úloha 4.7. *Dané sú sústredné kružnice $k_1(S; r_1)$, $k_2(S; r_2)$, $r_1 > r_2$. Určte vzťah medzi obsahom medzikružia ohraničeného kružnicami k_1, k_2 a obsahom kruhu nad tetivou XY kružnice k_1, ktorá sa dotýka kružnice k_2.*

Úloha 4.8. *Vyjadrite obsah vyšrafovaného útvaru na obrázku, ak stredy kružníc sú vrcholu pravidelného 6-uholníka o strane a.*



Obr. 4.9:

Kapitola 5

Deliaci pomer a dvojpomer

Definície a znenia viet

Definícia 5.1. *Nech A, B, C sú tri navzájom rôzne kolineárne body.* **Deliaci pomer** *usporiadanej trojice bodov A, B, C (ozn. (ABC)) definujeme nasledovne*

$$(ABC) := \begin{cases} \frac{|AC|}{|BC|}, & ak\ \neg\mu(ACB) \\ -\frac{|AC|}{|BC|}, & ak\ \mu(ACB) \end{cases}$$

Veta 6. *Nech A, B sú rôzne body. Potom pre každé reálne číslo λ rôzne od nuly a jednotky existuje práve jeden bod X priamky AB rôzny od bodov A, B, pre ktorý platí, že deliaci pomer (ABX) sa rovná číslu λ.*

Veta 7. *Nech A, B, C sú tri rôzne kolinárne body. Potom*

a) $(BAC) = \frac{1}{(ABC)}$,

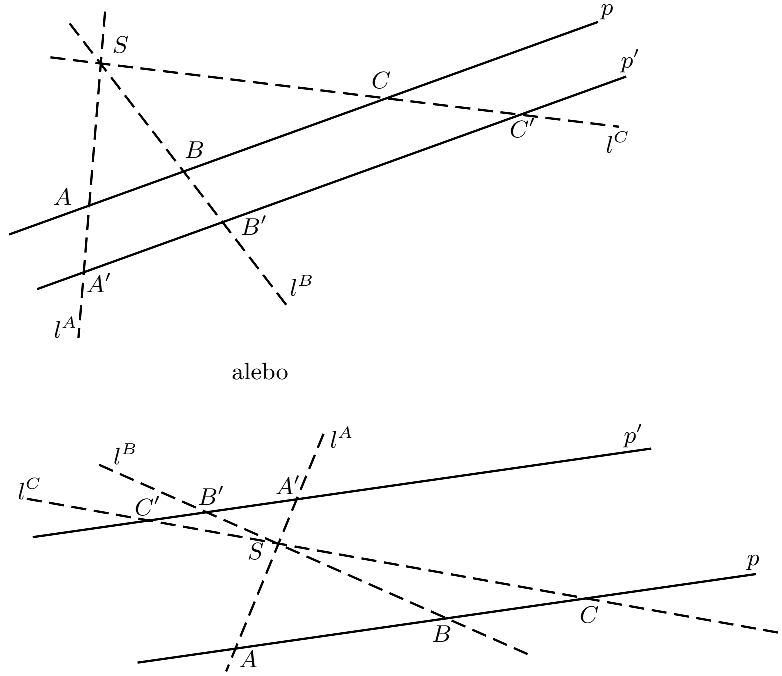
b) $(ACB) = 1 - (ABC)$.

c) $(BCA) = 1 - \frac{1}{(ABC)}$,

d) $(CAB) = \frac{1}{1-(ABC)}$,

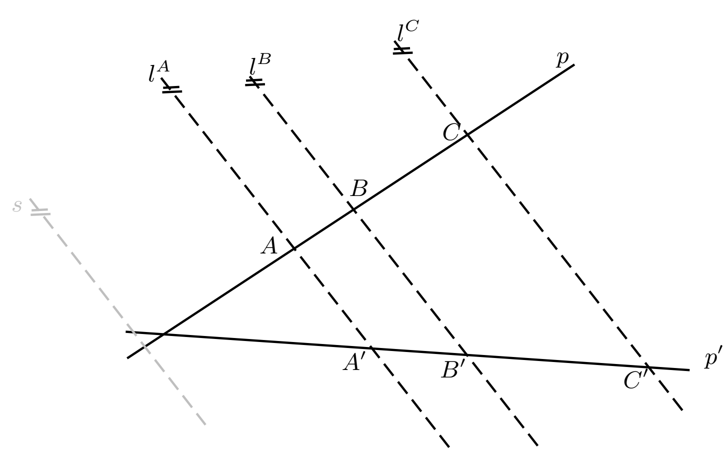
e) $(CBA) = \frac{(ABC)}{(ABC)-1}$.

Veta 8. *Nech A, B, C sú rôzne body ležiace na priamke p. Nech p' je rovnobežná priamka s priamkou p a nech bod S neleží na žiadnej z priamok p, p'. Označme $l^A = \overleftrightarrow{SA}$, $l^B = \overleftrightarrow{SB}$, $l^C = \overleftrightarrow{SC}$ a priesečníky priamok l^A, l^B, l^C s priamkou p' (v poradí) označme A', B', C'. Potom $(ABC) = (A'B'C')$.*



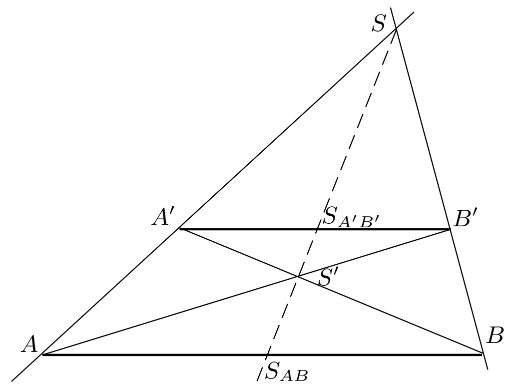
Obr. 5.1: Deliaci pomer - stredový priemet na rovnobežkách

Veta 9. *Nech A, B, C sú rôzne body ležiace na priamke p. Nech p' je ľubovoľná priamka rôzna od p, nech priamka s nie je rovnobežná s p ani p'. Označme l^A, l^B, l^C priamky rovnobežné s priamkou s a prechádzajúce (v poradí) bodmi A, B, C. Priesečníky priamok l^A, l^B, l^C s priamkou p' (v poradí) označme A', B', C'.Potom $(A'B'C') = (ABC)$.*



Obr. 5.2: Deliaci pomer - rovnobežný priemet

Veta 10. *Nech úsečky AB, $A'B'$ sú rovnobežné. Nech $\overleftrightarrow{AA'} \nmid \overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} \overset{ozn}{=} \{S\}$, nech $\overleftrightarrow{AB'} \nmid \overleftrightarrow{A'B}$, $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B} \overset{ozn}{=} \{S'\}$. Potom*
a) $(AA'S) = (BB'S) = -(AB'S') = -(BA'S')$,
b) priamka $\overleftrightarrow{SS'}$ rozpoľuje úsečky AB, $A'B'$.



