UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

Katarína Čunderlíková

Postupnosti a nekonečné rady pre učiteľov

Banská Bystrica 2011

Publikácia obsahuje poznatky o postupnosti, jej limite a o nekonečných radoch. Jej súčasťou sú cvičenia so vzorovo vyriešenými príkladmi a úlohy na samostatné rišenie.

Skriptá sú určené študentom učiteľského štúdia.

Postupnosti a nekonečné rady pre učiteľov
Vysokoškolské skriptá

Fakulta prírodných vied UMB Banská Bystrica
1. vydanie, 2011

Recenzenti:
doc. RNDr. Vladimír Janiš, CSc.
doc. RNDr. Martin Kalina, PhD.

ISBN 978-80-557-0273-5

Predhovor

Skriptá sú určené študentom učiteľského štúdia na FPV UMB v Banskej Bystrici. Sú rozdelené na dve kapitoly. Prvá kapitola obsahuje poznatky o postupnosti a jej limite, obsahom druhej kapitoly sú nekonečné rady a skúmanie ich charakteru. Text sme sa snažili písať tak, aby bol zrozumitelný, preto je doplnený množstvom obrázkov na pochopenie situácie. Koniec dôkazov vo vetách je označený štvorčekom □. Súčasťou textu sú aj vzorovo vyriešené príklady a úlohy na samostatné riešenie (pozri časti 1.7 a 2.5).

Časť 1.1 a 1.2 vznikla použitím literatúry [5], [6] a [7]. Pri zostavovaní častí 1.3 až 1.6 a častí 2.1 až 2.4 sme sa opierali o práce [5], [6] a [8] a využili sme aj svoje študentské zápisy z prednášok prof. RNDr. Ľubomíra Snohu, DSc., DrSc. z roku 1999. Pri tvorbe časti 1.7 a 2.5 sme použili literatúru [1], [2], [3], [4], [7] a [9]. Všetky obrázky v texte boli vytvorené autorkou.

Na záver chcem poďakovať recenzentom doc. RNDr. Vladimírovi Janišovi, CSc. a doc. RNDr. Martinovi Kalinovi, PhD. za pozorné prečítanie textu a odstránenie chýb. Ďakujem aj prof. RNDr. Ľubomírovi Snohovi, DSc., DrSc. za množstvo dobrých pripomienok, ktoré výrazne prispeli k skvalitneniu uvedeného textu.

V Banskej Bystrici, dňa 18. októbra 2011 Autorka

Obsah

Kapitola 1

Postupnosť a jej limita

1.1 Pojem postupnosti a jej vlastnosti

Definícia 1.1. *Postupnosťou reálnych čísel rozumieme reálnu funkciu s definičným oborom* $\mathbb{N}$. *Ak je definičný obor množina* $\{1, 2, \ldots, k\}$, *hovoríme o konečnej postupnosti.*

Namiesto pojmu "konečná postupnosť" sa často používa pojem "usporiadaná n-tica". V nasledujúcom texte bude D_f označovať definičný obor funkcie f a H_f jej obor hodnôt.

Zápis:

- **konečnej postupnosti:** $(a_n)_{n=1}^{k}$ $\quad D_f = \{1, 2, \ldots, k\}, i \in \mathbb{N}$
  $H_f = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, a_i \in \mathbb{R}$
- **nekonečnej postupnosti:** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad D_f = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$
  $H_f = \{a_1, a_2, \ldots\}, a_i \in \mathbb{R}$

Spôsoby určenia postupnosti:

a) vymenovaním hodnôt
   $2, 7, 10, 12$ $\quad a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_3 = 10,\ a_4 = 12$
   $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$
   $H_f = \{2, 7, 10, 12\}$

b) udaním analytického predpisu
   $a_n = 2^n,\ n \in \mathbb{N}$

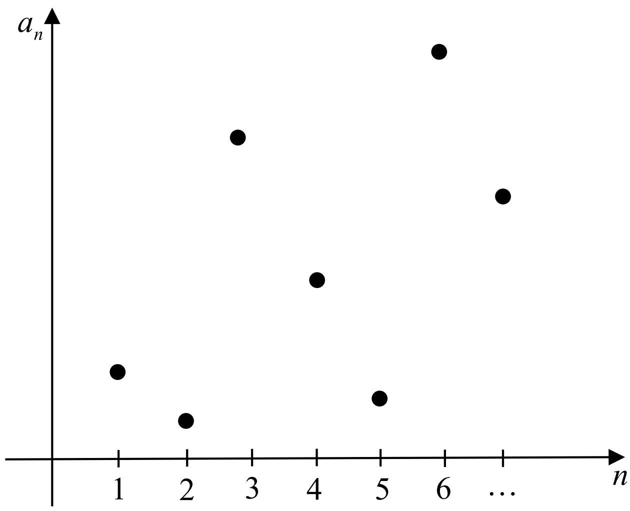
c) udaním rekurentného predpisu
   $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n + 1$

Typy postupností:

- **konštantná** - ak $\exists\, c \in \mathbb{R}$ také, že $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$, resp.
  ak $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 = a_2 = \ldots a_n = \ldots$, t.j. $a_n = a_{n+1}$.
  - zápis: $(c)_{n=1}^{\infty}$
- **prostá** - jej hodnoty sa neopakujú, t.j. $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$ také, že $n \neq k$ platí $a_n \neq a_k$,
  resp. ak $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$ také, že $a_n = a_k$ platí $n = k$.

- **periodická** - ak $\exists\, p \in \mathbb{N}$ také, že $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+p} = a_n$
  - konštantná postupnosť je periodická,
  - prostá postupnosť nikdy nie je periodická.

Grafické znázorňovanie postupností:



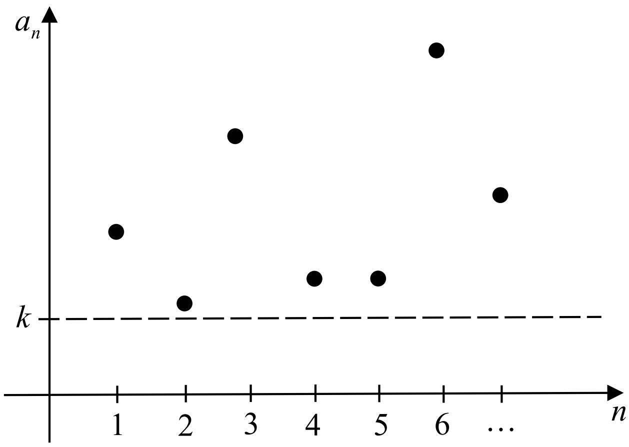
Obrázok 1.1:

Prejdime teraz k samotným vlastnostiam postupností.

Definícia 1.2. *Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená, ak*

$$\exists\, k \in \mathbb{R} \text{ také, že } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ platí } a_n \geq k.$$

Číslo k nazývame dolné ohraničenie.

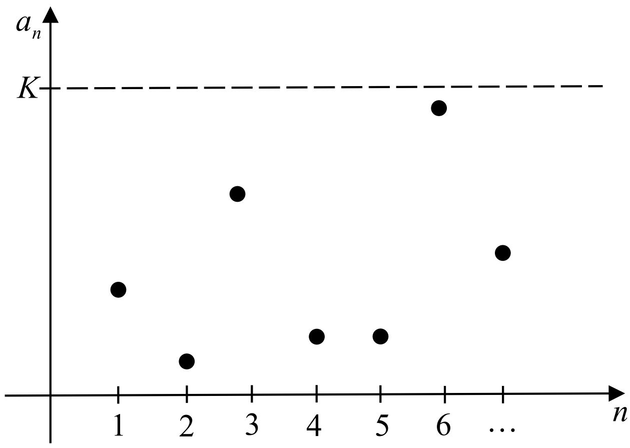


Obrázok 1.2:

Definícia 1.3. *Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená, ak*

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \text{ také, že } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ platí } a_n \leq K.$$

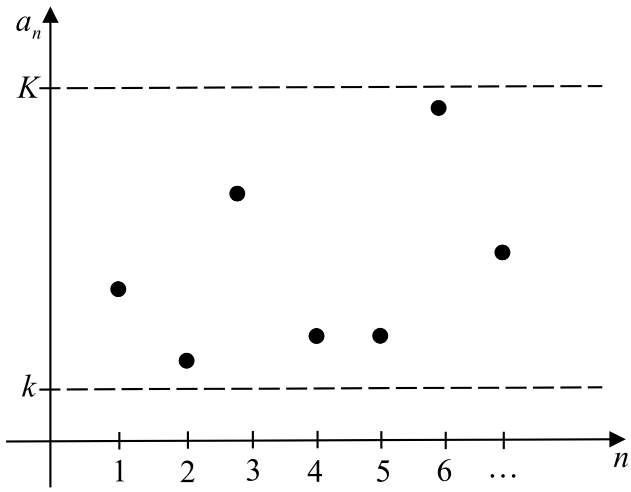
Číslo K nazývame horné ohraničenie.



Obrázok 1.3:

Definícia 1.4. *Hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená, ak je ohraničená zdola aj zhora, t.j.*

$$\exists\, k, K \in \mathbb{R} \text{ také, že } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ platí } k \leq a_n \leq K.$$



Obrázok 1.4:

Veta 1.1. *Postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená práve vtedy, keď existuje číslo* $K \in \mathbb{R}$ *také, že*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ platí } |a_n| \leq K.$$

Dôkaz:

"$\Rightarrow$" Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Potom $\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ platí $k_1 \leq a_n \leq k_2$. Zvoľme $K = \max\{|k_1|, |k_2|\}$. Nech $K = |k_2|$ ak $k_1 < k_2$. Potom

$$-K \leq k_1 \leq a_n \leq k_2 = K$$

Teda $|a_n| \leq K$.

"$\Leftarrow$" Nech $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$. Potom $-K \leq a_n \leq K$. Zvoľme $k_1 = -K$, $k_2 = K$. Potom

$$k_1 \leq a_n \leq k_2.$$

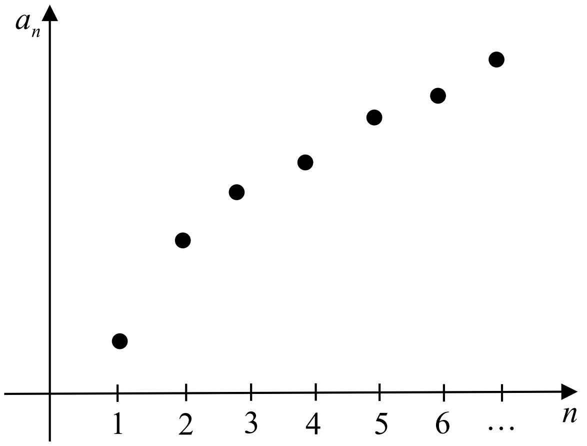
Teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. □

Definícia 1.5. *Hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je*

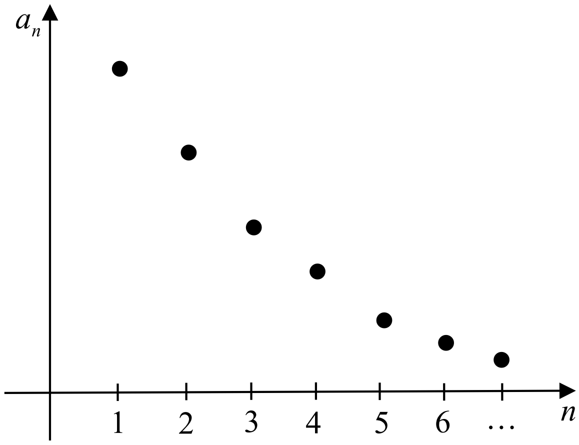
a) rastúca, ak $\forall n, k \in \mathbb{N} \;:\; n < k \Longrightarrow a_n < a_k$,

b) klesajúca, ak $\forall n, k \in \mathbb{N} \;:\; n < k \Longrightarrow a_n > a_k$.

Tieto postupnosti nazývame aj rýdzomonotónne.



Obrázok 1.5: Rastúca postupnosť

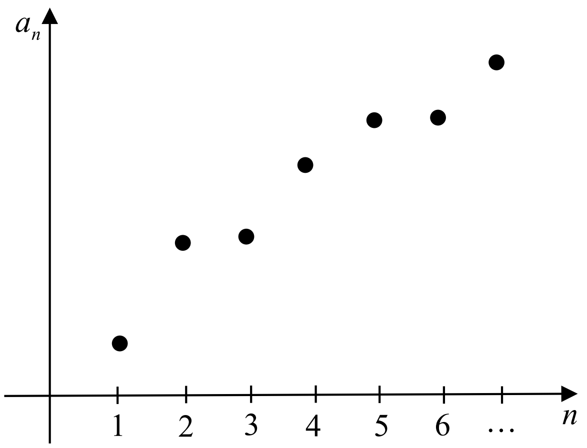


Obrázok 1.6: Klesajúca postupnosť

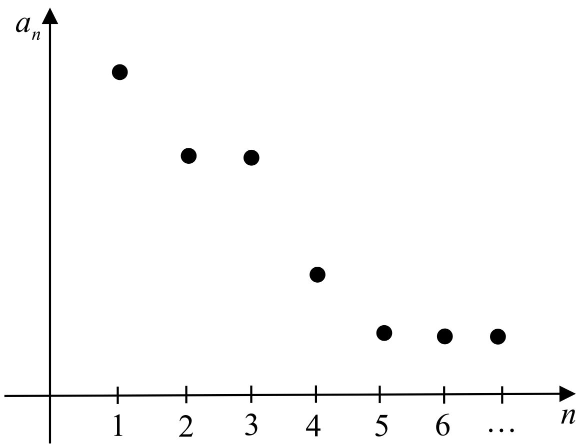
Definícia 1.6. *Hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je*

a) neklesajúca, ak $\forall n, k \in \mathbb{N} \;:\; n < k \Longrightarrow a_n \leq a_k$,

b) nerastúca, ak $\forall n, k \in \mathbb{N} \;:\; n < k \Longrightarrow a_n \geq a_k$.



Obrázok 1.7: Neklesajúca postupnosť



Obrázok 1.8: Nerastúca postupnosť

Poznámka 1.1. *Postupnosti v definiciách 1.5 a 1.6 nazývame monotónne.*

Veta 1.2. *Postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je*

a) rastúca práve vtedy, keď $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n < a_{n+1}$,

b) klesajúca práve vtedy, keď $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n > a_{n+1}$,

c) neklesajúca práve vtedy, keď $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \le a_{n+1}$,

d) nerastúca práve vtedy, keď $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \ge a_{n+1}$.

Dôkaz:

a) "$\Rightarrow$" Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, t.j. $\forall\, n,k \in \mathbb{N}\;\; n < k \Longrightarrow a_n < a_k$. Zvoľme $k = n+1$, z toho potom dostávame $a_n < a_{n+1}$.

"$\Leftarrow$" Nech $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$. Zvoľme $k > n$ a označme $r = k-n$. Teda $k = n+r$. Podľa predpokladu $a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < \ldots < a_{n+r-1} < a_{n+r} = a_k$. Teda $\forall\, n,k \in \mathbb{N}\;\; n < k \Longrightarrow a_n < a_k$, t.j. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca.

b) "$\Rightarrow$" Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, t.j. $\forall\, n,k \in \mathbb{N}\;\; n < k \Longrightarrow a_n > a_k$. Zvoľme $k = n+1$, z toho potom dostávame $a_n > a_{n+1}$.

"$\Leftarrow$" Nech $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$. Zvoľme $k > n$ a označme $r = k-n$. Teda $k = n+r$. Podľa predpokladu $a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \ldots > a_{n+r-1} > a_{n+r} = a_k$. Teda $\forall\, n,k \in \mathbb{N}\;\; n < k \Longrightarrow a_n > a_k$, t.j. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.

c) "$\Rightarrow$" Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, t.j. $\forall\, n,k \in \mathbb{N}\;\; n < k \Longrightarrow a_n \le a_k$. Zvoľme $k = n+1$, z toho potom dostávame $a_n \le a_{n+1}$.

"$\Leftarrow$" Nech $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \le a_{n+1}$. Zvoľme $k > n$ a označme $r = k-n$. Teda $k = n+r$. Podľa predpokladu $a_n \le a_{n+1} \le a_{n+2} \le \ldots \le a_{n+r-1} \le a_{n+r} = a_k$. Teda $\forall\, n,k \in \mathbb{N}\;\; n < k \Longrightarrow a_n \le a_k$, t.j. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca.

d) "$\Rightarrow$" Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, t.j. $\forall\, n,k \in \mathbb{N}\;\; n < k \Longrightarrow a_n \ge a_k$. Zvoľme $k = n+1$, z toho potom dostávame $a_n \ge a_{n+1}$.

"$\Leftarrow$" Nech $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \ge a_{n+1}$. Zvoľme $k > n$ a označme $r = k-n$. Teda $k = n+r$. Podľa predpokladu $a_n \ge a_{n+1} \ge a_{n+2} \ge \ldots \ge a_{n+r-1} \ge a_{n+r} = a_k$. Teda $\forall\, n,k \in \mathbb{N}\;\; n < k \Longrightarrow a_n \ge a_k$, t.j. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca. $\square$

Postupy pri dokazovaní monotónnosti:

1. Vyšetríme $a_{n+1} - a_n = \ldots = \begin{cases} > 0 \Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je rastúca} \\ < 0 \Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je klesajúca} \\ = 0 \Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je konštantná} \end{cases}$

2. Ak $a_n > 0\;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, tak vyšetríme $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = \begin{cases} > 1 \Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ rastúca} \\ < 1 \Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ klesajúca} \\ = 1 \Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konštantná} \end{cases}$

3. Dá sa aj položiť napr. $a_{n+1} > a_n$ a ekvivalentnými úpravami dospieť k určitému výrazu, o ktorom vieme rozhodnúť, či to je pravda $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca) alebo nepravda (teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca). Podobne možno vyšetriť výrazy $a_{n+1} < a_n$, $a_{n+1} \ge a_n$, $a_{n+1} \le a_n$, $a_{n+1} = a_n$.

1.2 Aritmetická a geometrická postupnosť

Definícia 1.7. *Postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *sa nazýva aritmetická, ak existuje konštanta* d *(tzv. diferencia) taká, že*

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(t.j. ak rozdiel susedných členov je konštantný).

Veta 1.3. *Nech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je aritmetická postupnosť s diferenciou* d*. Potom platí:*

a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $a_s = a_r + (s-r) \cdot d, \quad s, r \in \mathbb{N},$

c) $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} = (\textit{prvý} + \textit{posledný}) \cdot \frac{\textit{počet členov}}{2}$

Dôkaz:

a) Matematickou indukciou (MI):

1^0 $n = 1$

$a_1 = a_1 + (1-1) \cdot d = a_1 + 0 \cdot d = a_1$

2^0 Indukčný predpoklad (IP): $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

$a_{n+1} = a_n + d \stackrel{\text{IP}}{=} a_1 + (n-1) \cdot d + d = a_1 + n \cdot d$ $\square$

b) Podľa prípadu a) pre a_s a a_r môžeme písať

$$a_s = a_1 + (s-1) \cdot d$$

$$a_r = a_1 + (r-1) \cdot d$$

a teda $a_s - a_r = (s-r) \cdot d$. Z toho máme $a_s = a_r + (s-r) \cdot d$.

c) Napíšme dvakrát súčet s_n pod seba nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} + \ldots + a_n, \quad 0 \le k \le n-1 \\ s_n & = & a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k} + \ldots + a_1, \quad 0 \le k \le n-1 \\ \hline 2s_n & = & (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{k+1} + a_{n-k}) + \ldots + (a_n + a_1). \end{array}$$

Ďalej platí

$$a_{k+1} = a_1 + k \cdot d, \quad a_{n-k} = a_n + ((n-k) - n) \cdot d = a_n - k \cdot d.$$

Teda

$$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + k \cdot d + a_n - k \cdot d = a_1 + a_n.$$

Z toho máme

$$\begin{aligned} 2s_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{k+1} + a_{n-k}) + \ldots + (a_n + a_1) = \\ &= (a_1 + a_n) \cdot n, \\ s_n &= (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Veta 1.4. *Aritmetická postupnosť s diferenciou d je*

a) rastúca pre $d > 0$,

b) klesajúca pre $d < 0$,

c) konštantná pre $d = 0$.

Veta 1.5. *Pre aritmetickú postupnosť s diferenciou d platí:*

a) Ak $d > 0$, potom je ohraničená zdola, ale nie zhora.

b) Ak $d < 0$, potom je ohraničená zhora, ale nie zdola.

c) Ak $d = 0$, potom je ohraničená zhora i zdola.

Veta 1.6. *Ak je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aritmetická, tak pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí*

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

t.j. pre každé $n \geq 2$ je n-tý člen aritmetickej postupnosti aritmetickým priemerom $(n-1)$-ho a $(n+1)$-ho člena.

Poznámka 1.2. *Majme aritmetickú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferenciou d. Upravme jej predpis pre n-tý člen $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ na tvar*

$$a_n = d \cdot n + (a_1 - d).$$

Označme $a_n = y$, $n = x$, $d = a$ a $a_1 - d = b$. Dostávame tak predpis

$$y = a \cdot x + b$$

lineárnej funkcie s $D_f = \mathbb{N}$. Teda graf aritmetickej postupnosti je časťou priamky.

Definícia 1.8. *Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva geometrická, ak existuje $q \in \mathbb{R}$ tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslo q sa nazýva kvocient.

Veta 1.7. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť s kvocientom q. Potom platí:*

a) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$,

b) $a_s = a_r \cdot q^{s-r}, \quad s > r, \quad s, r \in \mathbb{N}$,

c) $$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = \textit{prvý člen} \cdot \dfrac{q^{\textit{počet členov}} - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ n \cdot a_1, & q = 1 \end{cases}$$

Dôkaz:
a) Matematickou indukciou (MI):

1^0 $n = 1$
$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1 \cdot 1 = a_1$

2^0 Indukčný predpoklad (IP): $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$a_{n+1} = a_n \cdot q \overset{\text{IP}}{=} a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$ □

b) Podľa prípadu a) pre a_s a a_r môžeme písať

$$a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$$

$$a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$$

a teda $a_s = a_1 \cdot q^{s-1} = a_1 \cdot q^{s-r+r-1} = a_1 \cdot q^{s-r} \cdot q^{r-1} = a_r \cdot q^{s-r}$.

c) Nech $q \neq 1$. Napíšme dvakrát súčet s_n pod seba. Prvý z nich vynásobíme číslom (-1) a druhý z nich vynásobíme kvocientom q:

$$\begin{aligned} -s_n &= -a_1 - a_1 \cdot q - a_1 \cdot q^2 - \ldots - a_1 \cdot q^{n-2} - a_1 \cdot q^{n-1} \\ s_n \cdot q &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n \cdot q - s_n &= a_1 \cdot q^n - a_1, \\ s_n \cdot (q-1) &= a_1 \cdot (q^n - 1), \quad q \neq 1 \\ s_n &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Ak $q = 1$, tak $a_n = a_1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Teda $s_n = a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = n \cdot a_1$. □

Veta 1.8. *Geometrická postupnosť s kvocientom q je*

a) rastúca práve vtedy, keď $a_1 > 0, q > 1$ alebo $a_1 < 0, 0 < q < 1$;

b) klesajúca práve vtedy, keď $a_1 > 0, 0 < q < 1$ alebo $a_1 < 0, q > 1$.

Veta 1.9. *Geometrická postupnosť s kvocientom q je*

a) ohraničená, práve vtedy, keď $|q| \leq 1$ alebo $a_1 = 0$;

b) ohraničená zdola, ale nie zhora, práve vtedy, keď $a_1 > 0, q > 1$;

c) ohraničená zhora, ale nie zdola, práve vtedy, keď $a_1 < 0, q > 1$;

Veta 1.10. *Ak je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická, tak pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí*

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

t.j. pre každé $n \geq 2$ je absolútna hodnota n-tého člena geometrickej postupnosti geometrickým priemerom $(n-1)$-ho a $(n+1)$-ho člena.

Poznámka 1.3. *Vo finančnej matematike sa využívajú pri úrokovaní vzorce*

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \quad K_n = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n,$$

kde p je ročná úroková miera v % pre jedno úrokovacie obdobie, n je počet úrokovacích období, K_0 je začiatočný vklad a K_n je hodnota na konci n-tého obdobia. Znamienko $+$ používame pri pripisovaní p percent a znamienko $-$ pri odpisovaní p percent z hodnoty K_0.