Obr. 5.3: Deliaci pomer - rovnobežné úsečky

Definícia 5.2. *Nech A, B, C, D sú navzájom rôzne kolineárne body.* **Dvojpomer** *usporiadanej štvorice bodov A, B, C, D je podiel deliacich pomerov (ABC) a (ABD); (dvojpomer usporiadanej štvorice bodov A, B, C, D označujeme $(ABCD)$).*

$$(ABCD) := \frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

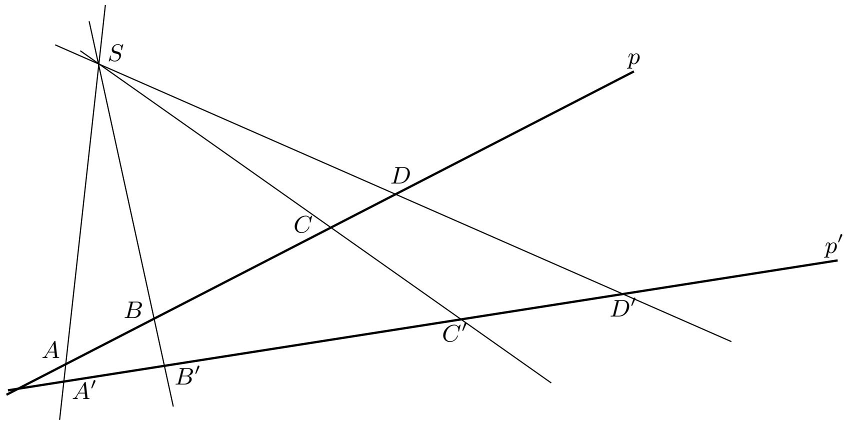
Veta 11. *Nech A, B, C, D sú navzájom rôzne kolineárne body. Potom*

a) $(CDAB) = (ABCD) = (BADC) = (DCBA)$,

b) $(BACD) = \frac{1}{(ABCD)} = (ABDC)$,

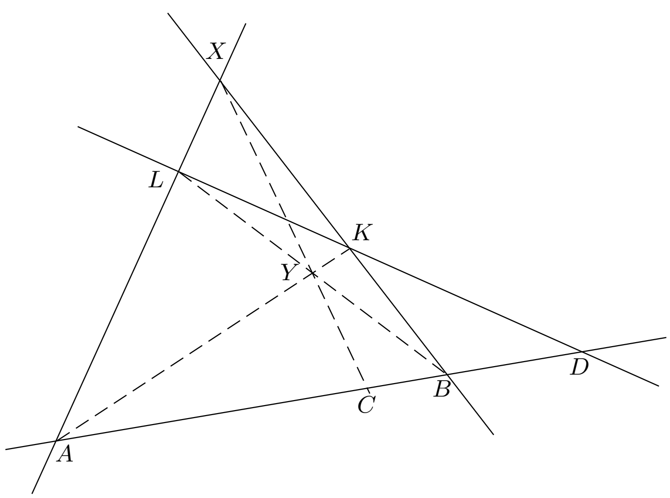
c) $(DBCA) = 1 - (ABCD) = (ACBD)$.

Veta 12. *Dané sú priamky p, p' a bod S, ktorý neleží na žiadnej z nich. Nech A, B, C, D sú štyri navzájom rôzne body ležiace na priamke p a nech A', B', C', D' sú priesečníky priamok SA, SB, SC, SD (v poradí) s priamkou p'. Potom $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*



Obr. 5.4: Dvojpomer - stredový priemet

Veta 13. *Nech body A, B, K, L tvoria štvorroh (t.j. žiadne tri z týchto bodov nie sú kolineárne) a nech* $\overleftrightarrow{AL} \nparallel \overleftrightarrow{BK}$, $\overleftrightarrow{AK} \nparallel \overleftrightarrow{BL}$, $\overleftrightarrow{AB} \nparallel \overleftrightarrow{LK}$, $\{X\} \overset{ozn}{=} \overleftrightarrow{AL} \cap \overleftrightarrow{BK}$, $\{Y\} \overset{ozn}{=} \overleftrightarrow{AK} \cap \overleftrightarrow{BL}$, $\{D\} \overset{ozn}{=} \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{LK}$, $\{C\} \overset{ozn}{=} \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{XY}$. *Potom dvojpomer* $(ABCD) = -1$.



Obr. 5.5: Dvojpomer - štvorroh

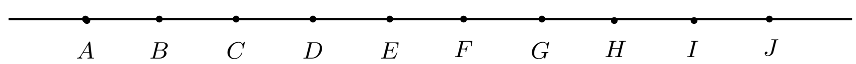
Poznámka 5.3. *Usporiadanú štvoricu bodov A, B, C, D, pre dvojpomer ktorých platí* $(ABCD) = -1$, *nazývame* **harmonická štvorica bodov**.

Typové úlohy - Deliaci pomer

Úloha 5.1. *Úsečka AJ na obrázku je rozdelená bodmi B, C, ..., I na navzájom zhodné úsečky.*

a) *Určte deliace pomery (ABC, BCA, (CJG), (IFG), (JDA).*

b) *Určte body X, Y, Z tak, aby $(ABX) = \frac{3}{2}$, $(EJY) = -\frac{1}{4}$, $(ZFH) = 3$.*



Obr. 5.6:

Úloha 5.2. *Daná je priamka $\overleftrightarrow{AB}$.*

a) *Určte (na priamke $\overleftrightarrow{AB}$) body X, Y, Z, T, R tak, aby platilo $(ABX) = \frac{3}{4}$, $(AYB) = -2$, $(ZBA) = -\frac{4}{3}$, $(BTA) = 3$, $(BAR) = -1$.*

b) *Na priamka $\overleftrightarrow{AB}$ zvoľte body X_1, X_2, $X_3 = A$, X_4, X_5, $X_6 = B$, ..., X_{12} tak, aby platilo $\mu(X_iX_{i+1}X_{i+2})$ a zároveň aby $X_iX_{i+1} \cong X_jX_{j+1}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, 11\}$. Určte nasledujúce deliace pomery: $(ABX_4$, (ABX_1), $(ABX_{()})$, (X_7AB), (ABX_5), (ABX_{12}), $(AX_{12}B)$.*

Úloha 5.3. *Nech A, B sú rôzne body. Doplňte tak, aby vznikli pravdivé výroky:*
Pre každý bod C platí

a) *ak $C \in AB \setminus \{A, B\}$ tak deliaci pomer (ABC) je z intervalu ...,*

b) *ak $C \in \overleftarrow{AB} \setminus \{A\}$ tak deliaci pomer (ABC) je z intervalu ...,*

c) *ak $C \in \overleftarrow{BA} \setminus \{B\}$ tak deliaci pomer (ABC) je z intervalu ....*

Kapitola 6

Zhodné zobrazenia, grupa zhodných zobrazení

Definície a znenia viet

Definícia 6.1. *Zobrazenie* $f : \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ *nazývame* **zhodné zobrazenie** *(v* $\mathbb{E}_2$*) alebo stručne* **zhodnosť**, *ak pre každé dva rôzne body* $X, Y \in \mathbb{E}_2$ *platí* $X'Y' \cong XY$, *kde* $X' = f(X)$, $Y' = f(Y)$.

V euklidovskej rovine poznáme 6 typov zhodných zobrazení a to identitu, osovú súmernosť, stredovú súmernosť, otočenie (rotáciu), posunutie (transláciu) a posunutú súmernosť.

Definícia 6.2. .

— *Zobrazenie, pre ktoré platí, že každý bod sa zobrazuje sám do seba sa nazýva* **identita**. *Identitu budeme označovať* ι.