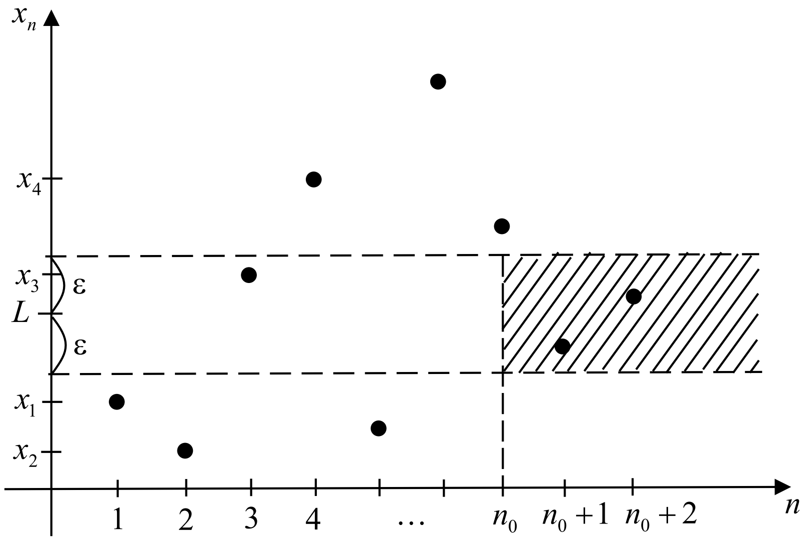
1.3 Základné vety o limitách

Nech je daná postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Ideme definovať, čo to znamená, že $L \in \mathbb{R}$ je limita postupnosti.

Definícia 1.9. *Povieme, že číslo $L \in \mathbb{R}$ je limitou postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ak platí:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \Longrightarrow \underbrace{x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)}_{|x_n - L| < \varepsilon}$$

Číslo $L \in \mathbb{R}$ zvykneme nazývať vlastnou (konečnou) limitou.



Obrázok 1.9:

Poznámka 1.4. *V definícii limity n_0 závisí od ε, t.j. n_0 je funkciou epsilonu $n_0 = n_0(\varepsilon)$.*

Poznámka 1.5. *Zmysel definície sa nezmení, ak v nej urobíme jednu alebo viac z nasledujúcich zmien:*

(1) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *zameníme za* $\exists n_0 \in \mathbb{R}$

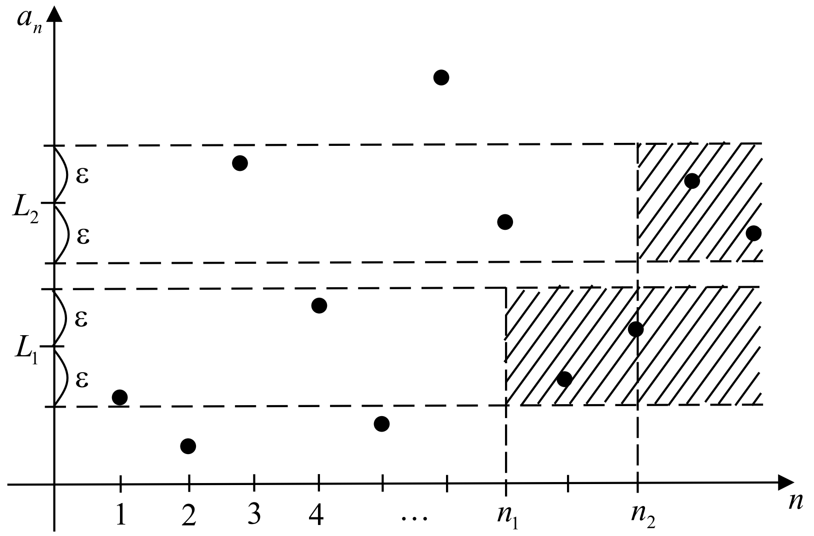
(2) $n > n_0$ *zameníme za* $n \geq n_0$

(3) $|x_n - L| < \varepsilon$ *zameníme za* $|x_n - L| \leq \varepsilon$

Veta 1.11. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel a nech $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Ak L_1 aj L_2 sú limity postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tak $L_1 = L_2$.*

Teda postupnosť má najviac jednu vlastnú (t.j. konečnú) limitu.

Dôkaz: Nepriamo.
Nech by $L_1 \neq L_2$ boli limity postupnosti $(a_n)_1^{\infty}$. Zvoľme $\varepsilon > 0$ také malé, aby sa ε-ové okolia čísel L_1, L_2 neprekrývali.
Celú situáciu si nakreslíme:



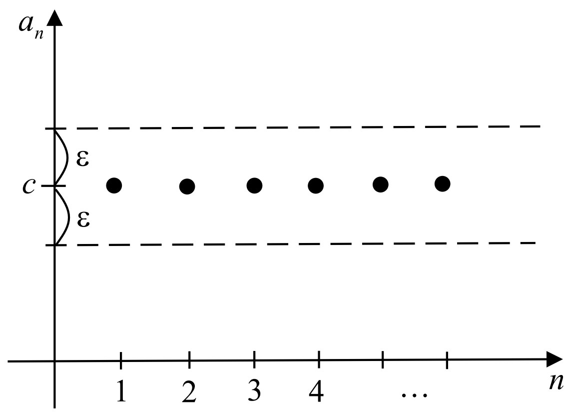
Obrázok 1.10:

Kedže L_1 je limita postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tak k tomuto $\varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_1$ $a_n \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$. Podobne kedže L_2 je tiež limita postupnosti $(a_n)_1^{\infty}$, tak k tomuto $\varepsilon > 0$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_2$ $a_n \in (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$.

Označme $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Potom pre $\forall n > n_0$ platí, že $a_n \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon) \wedge a_n \in (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon) \Rightarrow a_n \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon) \cap (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon) = \emptyset$. Teda dostali sme, že od istého indexu n prvky postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sú z prázdnej množiny, z čoho vyplýva spor s tým, že uvažovaná postupnosť má nekonečne veľa členov. □

Poznámka 1.6. *Predchádzajúca veta hovorí: Buď žiadne z čísel z množiny $\mathbb{R}$ nie je limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ alebo len jedno číslo je jej limitou. Môžme teda používať zápis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Existujú prípady, keď postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu a existujú prípady, keď uvažovaná postupnosť nemá limitu.*

Príklad 1.1. *Postupnosť $(c)_{n=1}^{\infty} = c, c, c, \ldots, c, \ldots$ má limitu rovnajúcu sa číslu $c \in \mathbb{R}$.*

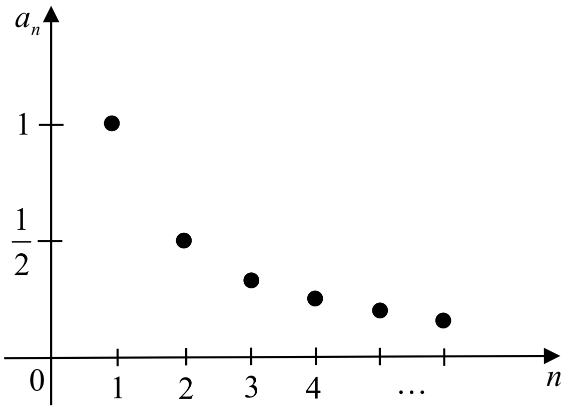


Obrázok 1.11:

Dôkaz:
Daná postupnosť nadobúda v každej hodnote $n \in \mathbb{N}$ číslo $c \in \mathbb{R}$, teda pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ môžeme zvoliť hocijaké $n_0 \geq 1$. Potom $\forall\, n > n_0$ platí

$$|a_n - c| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon. \square$$

Príklad 1.2. *Postupnosť* $\left(\frac{1}{n}\right)_1^\infty$ *má limitu rovnajúcu sa číslu* 0.



Obrázok 1.12:

Dôkaz:
Nech $\varepsilon > 0$. Chceme nájsť n_0 tak, aby $\forall n > n_0$

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n} - 0\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ n &> \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

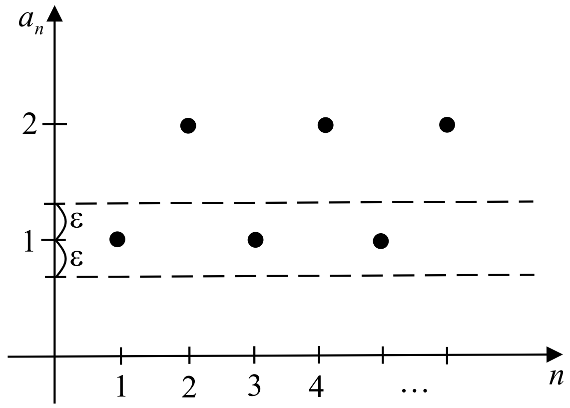
Zvoľme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Potom $\forall n > n_0$ platí

$$\begin{aligned} n &> n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \\ n &> \frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

Príklad 1.3. *Postupnosť* $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ *nemá limitu (žiadne* $L \in \mathbb{R}$ *nie je jej limitou).*

Dôkaz:
Všimnite si obr. 1.13.



Obrázok 1.13:

Číslo 1 nie je limita danej postupnosti, lebo nenájdeme také $n_0 \in \mathbb{N}$, že by všetky členy danej postupnosti boli v epsilonovom páse. Tie, čo nadobúdajú hodnotu 2, vyskakujú. Analogicky sa dá ukázať, že ani číslo 2 nie je jej limitou a ani čísla $\frac{1}{2}, 73$ nie sú jej limitami.

Nech teda $L \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že nie je jej limitou. Zvoľme $\varepsilon > 0$ tak, aby interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ neobsahoval obe čísla $1, 2$ (jedno môže, ale nie obe). Stačí, aby $2\varepsilon < 1$, potom je predchádzajúca podmienka splnená a teda nenájdeme také $n_0 \in \mathbb{N}$, aby pre $\forall\, n > n_0$ boli všetky členy postupnosti v danom epsilonovom páse. □

Veta 1.12. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, nech $L \in \mathbb{R}$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - L) = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$.

Dôkaz:

Tvrdenie (1) možno na základe definície limity postupnosti prepísať na tvar $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Podobne tvrdenie (2) možno na základe definície limity postupnosti prepísať na $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ n \in \mathbb{N}$ platí $\underbrace{|a_n - L - 0| < \varepsilon}_{|a_n - L| < \varepsilon}$

A nakoniec tvrdenie (3) možno tiež na základe definície limity postupnosti prepísať $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ n \in \mathbb{N}$ platí $\underbrace{\big||a_n - L| - 0\big| < \varepsilon}_{|a_n - L| < \varepsilon}$

Ako môžete sami vidieť, všetky tri tvrdenia sa dajú upraviť na rovnaký tvar. Teda (1) ⇔ (2) ⇔ (3). □

Dôsledok 1.1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Veta 1.13. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$

Dôkaz:

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Potom z definície limity postupnosti máme $\boxed{\forall\varepsilon > 0}$ $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}}$ $\boxed{\forall n > n_0 \;\; n \in \mathbb{N}}$ $|a_n - L| < \varepsilon$.