— *Nech* o *je daná priamka. Zobrazenie, pre ktoré platí:*
(1) obrazom bodu X *ležiaceho na priamke* o *je bod* X', *ktorý je totožný s bodom* X,
(2) obrazom bodu X *neležiaceho na priamke* o *je bod* X', *pre ktorý platí, že priamka* $\overleftrightarrow{XX'}$ *je kolmá na priamku* o *a stred úsečky* XX' *leží na priamke* o, *nazývame* **osová súmernosť**.
Priamku o *nazývame os osovej súmernosti.*
Osovú súmernosť s osou o *budeme označovať* σ_o.

— *Nech* S *je daný bod. Zobrazenie, pre ktoré platí:*
(1) obrazom bodu S *je bod* S,
(2) obrazom bodu X *rôzneho od bodu* S, *je bod* X', *pre ktorý platí, že bod* S *je stredom úsečky* XX', *nazývame* **stredová súmernosť**.
Bod S *nazývame stredom stredovej súmernosti.*
Stredovú súmernosť so stredom S *budeme označovať* ϱ_S.

— *Nech je daný bod S, uhol α (veľkosť uhla α je nanajvýš $360°$) a orientácia kladná (t.j. proti smeru hodinových ručičiek), resp. záporná (t.j. v smere hodinových ručičiek). Zobrazenie, pre ktoré platí:*
(1) obrazom bodu S je bod S,
(2) obrazom bodu X rôzneho od bodu S, je bod X', ktorý leží na kružnici $k(S;SX)$, a uhol XSX' je zhodný s uhlom α, pričom jeho orientácia je kladná, resp. záporná, sa nazýva **otočenie** *alebo* **rotácia**.
Bod S nazývame **stredom otočenia** *a uhol α nazývame* **uhlom otočenia**.
Otočenie so stredom S, uhlom α a kladnou, resp. zápornou orientáciou budeme označovať $\varrho_{S;+\alpha}$, resp. $\varrho_{S;-\alpha}$.

— *Daný je vektor $\overline{u}$. Zobrazenie, pre ktoré platí, že obrazom bodu X je bod X', pričom platí rovnosť vektorov $\overline{u} = \overline{XX'}$, sa nazýva* **posunutie** *alebo* **translácia**.
Vektor $\overline{u}$ sa nazýva **vektor posunutia**.
Posunutie o vektor $\overline{u}$ budeme označovať $\tau_{\overline{u}}$.

Definícia 6.3. *Zhodné zobrazenie, ktoré nemení orientáciu trojice nekolineárnych bodov, nazývame* **priama zhodnosť**. *Zhodnosť, ktorá nie je priama, je* **nepriama zhodnosť**.

Definícia 6.4. *Bod X nazývame* **samodružným bodom** *zobrazenia f, ak sa v zobrazení f zobrazí sám do seba, t.j. $f(X) = X$.*
Priamku p nazývame **samodružnou priamkou** *zobrazenia f, ak sa v zobrazení f zobrazí sama do seba, t.j. $f(p) = p$.*
Samodružný bod nazývame **silnosamodružným bodom**, *ak každá priamka ním prechádzajúca je samodružná.*
Samodružnú priamku nazývame **silnosamodružnou priamkou**, *ak každý bod, ktorý na nej leží je samodružný.*
Samodružný bod, ktorý nie je silnosamodružný, sa nazýva **slabosamodružný bod**. *Analogicky je definovaná* **slabosamodružná priamka**.

Veta 14. *Zložením dvoch zhodných zobrazení je zhodné zobrazenie.*

Veta 15. *Zloženie dvoch osových súmerností $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2}$ je*
a) identita, ak $o_1 = o_2$
b) translácia $\tau_{\overline{u}}$, ak $o_1 \| o_2 (o_1 \neq o_2)$, pričom $\overline{u} \perp o_1$ a veľkosť vektora $\overline{u}$ je rovná dvojnásobku vzdialenosti osí o_1, o_2, orientácia vektora $\overline{u}$ je súhlasná s orientáciou od osi o_1 ku osi o_2,
c) stredová súmernosť ϱ_S, ak $o_1 \perp o_2$, pričom stred stredovej súmernosti $\{S\} = o_1 \cap o_2$,
d) rotácia $\varrho_{S,*\alpha}$, ak $o_1 \nparallel o_2$, pričom $\{S\} = o_1 \cap o_2$, $\frac{\alpha}{2}$ je veľkosť uhla, ktorý zvierajú osi o_1, o_2, pričom $*$ označuje orientáciu, ktorá je súhlasná s orientáciou uhla $\frac{\alpha}{2}$ od osi o_1 ku o_2.

Veta 16. *(Rozklad zhodností na osové súmernosti)*
a) Identitu možno rozložiť na dve osové súmernosti, ktorých osi sú totožné.
b) Každé posunutie možno rozložiť na dve osové súmernosti, ktorých osi sú rovnobežné (rôzne), zároveň sú kolmé na vektor posunutia, ich vzdialenosť je rovná jednej polovici veľkosti vektora posunutia, pričom orientácia vektora posunutia je súhlasná s orientáciou od osi prvej osovej súmernosti ku osi druhej osovej súmernosti podľa poradia v zložení.
c) Každú stredovú súmernosť možno rozložiť na dve osové súmernosti, ktorých osi sú na seba kolmé a prechádzajú stredom stredovej súmernosti.
d) Každú rotáciu možno rozložiť na dve osové súmernosti, ktorých osi prechádzajú stredom

rotácie, zvierajú uhol, ktorého veľkosť sa rovná jednej polovici veľkosti uhla rotácie, pričom orientácia uhla rotácie je súhlasná s orientáciou uhla od osi prvej osovej súmernosti ku osi druhej osovej súmernosti podľa poradia v zložení.

Definícia 6.5. *Zobrazenie, ktoré je zložením osovej súmernosti a posunutia (v ľubovoľnom poradí), pričom os osovej súmernosti a vektor posunutia sú rovnobežné, nazývame* **posunutá súmernosť**; *(posunutú súmernosť danú osou o a vektorom u budeme označovať $\psi_{o;\overline{u}}$).*

Poznámka 6.6. *V niektorej literatúre sa pre posunutú súmernosť používa názov* **posunuté zrkadlenie**.

Veta 17. *Zložením troch osových súmerností $\sigma_{o_1} \circ \sigma_{o_2} \circ \sigma_{o_3}$ s navzájom rôznymi osami je buď osová súmernosť alebo posunutá súmernosť.*

Veta 18. *Zloženie ľubovoľného konečného počtu osových súmerností možno vždy redukovať na zloženie maximálne troch osových súmerností.*

Veta 19. *Zložením ľubovoľného konečného počtu zhodných zobrazení je identita, alebo osová súmernosť, alebo stredová súmernosť, alebo rotácia, alebo translácia, alebo posunutá súmernosť.*

Veta 20. *Všetky zhodnosti v rovine tvoria vzhľadom na skladanie zobrazení grupu (tzv.* grupu *zhodností).*
Generátorom grupy zhodností je osová súmernosť.