Avšak využitím vlastnosti absolútnej hodnoty $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ dostávame, že $\big||a_n| - |L|\big| \leq |a_n - L|$. Následne použitím nerovnosti $|a_n - L| < \varepsilon$ máme

$$\boxed{\big||a_n| - |L|\big| < \varepsilon.}$$

Orámované časti nám dávajú priamo zápis definície hľadanej limity $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.□

Poznámka 1.7. *Obrátené tvrdenie k vete 1.13 neplatí! Vezmime napríklad postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (5)_{n=1}^{\infty}$ *a číslo* $L = -5$. *Potom*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |-5| \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -5.$$

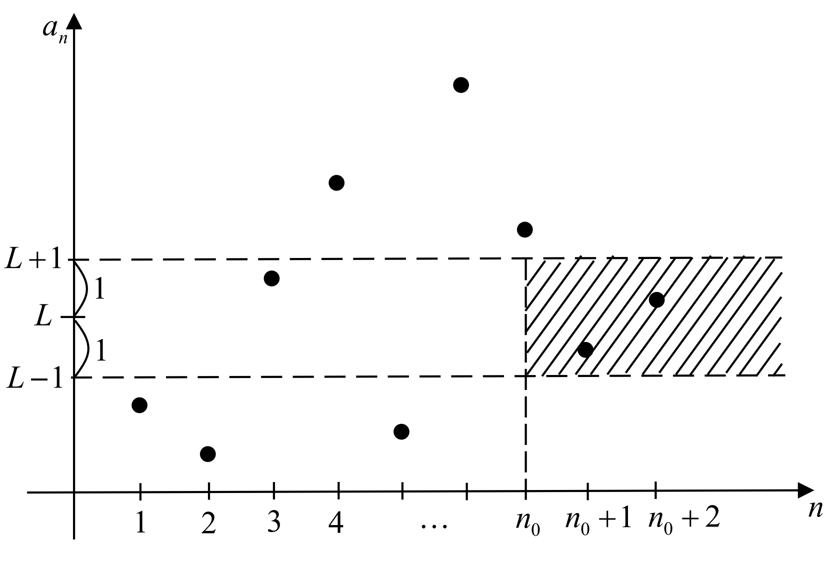
Pozor! Ak $L = 0$, *tak tvrdenie platí aj obrátene, viď dôsledok 1.1.*

Poznámka 1.8. *Ak postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu (rovnú číslu* L*), tak aj postupnosť* $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu (rovnú číslu* $|L|$*). Ale ak postupnosť* $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu, tak z toho nevyplýva, že aj postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu.*

Napríklad postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty} = -1, 1, -1, 1, \ldots$ *nemá limitu, ale postupnosť* $(|a_n|)_{n=1}^{\infty} = \big(|(-1)^n|\big)_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty} = 1, 1, 1, 1, \ldots$ *má limitu rovnú číslu 1.*

Veta 1.14. (Nutná podmienka existencie vlastnej = konečnej limity)
Ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, *potom postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená.*

Dôkaz:



Obrázok 1.14:

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Potom z definície limity postupnosti máme $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0 \;\; n \in \mathbb{N}$ $|a_n - L| < \varepsilon$.

Vezmime $\varepsilon = 1 > 0$. K tomuto zvolenému epsilonu existuje $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n > n_0 \;\; n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n - L| < 1$$

t.j.

$$L - 1 < a_n < L + 1 \text{ (pozri obr. 1.14).}$$

Definujme konštanty $k, K \in \mathbb{R}$ nasledujúcim spôsobom:

$$k = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L - 1\},$$

$$K = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L + 1\}.$$

Potom $\forall n \in \mathbb{N}$ platí, že $k \leq a_n \leq K$, teda postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. □

Poznámka 1.9. *Veta 1.14 sa nedá obrátiť, vezmime napríklad postupnosť* $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$.

Veta 1.15. (O limite súčtu postupností)
Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. *Potom aj postupnosť* $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2$.

Teda $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 + L_2$, ak obe (vlastné) limity vpravo existujú. Bez poznámky o existencii limít vpravo uvedená rovnosť nemusí mať zmysel. Vezmime napríklad tieto postupnosti:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

$$(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^{n}\right)_{n=1}^{\infty} = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Potom pre zápis

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

dostávame

$$0 = \text{neexistuje limita} + \text{neexistuje limita},$$

pretože postupnosť

$$(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty} = (0)_{n=1}^{\infty} = 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$$

má limitu rovnú číslu 0.

Dôkaz:

Skôr než začneme samotný dôkaz, urobíme rozbor toho, čo chceme dokázať.
Rozbor:
Nech teda $\varepsilon > 0$. Chceme dokázať, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n > n_0, \;\; n \in \mathbb{N}$ platí

$$|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.$$

Po úprave máme

$$|(a_n - L_1) + (b_n - L_2)| < \varepsilon.$$

Stačilo by teda, keby platilo:

$$|a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \varepsilon,$$

a k tomu by stačilo, aby

$$\begin{aligned}|a_n - L_1| &< \frac{\varepsilon}{2},\\ |b_n - L_2| &< \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Môžme teda pristúpiť k samotnému dôkazu vety:

$$\text{Nech } \boxed{\varepsilon > 0} \overset{\text{priradíme}}{\longmapsto} \frac{\varepsilon}{2} > 0 \begin{cases} \overset{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1}{\longmapsto} & \exists n_1 \in \mathbb{N} \;\; \forall n > n_1 \;\; |a_n - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \overset{\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2}{\longmapsto} & \exists n_2 \in \mathbb{N} \;\; \forall n > n_2 \;\; |b_n - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Označme $\boxed{n_0} = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $\boxed{\forall n > n_0,\;\; n \in \mathbb{N}}$ platí:

$$\begin{aligned}\boxed{|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)|} &= |(a_n - L_1) + (b_n - L_2)| \le |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \\ &\boxed{<} \;\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \boxed{\varepsilon.}\end{aligned}$$

Orámované časti nám dávajú priamo zápis definície hľadanej limity $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L_1 + L_2$. □

Veta 1.16. (O limite násobku postupnosti)
Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ *a nech* $c \in \mathbb{R}$. *Potom existuje aj limita postupnosti* $(ca_n)_{n=1}^{\infty}$ *a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cL$.

Teda znova platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ak existuje limita vpravo.

Dôkaz:
Rozoberieme dva prípady podľa hodnoty konštanty c.
1. prípad: $c = 0$
V tomto prípade postupnosť $(ca_n)_{n=1}^{\infty} = (0)_{n=1}^{\infty}$ je konštantná postupnosť, ktorej limita je 0, čo je vlastne $c \cdot L = 0 \cdot L$.

2. prípad: $c \neq 0$
Opäť skôr než začneme samotný dôkaz, urobíme rozbor toho, čo chceme dokázať.
Rozbor:
Nech teda $\varepsilon > 0$. Chceme dokázať, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n > n_0,\;\; n \in \mathbb{N}$ platí

$$|ca_n - cL| < \varepsilon.$$

Po úprave máme

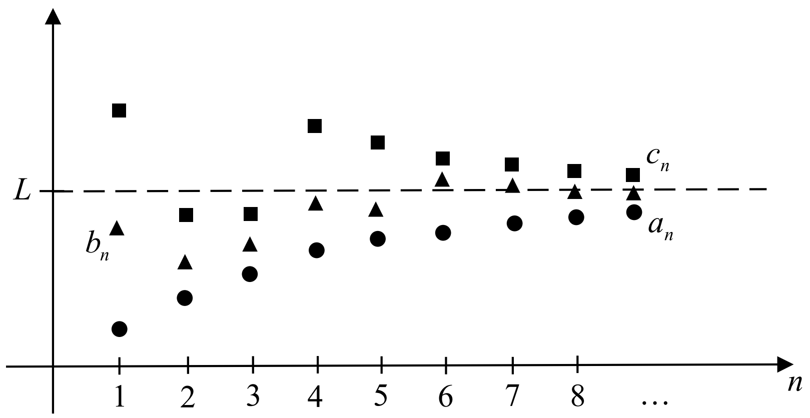
$$\begin{aligned}|c| \cdot |a_n - L| &< \varepsilon,\\ |a_n - L| &< \frac{\varepsilon}{|c|}.\end{aligned}$$

Prejdime teraz k samotnému dôkazu vety:

Nech $\boxed{\varepsilon > 0} \overset{\text{priradíme}}{\longmapsto} \dfrac{\varepsilon}{|c|} > 0 \overset{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L}{\longmapsto} \boxed{\exists n_0}\ \forall n > n_0,\ n \in \mathbb{N},\ \underbrace{|a_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}}_{\Downarrow\ \boxed{|ca_n - cL| < \varepsilon.}}$.

Orámované časti nám dávajú priamo zápis definície hľadanej limity $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cL.$ □

Veta 1.17. (O limite troch funkcií)
Nech $a_n \leq b_n \leq c_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *a nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L \in \mathbb{R}$. *Potom aj* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.



Obrázok 1.15:

Dôkaz:

$$\text{Nech } \boxed{\varepsilon > 0} \begin{cases} \overset{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L}{\longmapsto} & \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \ \forall n > n_1\ \ a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \\ \overset{\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L}{\longmapsto} & \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \ \forall n > n_2\ \ c_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \end{cases}$$

Označme $\boxed{n_0} = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $\boxed{\forall n > n_0,\ \ n \in \mathbb{N}}$ platí:

$$\underbrace{a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)\ \text{ aj }\ c_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)}$$
$$\Downarrow a_n \leq b_n \leq c_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\boxed{b_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)}$$

Orámované časti nám dávajú priamo zápis definície hľadanej limity $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L.$□

Poznámka 1.10. *Veta 1.17 sa dá zosilniť. Stačí, ak* $\exists\, n_0^*\ \ \forall\, n > n_0^*,\ n \in \mathbb{N}$

$$\min\{a_n, c_n\} \leq b_n \leq \max\{a_n, c_n\}.$$

Veta 1.18. *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *a nech postupnosť* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená. Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$

Dôkaz:

Najprv si pomocou vety 1.17, "o limite troch funkcií", ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n - 0| = 0.$$

Na to potrebujeme ohraničiť $|a_n \cdot b_n - 0|$ dvomi postupnosťami s rovnakou limitou. Využijeme pri tom vlastnosť absolútnej hodnoty a predpoklad, že postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Z toho máme pre $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \le |a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| \le K \cdot |a_n|,$$

kde K je také, že $|b_n| \le K$ pre $\forall n \in \mathbb{N}$. Dostali sme dve postupnosti $(0)_{n=1}^{\infty}$ a $(K \cdot |a_n|)_{n=1}^{\infty}$. Je zrejmé, že

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ďalej využijeme poznatok, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, potom podľa dôsledku 1.1 aj $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Z toho podľa vety 1.16 máme

$$\lim_{n\to\infty} (K \cdot |a_n|) = K \cdot 0 = 0.$$

Teda postupnosť $(|a_n \cdot b_n - 0|)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená dvomi postupnosťami, ktorých limita je rovná číslu 0. Podľa vety 1.17 z toho máme, že

$$\lim_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n - 0| = 0.$$

Nakoniec využitím vety 1.12 dostávame $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$ □

Príklad 1.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n \cdot \dfrac{\sin n}{n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\underbrace{\dfrac{1}{n}}_{\lim = 0} \cdot \underbrace{(-1)^n \cdot (\sin n)}_{ohraničená} \right) \overset{veta\, 1.18}{=} 0.$

Veta 1.19. (O limite súčinu postupností)
Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1 \in \mathbb{R}$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2 \in \mathbb{R}$*. Potom existuje aj limita postupnosti* $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ *a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$*.*

Teda $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$, ak obe (vlastné) limity vpravo existujú.

Dôkaz:
Znovu využijeme vetu 1.17, "o limite troch funkcií" a ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2| = 0.$$

Na to potrebujeme ohraničiť $|a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2|$ dvomi postupnosťami s rovnakou limitou. Využijeme pri tom vlastnosť absolútnej hodnoty. Z toho máme pre $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \le |a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2| = |a_n \cdot b_n - a_n \cdot L_2 + a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| \le |a_n| \cdot |b_n - L_2| + |L_2| \cdot |a_n - L_1|.$$

Dostali sme dve postupnosti $(0)_{n=1}^{\infty}$ a $(|a_n| \cdot |b_n - L_2| + |L_2| \cdot |a_n - L_1|)_{n=1}^{\infty}$. Je zrejmé, že

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Z predpokladov vieme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$. Z toho podľa vety 1.13 máme $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L_1|$ a teda podľa vety 1.14 je postupnosť $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ ohraničená. Skúmajme teraz $\lim_{n\to\infty} |b_n - L_2|$. Z predpokladov máme $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$, teda podľa vety 1.12 je $\lim_{n\to\infty} |b_n - L_2| = 0$. Z toho z vety 1.18 dostávame

$$\lim_{n\to\infty} (|a_n| \cdot |b_n - L_2|) = 0.$$

Teraz sa pozrime bližšie na $\lim_{n\to\infty} (|L_2| \cdot |a_n - L_1|)$. Kedže $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ podľa vety 1.12 je $\lim_{n\to\infty} |a_n - L_1| = 0$. Potom podľa vety 1.16 dostávame

$$\lim_{n\to\infty} (|L_2| \cdot |a_n - L_1|) = |L_2| \cdot 0 = 0.$$

Nakoniec z vety 1.15 máme

$$\lim_{n\to\infty} (|a_n| \cdot |b_n - L_2| + |L_2| \cdot |a_n - L_1|) = 0 + 0 = 0.$$

Teda postupnosť $(|a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2|)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená dvomi postupnosťami, ktorých limita je rovná číslu 0. Podľa vety 1.17 z toho máme, že

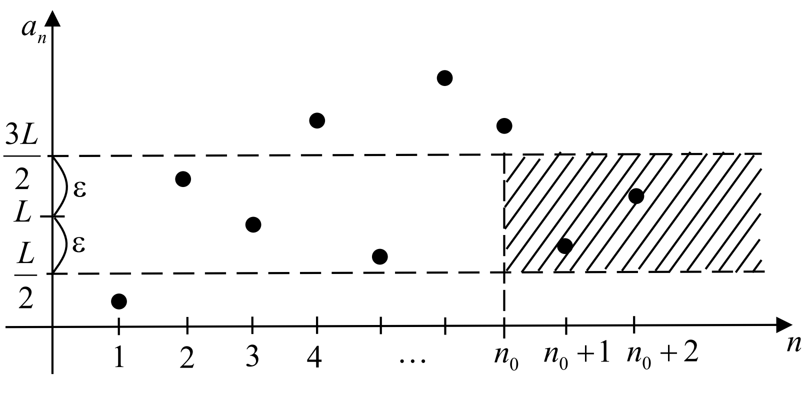
$$\lim_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2| = 0.$$

Nakoniec využitím vety 1.12 dostávame $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$. $\square$

Veta 1.20. *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$. *Potom existuje také* $n_0 \in \mathbb{N}$, *že pre* $\forall n > n_0$ $\frac{3|L|}{2} > |a_n| > \frac{|L|}{2}$.