Typové úlohy - Zhodné zobrazenia

Úloha 6.1. *Dokážte, že a) osová súmernosť, b) stredová súmernosť, c) otočenie, d) posunutie je zhodné zobrazenie. (Zopakujte si najprv vety o zhodnosti trojuholníkov; Kapitola 9.)*

Úloha 6.2. *Dokážte, že v osovej súmernosti je uhol, ktorý zviera priamka p s osovou o osovej súmernosti, zhodný s uhlom, ktorý zviera obraz p' priamky p s oso o.*

Úloha 6.3. *Dokážte, že v stredovej súmernosti je obrazom priamky priamka s ňou rovnobežná.*

Úloha 6.4. *Určte všetky zhodné zobrazenia, ktoré reprodukujú a) obdĺžnik, b) štvorec. Vyplňte tabuľku pre skladanie zobrazení určených v a) a tiež tabuľku pre skladanie zobrazení určených v b).*

Úloha 6.5. *Určte všetky samodružné body a samodružné priamky a) osovej súmernosti, b) stredovej súmernosti, c) rotácie, d) translácie, e) posunutej súmernosti. Ktoré z týchto samodružných prvkov sú silnosamodružné?*

Úloha 6.6. *Dané sú dva rôzne body A, B. Ktoré kružnice sú samodružné*

a) *v osovej súmernosti $\sigma_{\overleftrightarrow{AB}}$,*

b) *v stredovej súmernosti ϱ_A,*

c) *v rotácii $\varrho_{B,-30^\circ}$,*

d) *v translácii* $\tau_{\overline{AB}}$.

Úloha 6.7. *Daný je pravidelný 8-uholník $ABCDEFGH$. Určte všetky samodružné body a priamky zhodného zobrazenia*

$$\sigma_{\overleftrightarrow{BH}} \circ \sigma_{\overleftrightarrow{BE}} \circ \sigma_{\overleftrightarrow{GD}} \circ \sigma_{\overleftrightarrow{CD}}.$$

(Osemuholník si narysujte na papieri viac doprava.)

Úloha 6.8. *Daný je obdĺžnik $XYZT$.*

a) Určte obraz obdĺžnika $XYZT$ v zloženom zobrazení

$$\sigma_{\overleftrightarrow{SZ}} \circ \varrho_Y \circ \tau_{\overline{XZ}}.$$

b) Určte, ktoré zobrazenie vznikne zložením zobrazení v a).

Úloha 6.9. *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané $a + b$, c, v_a.*

Úloha 6.10. *Vnútorným bodom M konvexného uhla AVB veďte priamku p pretínajúcu jeho ramená v bodoch P, Q tak, aby $(PQM) = -1$.*

Úloha 6.11. *Do daného štvorca o strane a vpíšte štvorec o strane b tak, aby každý jeho vrchol bol vnútorným bodom niektorej strany daného štvorca.*

Úloha 6.12. *Zostrojte rovnobežník ak sú dané veľkosti jeho strán a, b a veľkosť φ uhla, ktorý zvierajú jeho uhlopriečky.*

Úloha 6.13. *Daný je pravidelný 6-uholník $ABCDEF$ a body X, Y, pričom $(ABX) = (DEY) = 2$. Nájdite zhodné zobrazenie, ktoré zobrazí trojuholník AXS do trojuholníka YDF. Bude to priama alebo nepriama zhodnosť?*

Kapitola 7

Rovnoľahlosť a podobnosť

7.1 Definícia a vlastnosti

Definícia 7.1. *Nech je daný bod $S \in \mathbb{E}_2$ a nenulové reálne číslo h.*
Zobrazenie $\varkappa : \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$
$X \longmapsto X'$,

$$\text{kde} \begin{cases} X' = X, & \text{ak } X = S, \\ \frac{|SX'|}{|SX|} = h \text{ a } X' \in \overrightarrow{SX}, & \text{ak } X \neq S \text{ a } h > 0, \\ \frac{|SX'|}{|SX|} = h \text{ a } X' \in \overleftarrow{SX}, & \text{ak } X \neq S \text{ a } h < 0, \end{cases}$$

nazývame **rovnoľahlosť** *v rovine;*
S - je **stred rovnoľahlosti***,*
h - **koeficient rovnoľahlosti***.*
Rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom h budeme označovať $\kappa_{S;h}$.

Základné vlastnosti rovnoľahlosti

- rovnoľahlosť je bijekcia
- inverzné zobrazenie k rovnoľahlosti je opäť rovnoľahlosť
- obrazom priamky v rovnoľahlosti je priamka s ňou rovnobežná
- obrazom úsečky v rovnoľahlosti je úsečka s ňou rovnobežná, pričom veľkosť obrazu úsečky je $|h|$-násobkom veľkosti vzoru (kde h je koeficient rovnoľahlosti)
- obrazom uhla v rovnoľahlosti je uhol s ním zhodný

Veta 21. *Nech ${}^1\kappa_{S_1,h_1}$, ${}^2\kappa_{S_2,h_2}$ sú neidentické rovnoľahlosti (t.j. $h_i \neq 1$, $i = 1,2$). Potom*

a) *ak $h_1h_2 = 1$ a $S_1 = S_2$, tak ${}^1\kappa \circ {}^2\kappa = \iota$,*

b) *ak $h_1h_2 \neq 1$ a $S_1 = S_2$, tak ${}^1\kappa \circ {}^2\kappa = \kappa_{S,h}$, kde $S = S_1$, $h = h_1h_2$,*

c) *ak $h_1h_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$, tak ${}^1\kappa \circ {}^2\kappa = \tau_{\overline{w}}$, kde vektor $\overline{w} = (1 - h_2).\overline{S_1S_2}$,*

d) *ak $h_1h_2 \neq 1$, $S_1 \neq S_2$, $h_1 \neq 1$ a $h_2 \neq 1$, tak ${}^1\kappa \circ {}^2\kappa = \kappa_{S,h}$, kde $(S_1S_2S) = -\frac{h_2-1}{h_2(h_1-1)}$, $h = h_1h_2$.*

Definícia 7.2. *Zobrazenie, ktoré je zložením rovnoľahlosti a zhodnosti (v ľubovoľnom poradí) nazývame* ***podobnosť****.*

7.2 Typové úlohy - Rovnoľahlosť, Podobnosť

Úloha 7.1. *Doplňte tak, aby vznikol pravdivý výrok:*
Bod X' je obrazom bodu X v rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom h práve vtedy, keď platí, že deliaci pomer $(X'XS) = \dots$.

Úloha 7.2. *Rozdelte danú úsečku na 7 zhodných (neprekrývajúcich sa) úsečiek.*

Úloha 7.3. *Zostrojte priamku prechádzajúcu daným bodom P a nedostupným priesečníkom priamok a, b.*

Úloha 7.4. *Zostrojte spoločnú dotyčnicu dvoch daných nesústredných kružníc.*

Úloha 7.5. *Daná je kružnica k a bod P, $P \in \mathrm{ext}\,\mathrm{k}$. Zostrojte sečnicu p kružnice k bodom P tak, aby $(AXY) = -\frac{1}{3}$, kde $p \cap k = \{X, Y\}$.*

Úloha 7.6. *Dané sú nesústredné kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ a bod A, $A \in k_1$. Zostrojte kružnicu k, ktorá sa dotýka kružnice k_1 v bode A a zároveň sa dotýka aj kružnice k_2.*

Úloha 7.7. *Daný je pravidelný 6-uholník $ABCDEF$ a body X, Y, Z, pričom $(ABX) = \frac{3}{4}$, $(DSY) = \frac{1}{2}$, $(CSZ) = -\frac{1}{2}$. Určte zobrazenie, ktoré zobrazí trojuholník XAF do trojuholníka YSZ.*