Dôkaz:

1. prípad: $L > 0$



Obrázok 1.16:

Vezmime $\varepsilon = \frac{L}{2}$. Kedže $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, tak k tomuto epsilonu $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, že pre $\forall n > n_0$

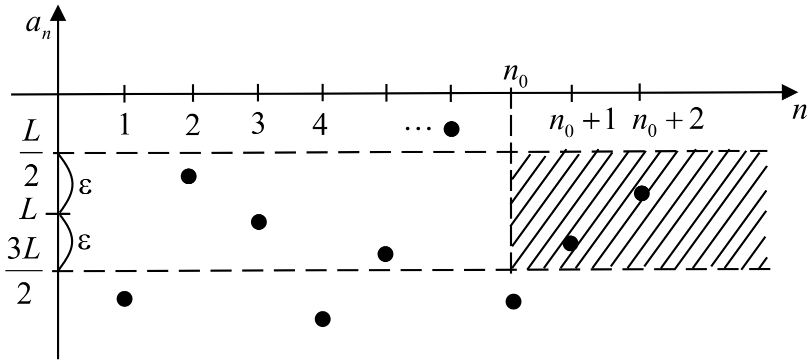
$$\underbrace{a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) = \left(\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}\right)}_{\Downarrow}$$

$$\frac{3L}{2} > a_n > \frac{L}{2}$$

Ale $L > 0$, $a_n > 0$ pre $n > n_0$, teda $|L| = L$ a $|a_n| = a_n$. Potom po dosadení z toho máme

$$\frac{3|L|}{2} > |a_n| > \frac{|L|}{2}.$$

2. prípad: $L < 0$



Obrázok 1.17:

Vezmime $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2}$. Kedže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, tak k tomuto epsilonu $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, že pre $\forall n > n_0$

$$\underbrace{a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) = \left(\frac{3L}{2}, \frac{L}{2}\right)}_{\Downarrow}$$

$$\frac{3L}{2} < a_n < \frac{L}{2}$$

$$-\frac{3L}{2} > -a_n > -\frac{L}{2}$$

Ale $L < 0$, $a_n < 0$ pre $n > n_0$, teda $|L| = -L$ a $|a_n| = -a_n$. Potom po dosadení z toho máme

$$\frac{3|L|}{2} > |a_n| > \frac{|L|}{2}. \ \square$$

Veta 1.21. *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$. *Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{L}$.

Dôkaz:

Využijeme vetu 1.17, "o limite troch funkcií" a ukážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = 0.$$

Na to potrebujeme ohraničiť $\left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{L}\right|$ dvomi postupnosťami s rovnakou limitou. Využijeme pri tom vlastnosť absolútnej hodnoty. Z toho máme

$$0 \leq \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L - a_n}{a_n \cdot L}\right| = \frac{|a_n - L|}{|a_n| \cdot |L|}.$$

Kedže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$, tak z vety 1.20 platí, že $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, že pre $\forall n > n_0$ $|a_n| > \dfrac{|L|}{2}$ t.j. $\dfrac{1}{|a_n|} < \dfrac{2}{|L|}$.

Teda $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n > n_0$

$$0 \leq \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L - a_n}{a_n \cdot L}\right| = \frac{|a_n - L|}{|a_n| \cdot |L|} < \frac{2}{(|L|)^2}|a_n - L|.$$

Dostali sme dve postupnosti $(0)_{n=1}^{\infty}$ a $\left(\dfrac{2}{(|L|)^2}|a_n - L|\right)_{n=1}^{\infty}$. Je zrejmé, že

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Teraz sa pozrime bližšie na $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{(|L|)^2}|a_n - L|\right)$. Kedže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ podľa vety 1.12 je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$. Potom podľa vety 1.16 dostávame

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{(|L|)^2}|a_n - L|\right) = \frac{2}{(|L|)^2} \cdot 0 = 0.$$

Teda postupnosť $\left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{L}\right|$ je od istého n_0 ohraničená dvomi postupnosťami, ktorých limita je rovná číslu 0. Podľa silnej verzie vety 1.17 z toho máme, že

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = 0.$$

Nakoniec využitím vety 1.12 dostávame $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{L}$. $\square$

Veta 1.22. (O limite podielu)

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2 \neq 0$. *Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Teda $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, ak limity vpravo existujú.

Dôkaz:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2 \neq 0 \overset{\text{veta 1.21}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{L_2} \end{array}\right\} \overset{\text{veta 1.19}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = L_1 \cdot \frac{1}{L_2}. \ \square$$

Veta 1.23. *Nech* $a > 0$. *Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$.

Dôkaz:
Pozri riešenie príkladu 1.18 na strane 54.

Veta 1.24. *Nech* $a > 0$. *Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Veta 1.25.

(1) ak $|a| < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$;

(2) ak $a = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$;

(3) ak $a = -1 \Longrightarrow$ *neexistuje* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$;

(4) ak $|a| > 1 \Longrightarrow$ *neexistuje (vlastná)* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n \in \mathbb{R}$.

Veta 1.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Veta 1.27. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = L^k$.

Dôkaz:
Pozri riešenie príkladu 1.24 na strane 59.

Veta 1.28. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{L}$.

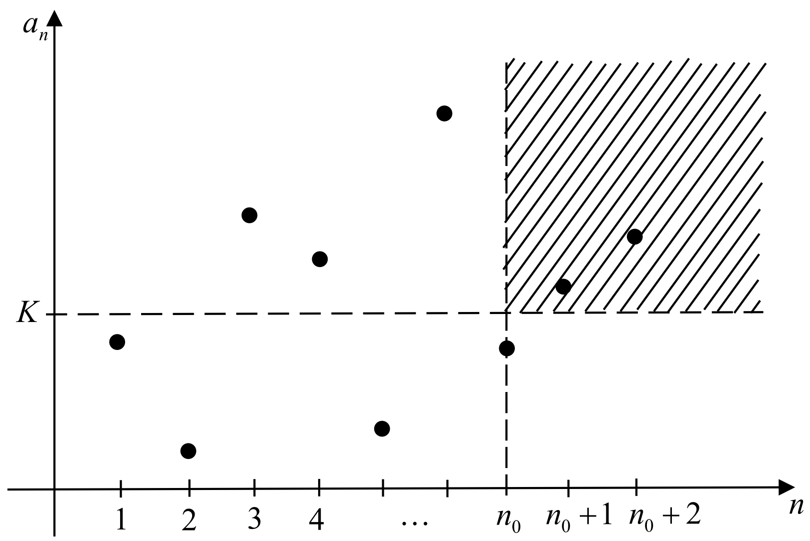
Veta 1.29. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > 0$, $q \in \mathbb{Q}$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = L^q$.

Veta 1.30. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, *tak* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0$.

Dôkaz:
Pozri riešenie príkladu 1.25 na strane 59.

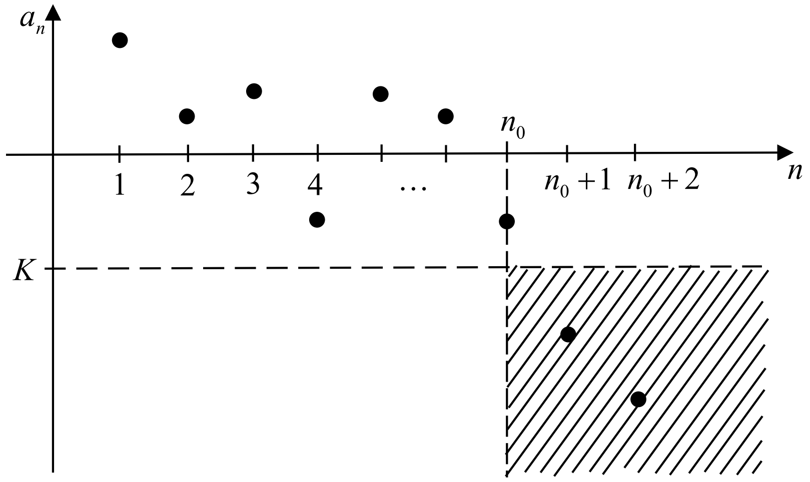
Veta 1.31. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \geq 0$, $q \in \mathbb{Q}^+$, *tak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = 0$.

Definícia 1.10. *Povieme, že* $+\infty$ *je limitou postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *ak* $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *také, že* $\forall n > n_0$ *platí:* $a_n > K$.



Obrázok 1.18:

Definícia 1.11. *Povieme, že* $-\infty$ *je limitou postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *ak* $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *také, že* $\forall n > n_0$ *platí:* $a_n < K$.



Obrázok 1.19:

Poznámka 1.11. *Zmysel týchto definícií sa nezmení, ak*

$$n_0 \in \mathbb{N} \;\; \textit{nahradíme} \;\; n_0 \in \mathbb{R},$$
$$a_n > K \;\; \textit{nahradíme} \;\; a_n \geq K,$$
$$a_n < K \;\; \textit{nahradíme} \;\; a_n \leq K.$$

Pri $+\infty$ *navyše stačí* $\forall K > 0$ *resp.* $\forall K >$ *konštanta. Pri* $-\infty$ *stačí* $\forall K <$ *konštanta.*

Poznámka 1.12. *Limity* $\pm\infty$ *sa nazývajú nevlastné (nekonečné) limity.*

Veta 1.32. *Ak* $a > 0$ *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = +\infty$.

Dôkaz:
Skôr, než začneme samotný dôkaz, urobíme rozbor toho, čo chceme dokázať.
Rozbor:
Nech $K > 0$. Chceme ukázať, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n > n_0$ platí:

$$n^a > K.$$

Po úprave dostávame

$$n > K^{\frac{1}{a}}.$$

Môžme teda pristúpiť k samotnému dôkazu vety:
Nech $\boxed{K > 0.}$ Zvoľme $\boxed{n_0} \in \mathbb{N}$ hocijaké, ale také, aby $n_0 \geq K^{\frac{1}{a}}$. Potom $\forall n > n_0$ platí:

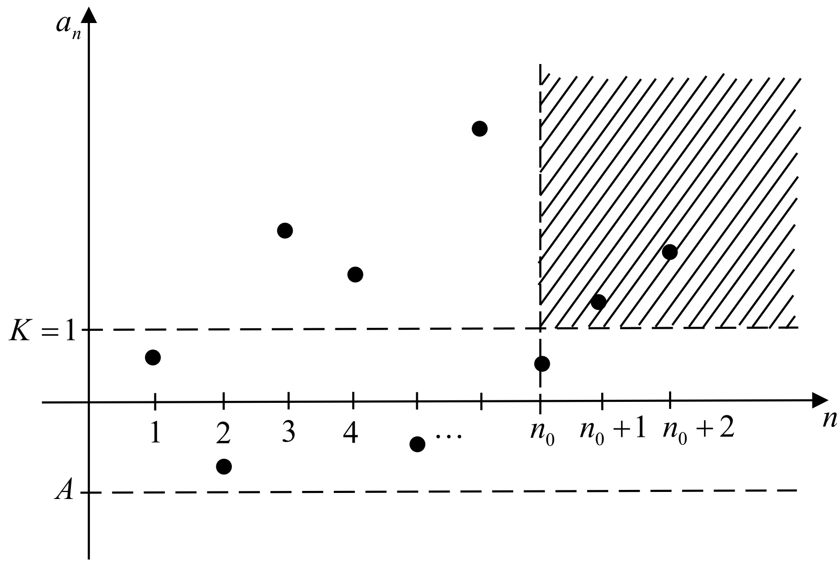
$$\begin{aligned} n &> n_0 \geq K^{\frac{1}{a}} \\ n &> K^{\frac{1}{a}} \quad |^a \end{aligned}$$
$$\boxed{n^a > K.}$$

Orámované časti nám dávajú priamo zápis definície hľadanej limity $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = +\infty$.□

Lema 1.1. *Ak postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* $+\infty$*, potom* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená zdola, ale nie zhora. Ak postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* $-\infty$*, potom* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená zhora, ale nie zdola.*

Dôkaz:

Pre $\boxed{+\infty:}$ Zvoľme $K = 1 \overset{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty}{\longmapsto} \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \;\; a_n > 1.$

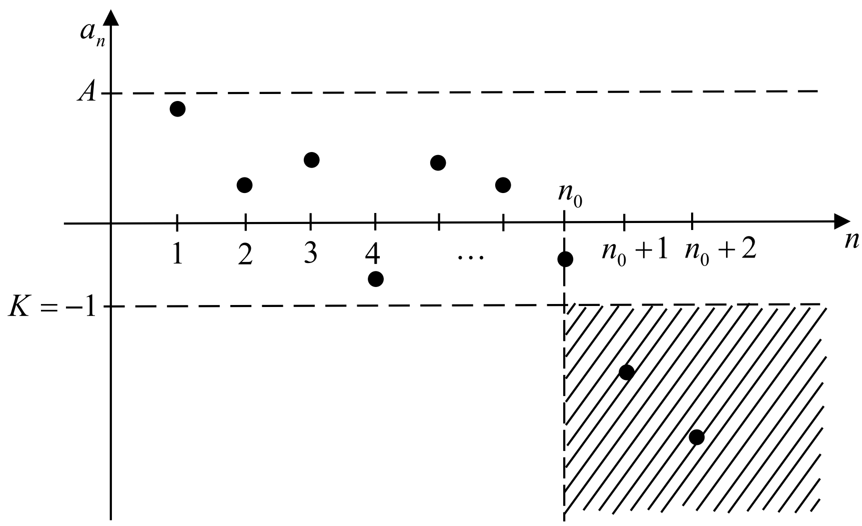


Obrázok 1.20:

Vezmime $A := \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, 1\}$. Potom $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \geq A$, teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola.

Prečo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zhora? Lebo $\forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n > n_0 \;\; a_n > K$. Teda $\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n \quad a_n > K$.

Pre $\boxed{-\infty:}$ Zvoľme $K = -1 \overset{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty}{\longmapsto} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \;\; a_n < -1$.



Obrázok 1.21:

Vezmime $A := \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, -1\}$. Potom $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq A$, teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora.

Prečo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zdola? Lebo $\forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n > n_0 \;\; a_n < K$. Teda $\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n \quad a_n < K$. $\square$

Veta 1.33. *Pre každú číselnú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nastane práve jedna z nasledujúcich 4 možností:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *je vlastná ...... postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *konverguje;*

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *...... postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *diverguje do* $+\infty$*;*

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *...... postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *diverguje do* $-\infty$*;*

(4) neexistuje vlastná ani nevlastná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *...... postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *osciluje.*

V prípadoch (2), (3) a (4) hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *diverguje.*

Vďaka tejto vete môžeme používať symbol $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Dôkaz:

1. Ukážeme, že nastane $\boxed{\text{aspoň jedna}}$ zo 4-och možností.
Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť. Potom nastane niektorá z možností (1), (2), (3) alebo žiadna z nich, teda nastane $(4) \equiv \neg\big((1) \vee (2) \vee (3)\big)$.

2. Navyše nastane $\boxed{\text{najviac jedna}}$ zo 4-och možností, lebo každé dve sa vylučujú, t.j. nemôžu nastať súčasne. Možnosť (4) sa vylučuje s každou z (1), (2) a (3). Ešte treba dokázať, že možnosti (1), (2) a (3) sa vzájomne vylučujú.

Z (1) $\Longrightarrow$ postupnosť$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
Z (2) $\Longrightarrow$ postupnosť$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zhora nie je ohraničená, zdola je.
Z (3) $\Longrightarrow$ postupnosť$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zhora je ohraničená, zdola nie je. $\square$

Veta 1.34. *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$*. Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

<u>Špeciálne</u>:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Dôkaz:
Pozri riešenie príkladu 1.26 na strane 60.

Veta 1.35. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *a postupnosť* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je zdola ohraničená, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$*.*

Veta 1.36. *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, nech* $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$*, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$*.*

Dôkaz:
Pozri riešenie príkladu 1.27 na strane 61.

Veta 1.37. *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, nech* $\exists\, b > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad b_n \geq b > 0$*, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$*.*

Poznámka 1.13. *V nasledujúcich tabuľkách uvedieme ďalšie varianty viet o limitách.*

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	b_n	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
$+\infty$	ohraničená zdola	$+\infty$
$-\infty$	ohraničená zhora	$-\infty$

Tabuľka 1.1:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	a_n	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$
0	kladné	$+\infty$
0	záporné	$-\infty$

Tabuľka 1.2:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	b_n	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$
$+\infty$	ohraničená zdola kladným číslom	$+\infty$
$+\infty$	ohraničená zhora záporným číslom	$-\infty$
$-\infty$	ohraničená zhora záporným číslom	$+\infty$
$-\infty$	ohraničená zdola kladným číslom	$-\infty$

Tabuľka 1.3:

Poznámka 1.14. (O skrátených zápisoch viet o limitách)
V predchádzajúcom texte sme mali uvedenú nasledujúcu vetu:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ (b_n)_{n=1}^{\infty} \textit{zdola ohraničená} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

Túto možno skrátene zapísať:

$$(+\infty) + (\textit{zdola ohraničená}) = +\infty$$

Ďalšie skrátené zápisy:
$(+\infty) + c = +\infty,\ c \in \mathbb{R};\ (-\infty) + c = -\infty,\ c \in \mathbb{R};$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty;\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty;$
$(+\infty) - c = c - (-\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty,\ c \in \mathbb{R};$
$(-\infty) - c = c - (+\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty,\ c \in \mathbb{R};$
$(+\infty) \cdot c = c \cdot (+\infty) = +\infty,\ c > 0;$
$(+\infty) \cdot c = c \cdot (+\infty) = -\infty,\ c < 0;$
$(-\infty) \cdot c = c \cdot (-\infty) = -\infty,\ c > 0;$
$(-\infty) \cdot c = c \cdot (-\infty) = +\infty,\ c < 0;$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;$
$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty;$
$\dfrac{+\infty}{c} = +\infty,\ \dfrac{-\infty}{c} = -\infty,\ c > 0;$

$\dfrac{+\infty}{c} = -\infty$, $\dfrac{-\infty}{c} = +\infty$, $c < 0$;
$\dfrac{c}{+\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$, $c \in \mathbb{R}$;
$c^{+\infty} = +\infty$, $c^{-\infty} = 0$, $c > 1$;
$c^{+\infty} = 0$, $c^{-\infty} = +\infty$, $0 < c < 1$;
$(+\infty)^c = +\infty$, $c > 0$;
$(+\infty)^c = 0$, $c < 0$;
$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$, $(+\infty)^{-\infty} = 0$;
$\dfrac{1}{0^+} = +\infty$, $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$.

Avšak pozor! Symbol $+\infty$ nie je reálne číslo (rovnako ani $-\infty$) a nemožno s ním počítať ako s reálnym číslom. Teda vyššie uvedené zápisy nie sú aritmetické rovnosti, ale sú to len skrátené zápisy viet o nevlastných a vlastných limitách!

Poznámka 1.15. (Prehľad tzv. neurčitých výrazov)
Medzi neurčité výrazy patria:
Limita súčtu: $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$
Limita rozdielu: $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$
Limita súčinu: $(+\infty) \cdot 0$, $(-\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$
Limita podielu: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, $\dfrac{-\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$
Limita mocniny: $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, 0^0, $(+\infty)^0$

Pri týchto limitách nemáme jednoznačné pravidlo na určenie výslednej hodnoty limity. Napr.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \text{hocijaké číslo } c \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \nexists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \end{cases}$$

Musíme ju zistiť iným spôsobom. Napríklad vhodnými úpravami previesť výraz, z ktorého počítame limitu, na tvar, pri ktorom už vieme použiť známe vety o limitách.

Veta 1.38. *Pre každé $a \in \mathbb{R}$ platí:* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{n!} = 0$.

Veta 1.39. *Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$.

V nasledujúcej vete budeme potrebovať dohovor o usporiadaní.
Rozšírená reálna os:

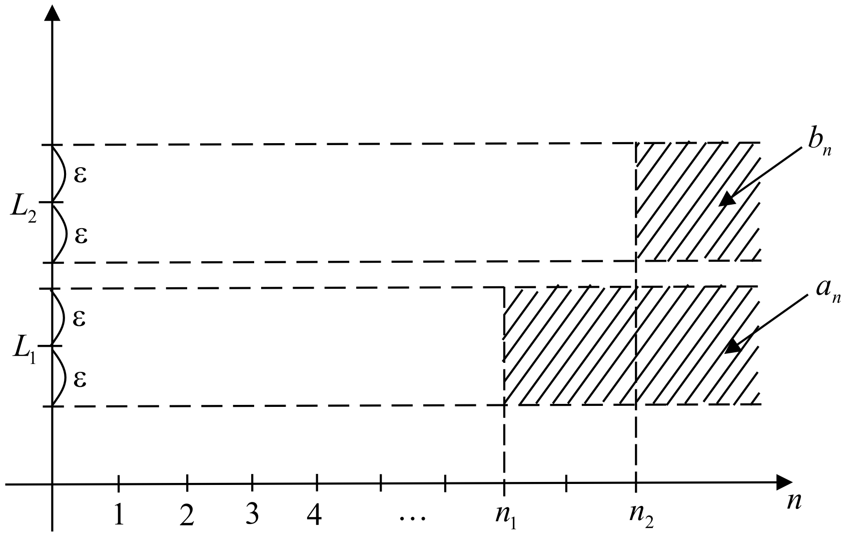
$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Usporiadanie na $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} c, d \in \mathbb{R} &\implies c < d \text{ ako v } \mathbb{R} \\ c \in \mathbb{R} &\implies -\infty < c, c < +\infty \implies -\infty < +\infty \end{aligned}$$

Veta 1.40. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *potom* $\exists\, n_0\ \forall\, n > n_0\ \ a_n < b_n$.

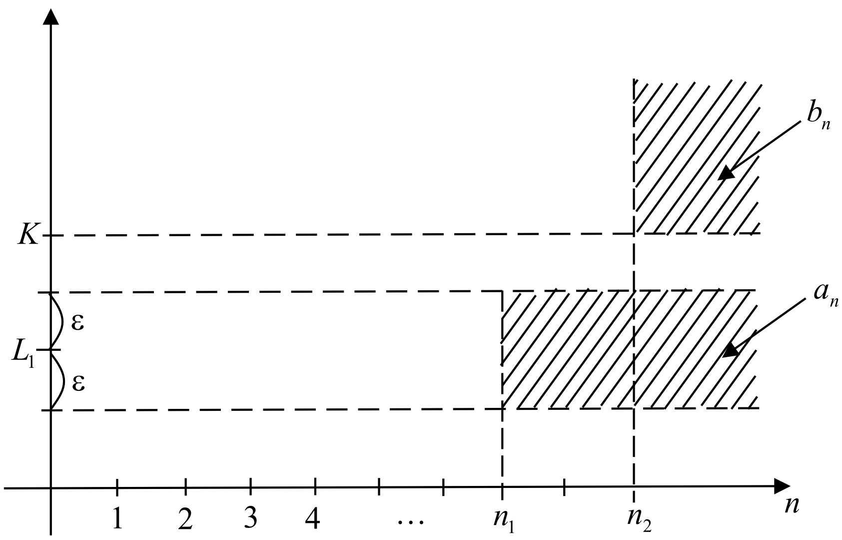
Dôkaz:
<u>1. prípad:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2 \in \mathbb{R}$, $L_1 < L_2$.
Vezmime také $\varepsilon > 0$, aby sa ε-ové okolia bodov L_1 a L_2 neprekrývali, t.j. $\varepsilon < \dfrac{L_2 - L_1}{2}$, viď obr.1.22.