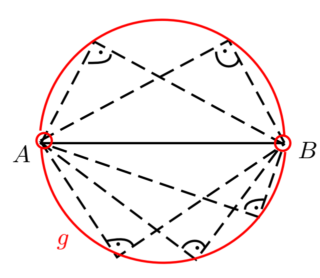
Kapitola 8

Množiny bodov danej vlastnosti

Definície a znenia viet

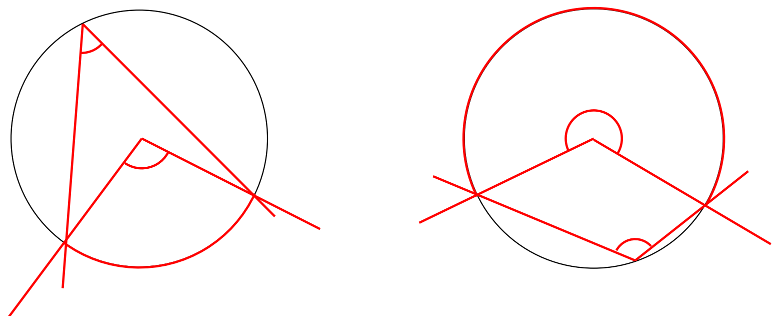
Definícia 8.1. *Pod* **množinou bodov danej vlastnosti** *rozumieme množinu s nasledujúcimi dvoma vlastnosťami:*
(1) Každý bod množiny má danú vlastnosť,
(2) Každý bod, ktorý má danú vlastnosť, patrí do množiny.

Veta 22. *(o Talesovej kružnici)*
Množina vrcholov C pravých uhlov všetkých pravouhlých trojuholníkov ABC (v $\mathbb{E}_2$) s preponou AB je kružnica g nad priemerom AB okrem bodov A, B (spomínaná kružnica g je tzv. **Talesova kružnica** *s priemerom AB).*



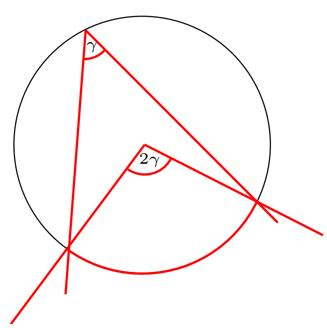
Obr. 8.1: Talesova kružnica

Definícia 8.2. *Nech A, B, C sú tri rôzne body kružnice $k(S; r)$. Budeme hovoriť, že uhol ASB je* **stredovým uhlom** *prislúchajúcim k tomu kružnicovému oblúku $\widehat{AB}$, ktorý je jeho podmnožinou. Analogicky, budeme hovoriť, že uhol ACB je* **obvodovým uhlom** *prislúchajúcim k tomu kružnicovému oblúku $\widehat{AB}$, ktorý je jeho podmnožinou.*
Budeme hovoriť, že stredový a obvodový uhol si prislúchajú, ak prislúchajú k tomu istému kružnicovému oblúku.



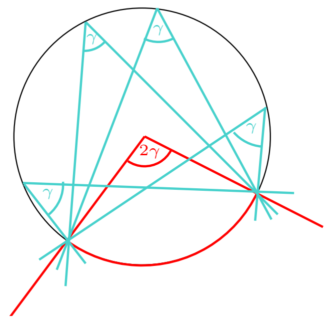
Obr. 8.2: Prislúchajúce si stredový a obvodový uhol

Veta 23. *(o stredovom a obvodovom uhle)*
Ak obvodový a stredový uhol si prislúchajú, tak veľkosť stredového uhla je dvojnásobkom veľkosti obvodového uhla.



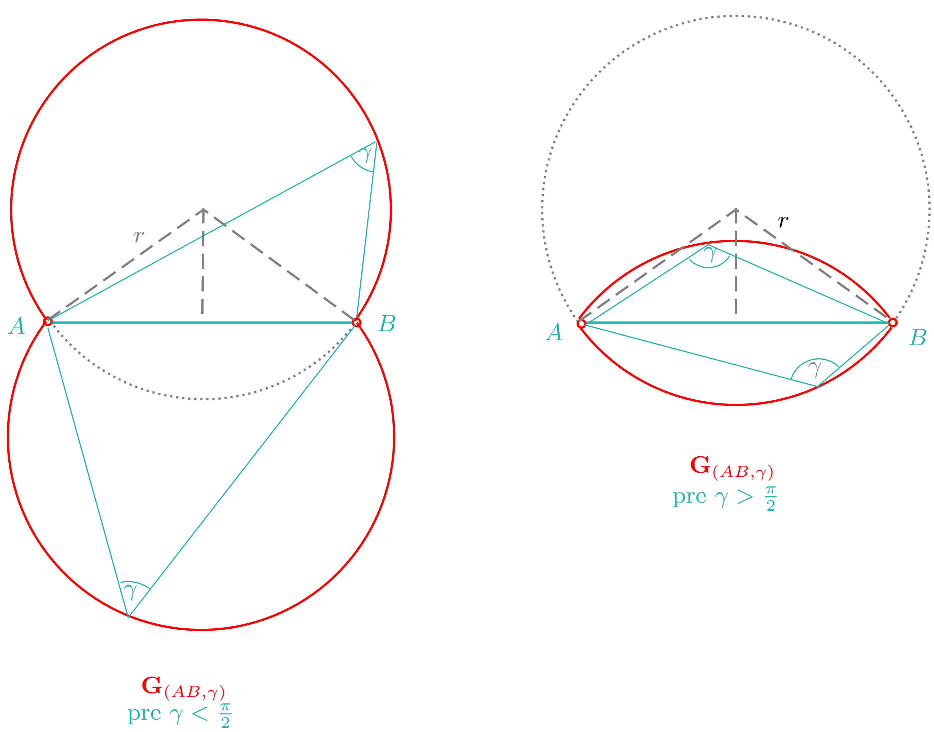
Obr. 8.3: Prislúchajúce si stredový a obvodový uhol - ich veľkosti

Veta 24. *(o obvodových uhloch)*
Všetky obvodové uhly prislúchajúce tomu istému kružnicovému oblúku sú zhodné.



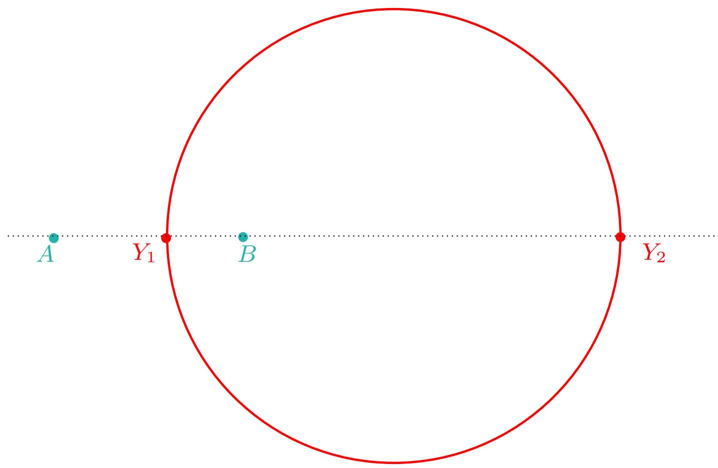
Obr. 8.4: Stredový uhol a niektoré jemu prislúchajúce obvodové uhly

Veta 25. *Nech A, B sú dané rôzne body a γ je daný konvexný uhol. Množina všetkých bodv (v $\mathbb{E}_2$), z ktorých vidíme úsečku AB pod uhlom γ sú dva zhodné kružnicové oblúky okrem koncových bodov A, B, pričom tieto kružnicové ležia na kružniciach $k_1(S_1; r)$, $k_2(S_2; r)$, ktoré sú súmerne združené podľa priamky $\overleftrightarrow{AB}$, úsečka AB je ich spoločnou tetivou a $r = \frac{|AB|}{2\sin\gamma}$. Množinu bodov, z ktorých úsečku AB vidíme pod uhlom γ budeme označovať* $\mathbf{G}_{(AB,\gamma)}$.