Obrázok 1.22:

Z definície limity máme, že $\exists\, n_1\ \forall\, n > n_1\ \ a_n \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$ a zároveň $\exists\, n_2\ \forall\, n > n_2\ \ b_n \in (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$. Vezmime teraz $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $\forall\, n > n_0$ platí $a_n < b_n$.

<u>2. prípad:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
Vezmime $\varepsilon > 0$ a $K \in \mathbb{R}$ tak, aby $K > L_1 + \varepsilon$, viď obr.1.23.

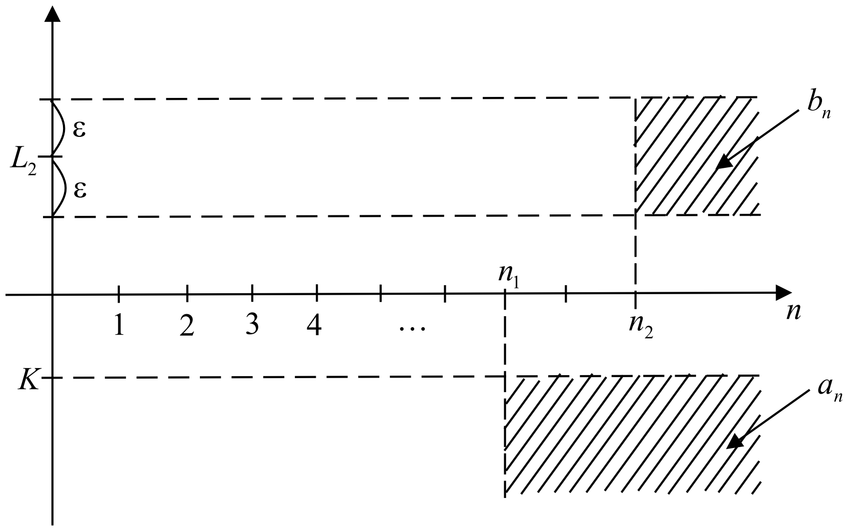


Obrázok 1.23:

Z definície limity máme, že $\exists\, n_1\ \forall\, n > n_1\ \ a_n \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$ a zároveň $\exists\, n_2$

$\forall\, n > n_2 \;\; b_n > K$. Vezmime teraz $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $\forall\, n > n_0$ platí $a_n < b_n$.

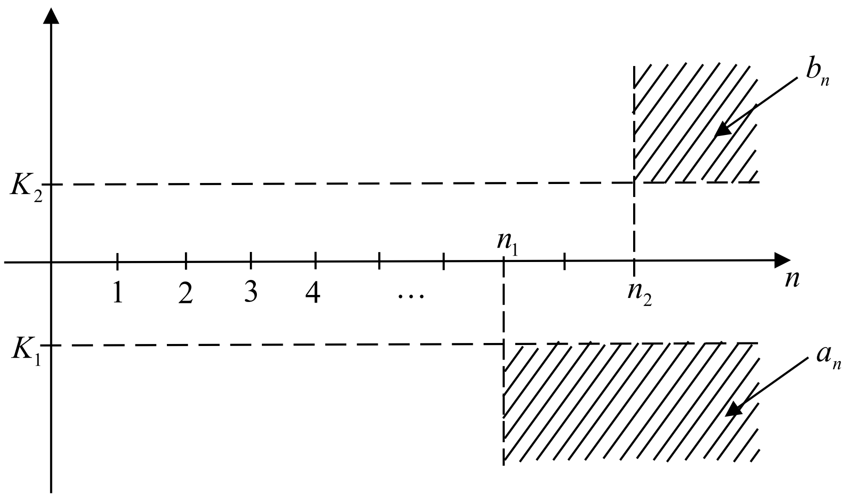
3. prípad: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2 \in \mathbb{R}$.
Vezmime $K \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ tak, aby $K < L_2 - \varepsilon$, viď obr.1.24.



Obrázok 1.24:

Z definície limity máme, že $\exists\, n_1 \; \forall\, n > n_1 \;\; a_n < K$ a zároveň $\exists\, n_2 \; \forall\, n > n_2$ $b_n \in (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$. Vezmime teraz $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $\forall\, n > n_0$ platí $a_n < b_n$.

4. prípad: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
Vezmime $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tak, aby $K_1 < K_2$, viď obr.1.25.



Obrázok 1.25:

Z definície limity máme, že $\exists\, n_1 \; \forall\, n > n_1 \;\; a_n < K_1$ a zároveň $\exists\, n_2 \; \forall\, n > n_2$ $b_n > K_2$. Vezmime teraz $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $\forall\, n > n_0$ platí $a_n < b_n$. $\square$

Poznámka 1.16.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n \not\Rightarrow \exists\, n_0\ \forall\, n > n_0\ \ a_n \leq b_n$;

(2) Veta sa nedá obrátiť! T.j. $\forall\, n\ \ a_n < b_n \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *napr.*

$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_1^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{2}{n}\right)_1^{\infty}$.

Avšak platí: $\forall\, n\ \ a_n < b_n \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Veta 1.41. *Ak existujú vlastné limity* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *a ak platí* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ a_n \leq b_n$, *potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Dôkaz:

Keby $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, potom podľa vety 1.40 $\exists\, n_0\ \forall\, n > n_0\ \ a_n > b_n$. Čo je spor s predpokladom, že $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ a_n \leq b_n$. Teda platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n. \ \square$$

Skúsme teraz zjednotiť definície limít postupnosti (vlastnej a nevlastných) do jednej. Na to potrebujeme definovať okolie bodu.

Definícia 1.12. *Okolím bodu* $c \in \mathbb{R}$ *nazveme každý interval tvaru* $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, *kde* $\varepsilon > 0$. *Okolím bodu* $-\infty$ *nazveme každý interval tvaru* $(-\infty, d)$, $d \in \mathbb{R}$. *Okolím bodu* $+\infty$ *nazveme každý interval tvaru* $(d, +\infty)$, $d \in \mathbb{R}$. *Ak* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *okolie bodu* a *značíme* $O(a)$, $U(a)$.

Definícia 1.13. *Nech* $(a_n)_1^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel. Povieme, že* $L \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *je limitou postupnosti, ak* $\forall\, O(a)\ \ \exists\, O(+\infty)\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n \in O(+\infty)$ *platí* $a_n \in O(a)$.

Teda:
$\forall\, O(a)\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n > n_0 \Longrightarrow a_n \in O(a)$

$\boxed{a \in \mathbb{R}}$ $\ldots \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n > n_0 \Longrightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
$\boxed{a = +\infty}$ $\ldots \forall\, K \in \mathbb{R}\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n > n_0 \Longrightarrow a_n > K$
$\boxed{a = -\infty}$ $\ldots \forall\, K \in \mathbb{R}\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n > n_0 \Longrightarrow a_n < K$

Lema 1.2. *Ak* $L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $L_1 \neq L_2$, *tak potom existujú okolia* $O(L_1)$, $O(L_2)$ *také, že*

$$O(L_1) \cap O(L_2) = \emptyset.$$

Dokonca ak $L_1 < L_2$, dajú sa $O(L_1)$, $O(L_2)$ zvoliť tak, že $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ x \in O(L_1)$, $y \in O(L_2) \Longrightarrow x < y$.

Veta 1.42. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Longrightarrow \exists\, n_0\ \forall\, n > n_0\ \ a_n < b_n$

Dôkaz:

Označme $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $L_2 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Keďže $L_1 < L_2$, tak podľa lemy 1.2 existujú okolia $O(L_1)$, $O(L_2)$, také, že $O(L_1) \cap O(L_2) = \emptyset$, t.j. sa neprekrývajú. Z definície 1.13 dostávame:

K okoliu $O(L_1)$ $\ \exists\, n_1\ \forall\, n > n_1\ \ a_n \in O(L_1)$ a k okoliu $O(L_2)$ $\ \exists\, n_2\ \forall\, n > n_2\ \ b_n \in O(L_2)$. Vezmime $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, potom $\forall\, n > n_0$ platí $a_n < b_n$. $\square$

1.4 Základné pojmy z topológie číselnej osi

Definícia 1.14. *Nech $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Povieme, že*

(1) x je horné ohraničenie množiny A, ak $\forall\, a \in A \;\; a \leq x$;

(2) x je dolné ohraničenie množiny A, ak $\forall\, a \in A \;\; a \geq x$.

Označenie:
$A^{\uparrow}$ = množina všetkých horných ohraničení množiny A
$A^{\downarrow}$ = množina všetkých dolných ohraničení množiny A

Definícia 1.15.

(1) $A \subset \mathbb{R}$ je zhora ohraničená, ak $A^{\uparrow} \neq \emptyset$

(2) $A \subset \mathbb{R}$ je zdola ohraničená, ak $A^{\downarrow} \neq \emptyset$

(3) $A \subset \mathbb{R}$ je ohraničená, ak je ohraničená zhora aj zdola

Veta 1.43. *Nech $A \subset \mathbb{R}$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(1) A je ohraničená, t.j. $\exists\, k \in \mathbb{R} \;\; \exists\, K \in \mathbb{R} \;\; \forall\, a \in A \;\; k \leq a \leq K$;

(2) $\exists\, d \in \mathbb{R} \;\; \forall\, a \in A \;\; |a| \leq d$.

Dôkaz:
$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Najprv ukážeme, že z tvrdenia (1) vyplýva tvrdenie (2). Nech A je ohraničená, t.j. $\exists\, k \in \mathbb{R} \;\exists\, K \in \mathbb{R} \;\forall\, a \in A$ $\boxed{k \leq a \leq K.}$ Vezmime $d = \max\{|k|, |K|\}$. Nech napr. $|k| \leq |K|$, potom stačí zobrať $\boxed{d = |K|.}$ Z toho máme, že $\boxed{-d \leq k,}$ lebo $|k| \leq |K| = d$. Z orámovaných častí dostávame

$$-d \leq k \leq a \leq K \leq |K| = d$$
$$-d \leq a \leq d$$
$$|a| \leq d$$

Teda dostali sme tvrdenie (2).
$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Nech $\exists\, d \in \mathbb{R} \;\; \forall\, a \in A \;\; |a| \leq d$. Potom $\forall\, a \in A$

$$-d \leq a \leq d.$$

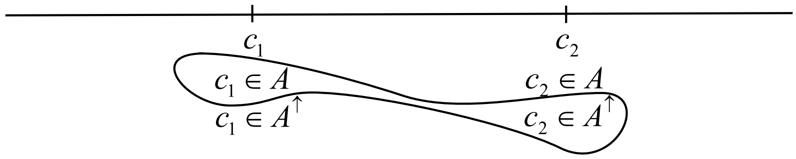
Teda A je ohraničená, lebo $\exists\, k = -d \in \mathbb{R} \;\; \exists\, K = d \in \mathbb{R} \;\; \forall\, a \in A \;\; k \leq a \leq K$. Čo je vlastne tvrdenie (1). □

Definícia 1.16. *Povieme, že x je najväčší prvok množiny A (x je maximum množiny A, označ. $x = \max A$), ak $x \in A$ a zároveň $x \in A^{\uparrow}$.*
Povieme, že x je najmenší prvok množiny A (x je minimum množiny A, označ. $x = \min A$), ak $x \in A$ a zároveň $x \in A^{\downarrow}$.