Obr. 8.5: $\mathbf{G}_{AB,\gamma}$ - množina všetkých bodov, z ktorých úsečku AB vidíme pod uhlom γ

Veta 26. *(o Apolloniovej kružnici)*
Nech A, B sú dva rôzne body z $\mathbb{E}_2$ a nech $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Množina všetkých bodov $X \in \mathbb{E}_2$ takých, že $\frac{|AX|}{|BX|} = \lambda$, je kružnica s priemerom Y_1Y_2, kde $(ABY_1) = -\lambda$, $(ABY_2) = \lambda$. Túto kružnicu nazývame Apolloniova kružnica.



Obr. 8.6: Apolloniova kružnica pre $\lambda = \frac{3}{2}$

Typové úlohy - Množiny bodov danej vlastnosti

Úloha 8.1. *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané γ, v_a, v_c.*

Úloha 8.2. *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané γ, t_a, t_c.*

Úloha 8.3. *Určte množinu všetkých bodov $X \in \mathbb{E}_2$, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od ramien daného konvexného uhla ABC.*

Úloha 8.4. *Daná je kružnica $k(S; r)$ a bod M, $M \in \operatorname{int} \mathrm{k}$. Určte množinu stredov všetkých tetív kružnice k prechádzajúcich bodom M.*

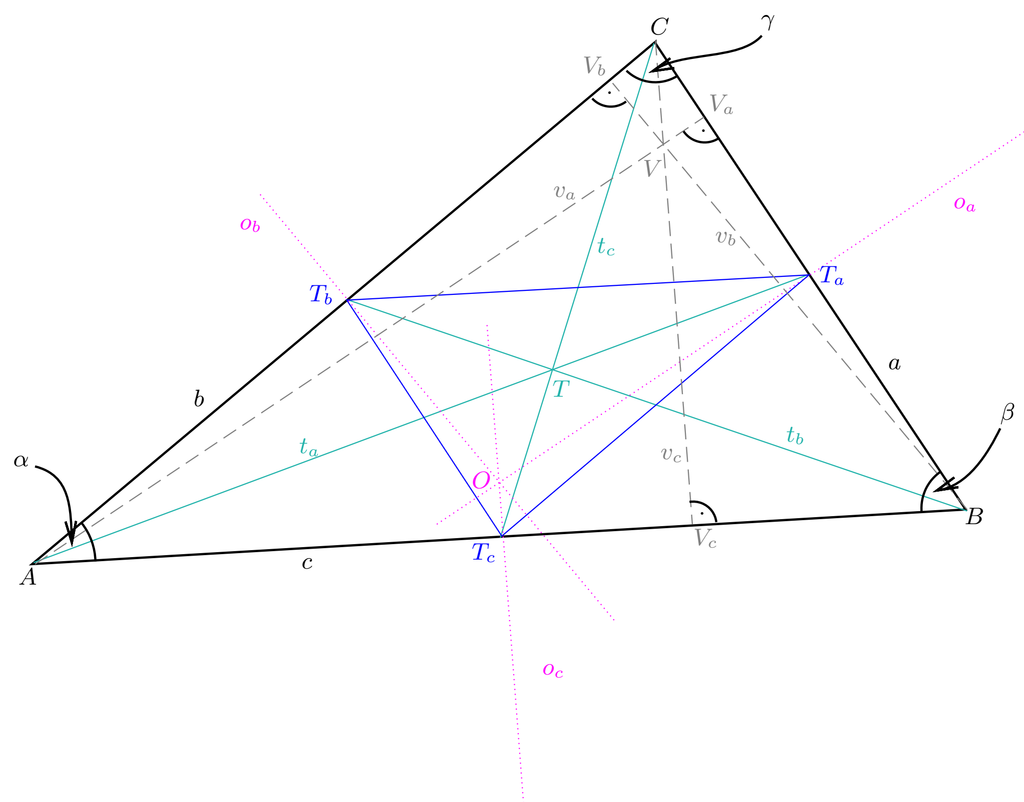
Úloha 8.5. *Dané sú dva rôzne body K, L. Určte množinu všetkých bodov $X \in \mathbb{E}_2$, ktoré majú podiel vzdialeností od bodov K, L rovný konštante $k = \frac{3}{4}$.*

Kapitola 9

Geometria trojuholníka

Definície základných prvkov trojuholníka a ich vlastnosti

Dohovor - označenie prvkov pre $\triangle ABC$



Definícia 9.1. *Nech A, B, C sú dané nekolineárne body. Pod* **trojuholníkom** *ABC rozumieme prienik polrovín $\overrightarrow{ABC}$, $\overrightarrow{BCA}$ a $\overrightarrow{CAB}$.*
Body A, B, C nazývame **vrcholy** *trojuholníka,*
úsečky AB, BC, AC nazývame **strany** *trojuholníka,*
uhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAB$ nazývame **vnútorné uhly** *trojuholníka*
uhol, ktorý je susedný vnútornému uhlu trojuholníka sa nazýva **vonkajší uhol** *trojuholníka*
úsečky AV_a, BV_b, CV_c, kde V_a, V_b, V_c sú päty kolmíc z vrcholov A, B, C na protiľahlú stranu trojuholníka, nazývame **výšky** *trojuholníka,*
úsečky AT_a, BT_b, CT_c, kde T_a, T_b, T_c sú stredy strán a, b, c, nazývame **ťažnice** *trojuholníka,*
úsečky T_aT_b, T_bT_c, T_aT_c nazývame **stredné priečky** *trojuholníka.*

Kružnicu, ktorá prechádza všetkými troma vrcholmi trojuholníka, nazývame **opísanou kružnicou** *trojuholníka,*
kružnicu, ktorá sa dotýka všetkých troch strán trojuholníka, nazývame **vpísanou kružicou** *trojuholníka.*
(Zamyslite sa nad dôkazmi viet 29, 30 a nad riešením úlohy 9.3.)

V trojuholníku ABC budeme pre veľkosti jeho jednotlivých prvkov používať (ak vyslovene nepovieme inak) nasledovné štandardné označenie:
veľkosti strán $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$,
veľkosti vnútorných uhlov $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $\sphericalangle BCA| = \gamma$, $|\sphericalangle CAB| = \alpha$,
veľkosti výšok $|AV_a| = v_a$, $BV_b| = v_b$, $|CV_c| = v_c$,
veľkosti ťažníc $|AT_a| = t_a$, $|BT_b| = t_b$, $|CT_c| = t_c$.

Poznámka 9.2. *V geometrii sa často zvykne urobiť kvôli jednoduchšiemu vyjadrovaniu dohovor, že pokiaľ nebude môcť dôjsť k nedorozumeniu, tak nebudeme striktne rozlišovať v označení medzi stranou trojuholníka a jeho veľkosťou, výškou trojuholníka a jeho veľkosťou, podobne ťažnicou trojuholníka a jej veľkosťou, strednou priečkou a jej veľkosťou, vnútorným uhlom trojuholníka a jeho veľkosťou. Teda ak nebude môcť dôjsť k nedorozumeniu, tak strany aj ich veľkosti budeme označovať a, b, c; podobne podľa kontextu pod α budeme rozumieť vnútorný uhol trojuholníka, prípadne jeho veľkosť, pod v_a výšku na stranu a prípadne jej veľkosť, pod t_a ťažnicu na stranu a, prípadne jej veľkosť a pod.*

Veta 27. *(trojuholníkové nerovnosti)*
Súčet veľkostí ktorýchkoľvek dvoch strán trojuholníka je väčší ako veľkosť jeho tretej strany.

Veta 28. *Nech ABC je trojuholník. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

(T) $\quad a + b > c \quad \& \quad a + c > b \quad \& \quad b + c > a,$

(T') $\quad a \leq b \leq c \Longrightarrow a + b > c,$

(T") $\quad a > b \Longrightarrow a + b > c > a - b.$

Veta 29. *Osi strán trojuholníka prechádzajú tým istým bodom.*

Veta 30. *Osi vnútorných uhlov trojuholníka prechádzajú tým istým bodom.*

Veta 31. *(sínusová)*
V ľubovoľnom trojuholníku ABC platí:

$$a.\sin\beta = b.\sin\alpha,$$
$$b.\sin\gamma = c.\sin\beta,$$
$$c.\sin\alpha = a.\sin\gamma.$$

Veta 32. *(zovšeobecnená sínusová)*
Pre ľubovoľný trojuholník ABC platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

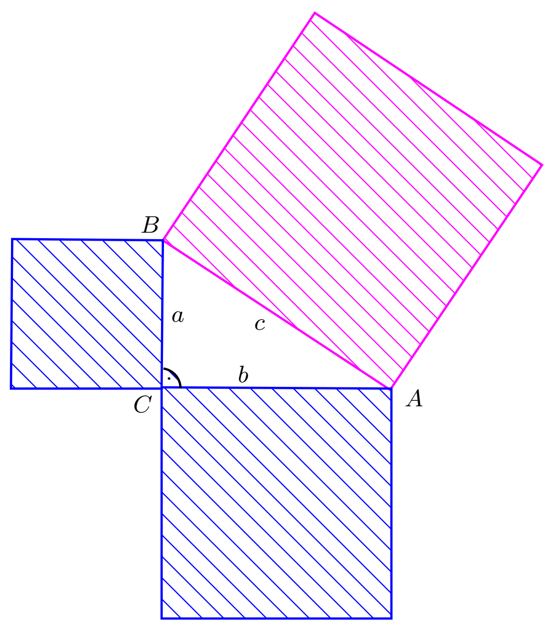
kde r je polomer opísanej kružnice trojuholníka.

Veta 33. *(kosínusová)*
V ľubovoľnom trojuholník ABC platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Veta 34. *(Pytagorova)*
V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C platí

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



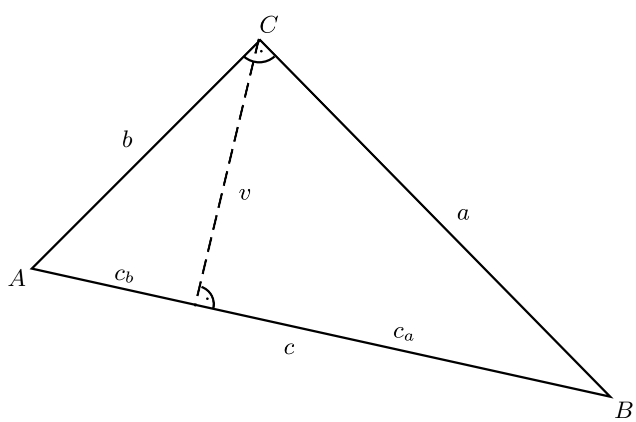
Obr. 9.2: Pytagorova veta

Veta 35. *(Euklidova o výške)*
Ak v pravouhlom trojuholníku je v veľkosť výšky na preponu, c_a, c_b sú veľkosti oboch úsekov prepony vyťatých touto výškou, potom platí

$$v^2 = c_a c_b.$$

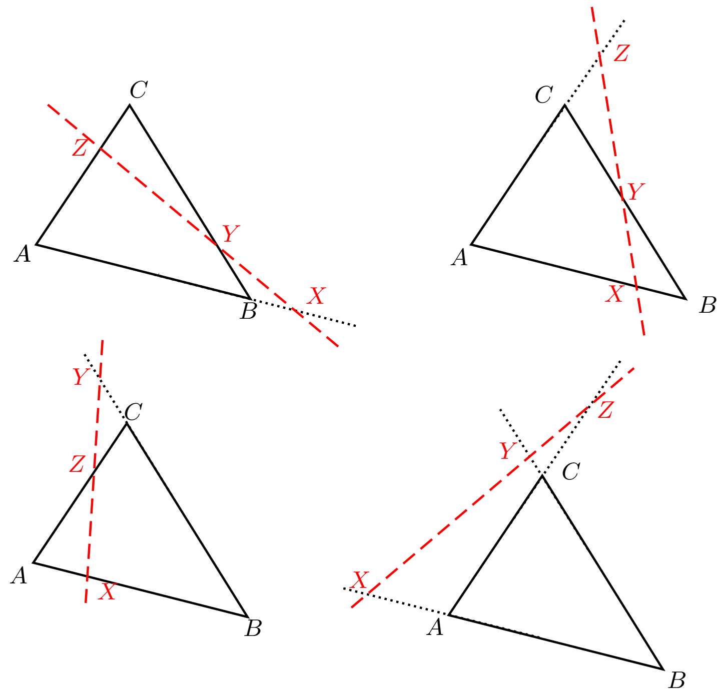
Veta 36. *(Euklidova o odvesne)*
Ak v pravouhlom trojuholníku označíme a, b veľkosti odvesien, c veľkosť prepony, c_a, c_b veľkosti úsekov prepony priľahlých odvesnám a, b (v poradí). Potom platí

$$\begin{aligned} a^2 &= c.c_a, \\ b^2 &= c.c_b. \end{aligned}$$



Obr. 9.3: Euklidove vety

Veta 37. *(Menelaova)*
Nech je daný trojuholník ABC a body X, Y, Z postupne na priamkach $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, ktoré nesplývajú so žiadnym vrcholom trojuholníka. Potom X, Y, Z sú kolineárne práve vtedy, keď $(ABX).(BCY).(CAZ) = 1$.



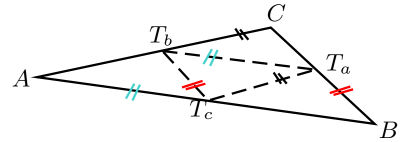
Obr. 9.4: Menelaova veta - niektoré konfigurácie pre body X,Y,Z

Veta 38. *(Heronov vzorec)*
Ak označíme $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$*, tak pre obsah trojuholník ABC platí*

$$S_{\triangle\, ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

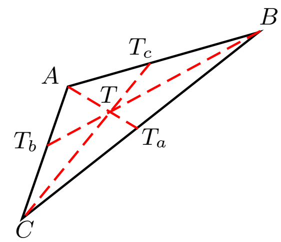
Veta 39. *Stredná priečka trojuholníka je rovnobežná so stranou, ktorej stred neobsahuje a jej veľkosť sa rovná jednej polovici veľkosti strany s ktorou je rovnobežná.*

Veta 40. *Stredné priečky trojuholníka ho rozdeľujú na štyri zhodné trojuholníky.*



Obr. 9.5: Priečkový trojuholník

Veta 41. *Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, tento bod nazývame* **ťažisko trojuholníka***, obvykle označujeme T.*



Obr. 9.6: Ťažisko trojuholníka T

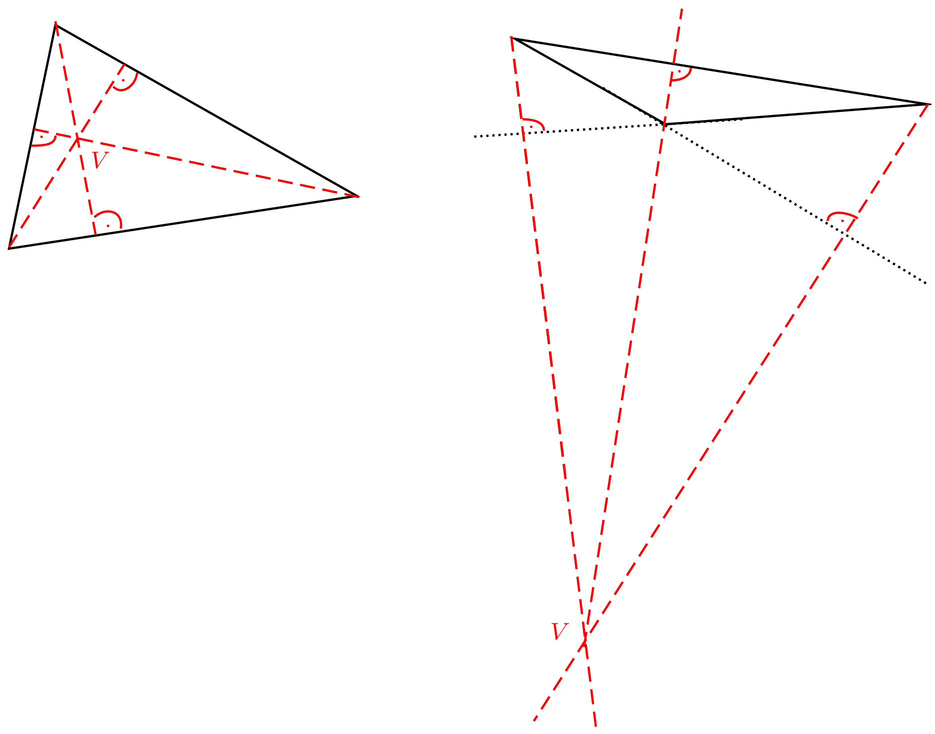
Veta 42. *Ťažisko trojuholníka delí každú z ťažníc v pomere* $2:1$, *pričom dlhší úsek obsahuje vrchol trojuholníka.*

Veta 43. *Pre polomer* r *opísanej kružnice a pre polomer* ϱ *vpísanej kružnice trojuholníku* ABC *platí*

$$\begin{aligned} r &= \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \\ \varrho &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \end{aligned}$$

kde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Veta 44. *Nositeľky výšok v trojuholníku prechádzajú tým istým bodom. Tento bod nazývame* **ortocentrum trojuholníka**, *obvykle označujeme* V.



Obr. 9.7: Ortocentrum trojuholníka V

- Na záver ešte zopakujeme
 vety o zhodnosti trojuholníkov a vety o podobnosti trojuholníkov.

Definícia 9.3. *Dva* **trojuholníky sú zhodné**, *ak sa zhodujú vo všetkých troch stranách a všetkých troch uhloch.*
Zhodnosť trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ zapisujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Veta 45. *(veta (sss) o zhodnosti trojuholníkov)*
Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú vo všetkých troch stranách.

Veta 46. *(veta (sus) o zhodnosti trojuholníkov)*
Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a uhle nimi zovretom.

Veta 47. *(veta (usu) o zhodnosti trojuholníkov)*
Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v jednej strane a uhloch k nej priľahlých.

Veta 48. *(veta (Ssu) o zhodnosti trojuholníkov)*
Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a uhle oproti väčšej z nich.

Definícia 9.4. Trojuholníky ABC**,** $A'B'C'$ **sú podobné**, *ak existuje kladné reálne číslo k také, že platí*

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k.$$

Číslo k sa nazýva **koeficient podobnosti**.
Podobnosť trojuholníkov ABC, $A'B'C'$ zapisujeme $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Veta 49. *V podobných trojuholníkoch sú odpovedajúce si uhly zhodné.*

Veta 50. *(veta (uu) o podobnosti trojuholníkov)*
Ak sa trojuholníky zhodujú v dvoch uhloch, tak sú podobné.

Veta 51. *(veta (sus) o podobnosti trojuholníkov)*
Ak sa pomery dvoch strán trojuholníkov rovnajú a uhly nimi zovreté sú zhodné, tak trojuholníky sú podobné.

Veta 52. *(veta (Ssu) o podobnosti trojuholníkov)*
Ak sa pomery dvoch strán trojuholníkov rovnajú a uhly oproti väčších z nich sú zhodné, tak trojuholníky sú podobné.

Úlohy - Geometria trojuholníka

Úloha 9.1. *Určte, pre ktoré trojuholníky ABC platí*

a) $\triangle ABC \cong \triangle BAC$,

b) $\triangle ABC \cong \triangle CAB$.

Úloha 9.2. *Nech T_c stred strany AB trojuholníka ABC. Dokážte, že $|A, \overleftrightarrow{CT_c}| = |B, \overleftrightarrow{CT_c}|$.*

Úloha 9.3. *Každému trojuholníku môžeme opísať aj vpísať kružnicu. Zdôvodnite.*

Úloha 9.4. *Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov:*
a) Každému štvoruholníku možeme opísať kružnicu.
b) Každému štvoruholníku možeme vpísať kružnicu.
c) Každému pravidelnému $n-$uholníku možeme opísať kružnicu.
d) Každému pravidelnému $n-$uholníku možeme vpísať kružnicu.

Úloha 9.5. *Stredmi strán daného ostrouhlého trojuholníka zostrojte kolmice na zvyšné dve jeho strany. Týchto 6 kolmíc ohraničuje 6-uholník. Dokážte, že obsah tohoto 6-uholníka sa rovná polovici obsahu daného ostrouhlého trojuholníka.*

Úloha 9.6. *Dokážte, že os vnútorného uhla trojuholníka delí jemu protiľahlú stranu v pomere jemu priľahlých strán.*

Úloha 9.7. *Dokážte, že v trojuholníku ABC platí $v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.*

Úloha 9.8. *Ortocentrum ostrouhlého trojuholníka rozpoľuje každú výšku na dve úsečky, označme dĺžky týchto úsečiek v'_a, v''_a, v'_b, v''_b, v'_c, v''_c. Dokážte, že pre súčin dĺžok platí $v'_a.v''_a = v'_b.v''_b = v'_c.v''_c$.*

Úloha 9.9. *Na strane AD daného rovnobežníka $ABCD$ zvoľte bod M. Nech N je priesečník priamok $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CD}$. Dokážte, že pre ľubovoľný takto zvolený bod M platí, že súčin dĺžok úsečiek AM a CN je konštantný.*