Veta 1.44. *Množina má najviac jedno maximum. Množina má najviac jedno minimum.*

Dôkaz:

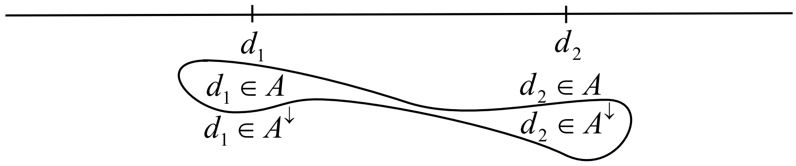
Nepriamo. Nech $A \subset \mathbb{R}$ a nech A má dve maximá alebo viac. Označme $c_1 = \max A$, $c_2 = \max A$, $c_1 < c_2$. Keďže c_1, c_2 sú maximá, z definície 1.16 máme $c_1 \in A, c_1 \in A^{\uparrow}$ a $c_2 \in A, c_2 \in A^{\uparrow}$. Všimnime si nasledujúci obrázok.



Obrázok 1.26:

Zakrúžkované tvrdenia v obrázku nám dávajú nerovnosť $\boxed{c_1 \le c_2.}$ Podobne z ostávajúcich dvoch tvrdení nakríž vyplýva, že $\boxed{c_1 \ge c_2.}$ Orámované časti nám dávajú $c_1 = c_2$.

Nech $A \subset \mathbb{R}$ a nech A má dve minimá alebo viac. Označme $d_1 = \min A$, $d_2 = \min A$, $d_1 < d_2$. Keďže d_1, d_2 sú minimá, z definície 1.16 máme $d_1 \in A, d_1 \in A^{\downarrow}$ a $d_2 \in A, d_2 \in A^{\downarrow}$. Všimnime si nasledujúci obrázok.



Obrázok 1.27:

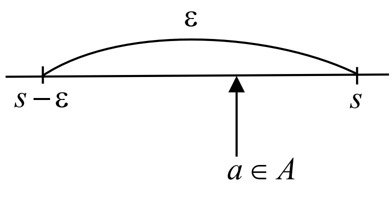
Zakrúžkované tvrdenia v obrázku nám dávajú nerovnosť $\boxed{d_2 \le d_1.}$ Podobne z ostávajúcich dvoch tvrdení nakríž vyplýva, že $\boxed{d_1 \le d_2.}$ Orámované časti nám dávajú $d_1 = d_2$. $\square$

Definícia 1.17. *Najmenšie spomedzi horných ohraničení množiny A sa volá supremum množiny A (označujeme* $\sup A$*).*

Teda $\sup A := \min A^{\uparrow}$.

$$s = \sup A \iff \begin{cases} (1)\ \forall a \in A \quad a \le s \ \wedge \\ (2)\ \forall t \in \mathbb{R} \quad t < s \implies \exists a \in A \quad t < a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1)\ \forall a \in A \quad a \le s \ \wedge \\ (2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A \quad a > s - \varepsilon \end{cases}$$



Obrázok 1.28:

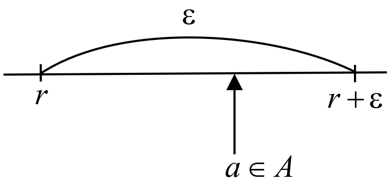
Bod (1) sa nazýva 1. vlastnosť suprema a bod (2) sa nazýva 2. vlastnosť suprema.

Definícia 1.18. *Najväčšie spomedzi dolných ohraničení množiny A sa volá infimum množiny A (označujeme* $\inf A$*).*

Teda $\inf A := \max A^{\downarrow}$.

$$r = \inf A \iff \begin{cases} (1)\ \forall a \in A \quad a \geq r \quad \wedge \\ (2)\ \forall p \in \mathbb{R} \quad p > r \implies \exists a \in A \quad a < p \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1)\ \forall a \in A \quad a \geq r \quad \wedge \\ (2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A \quad a < r + \varepsilon \end{cases}$$



Obrázok 1.29:

Bod (1) sa nazýva 1. vlastnosť infima a bod (2) sa nazýva 2. vlastnosť infima.

Príklad 1.5. *Určte supremum a infimum množiny* $A = (0, 1)$.

<u>Riešenie:</u>
$1 = \min A^{\uparrow} \implies 1 = \sup A$;
$0 = \max A^{\downarrow} \implies 0 = \inf A$.

Veta 1.45.

(1) $x = \max A \implies x = \sup A$*;*

(2) $x = \min A \implies x = \inf A$.

Pozor! Veta sa nedá obrátiť.

Otázka: Ktoré množiny majú supremum?
$A = \emptyset$ .... $A^{\uparrow} = \mathbb{R} \implies \nexists \min A^{\uparrow} \implies \nexists \sup A$
A je zhora neohraničená .... $A^{\uparrow} = \emptyset \implies \nexists \min A^{\uparrow} \implies \nexists \sup A$
$A = \emptyset \wedge A$ je zhora ohraničená .... ?

Veta 1.46. (O supreme)
Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má práve jedno supremum.

Otázka: Ktoré množiny majú infimum?
$A = \emptyset$ .... $A^{\downarrow} = \mathbb{R} \implies \nexists \max A^{\downarrow} \implies \nexists \inf A$
A je zdola neohraničená .... $A^{\downarrow} = \emptyset \implies \nexists \max A^{\downarrow} \implies \nexists \inf A$
$A = \emptyset \wedge A$ je zdola ohraničená .... ?

Veta 1.47. (O infime)
Každá neprázdna zdola ohraničená množina reálnych čísel má práve jedno infimum.

1.5 Limity monotónnych postupností

Už sme mali, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ môže mať limitu ale aj nemusí mať limitu. Ale ak postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotónna, tak má limitu.

Veta 1.48. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť, potom*

(1) ak $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená, tak má vlastnú limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\};$$

(2) ak $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie je zhora ohraničená, tak

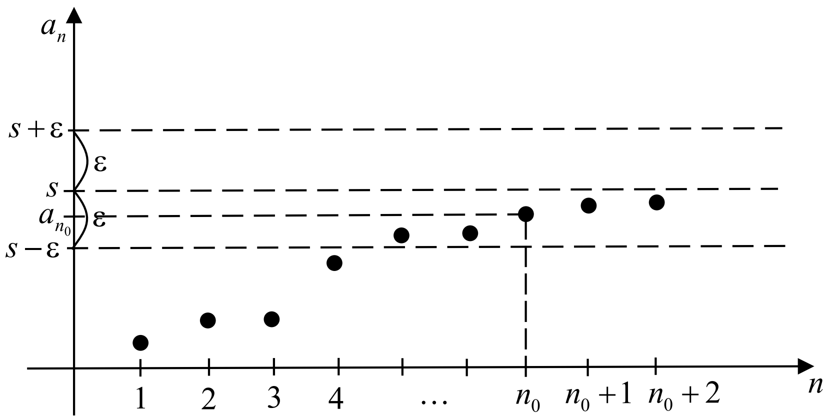
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Dôkaz:

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca. Ukážeme najprv, že platí tvrdenie (1). Keďže $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora, tak $\exists\, K\ \forall n\ \ a_n \le K$. Teda množina $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ je neprázdna a zhora ohraničená. Na základe vety 1.46 z toho vyplýva, že

$$\exists \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \overset{\text{označ.}}{=} s.$$

Ďalej ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.



Obrázok 1.30:

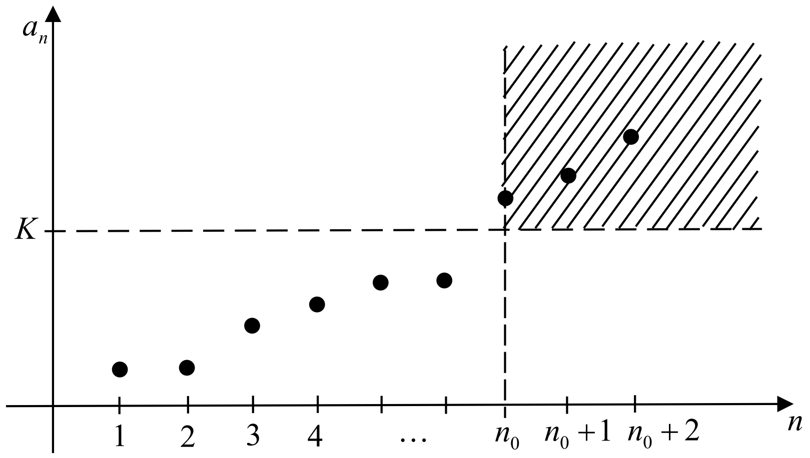
Nech $\boxed{\varepsilon > 0.}$ Keďže $s - \varepsilon < s = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, podľa 2. vlastnosti supréma musí $\boxed{\exists\, n_0}$ $\ s - \varepsilon < a_{n_0} \le s$ (pozri obr.1.30). Ďalej vieme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, teda $\forall\, n > n_0$ platí $a_{n_0} \le a_n \le s$. Použitím predchádzajúcej nerovnosti dostávame $\boxed{\forall\, n > n_0}$

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le s,$$

$$\boxed{a_n \in (s - \varepsilon, s\rangle \subset (s - \varepsilon, s + \varepsilon).}$$

Orámované časti nám dávajú priamo, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

Teraz ukážeme, že platí tvrdenie (2). Nech $\boxed{K \in \mathbb{R}.}$ Keďže K nie je horné ohraničenie, potom $\boxed{\exists\, n_0}$ také že $a_{n_0} > K$.



Obrázok 1.31:

Ale $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca. Teda $\boxed{\forall n > n_0}$ $\boxed{a_n \geq a_{n_0} > K.}$ Orámované časti nám dávajú priamo, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. □

Analogická veta platí aj pre nerastúce postupnosti.

Veta 1.49. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť, potom*

(1) ak $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená, tak má vlastnú limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_1, a_2, a_3, \ldots\};$$

(2) ak $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie je zdola ohraničená, tak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Poznámka 1.17.
$a_n \longrightarrow L$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$;
$a_n \nearrow L$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je neklesajúca;*
$a_n \searrow L$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je nerastúca.*

Veta 1.50. (O čísle e)
Nech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. *Potom postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a obe postupnosti majú tú istú limitu (označíme ju e) a pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:* $a_n < e < b_n$, $b_n - a_n < \frac{3}{n}$.

Dôkaz:

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} = \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^{n}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Ďalej využijeme Bernoulliho nerovnosť: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geq -1$. Označme $x = -\dfrac{1}{n^2+2n+1} \geq -1$, lebo $n^2+2n+1 \geq 4$, teda $\dfrac{1}{n^2+2n+1} \leq \dfrac{1}{4}$, z čoho máme $-\dfrac{1}{n^2+2n+1} \geq -\dfrac{1}{4} > -1$. Teda

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n}\cdot\frac{n+2}{n+1} \geq \left[1+n\cdot\left(-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)\right]\cdot\frac{n+2}{n+1} = \\
&= \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)\cdot\frac{n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

Ďalej využijeme fakt, že $-\dfrac{n}{n^2+2n+1} > -\dfrac{n}{n^2+2n}$, pretože $n^2+2n+1 > n^2+2n$. Z toho máme

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &\geq \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)\cdot\frac{n+2}{n+1} > \left(1-\frac{n}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+2}{n+1} = \\
&= \frac{n^2+n}{n^2+2n}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{n\cdot(n+1)}{n\cdot(n+2)}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+1} = 1
\end{aligned}$$

Teda dostali sme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1} \Longrightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je rastúca}$$

- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)} = \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} = \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

Ďalej využijeme Bernoulliho nerovnosť: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geq -1$.

Označme $x = \dfrac{1}{n^2+2n} \geq -1$, lebo $\dfrac{1}{n^2+2n} > 0 > -1$. Teda

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \geq \left[1+(n+1)\cdot\left(\frac{1}{n^2+2n}\right)\right]\cdot\frac{n+1}{n+2} = \\ &= \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

Ďalej využijeme fakt, že $\dfrac{n+1}{n^2+2n+1} < \dfrac{n+1}{n^2+2n}$, pretože $n^2+2n+1 > n^2+2n$. Z toho máme

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}} &\geq \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} > \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} = \\ &= \left(1+\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} = 1\end{aligned}$$

Teda dostali sme

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \quad b_n > b_{n+1} \Longrightarrow (b_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je klesajúca}$$

- existencia limít

$$\left.\begin{array}{l}(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ rastie} \\ (b_n)_{n=1}^{\infty} \text{ klesá} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ a_n < b_n\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ rastúca, zhora ohr.} \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R} \\ (b_n)_{n=1}^{\infty} \text{ klesajúca, zdola ohr.} \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}\end{array}\right.$$

- rovnosť limít

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{b_n} & = & \underbrace{a_n} & \cdot & \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \beta & & \alpha & & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{\alpha \qquad 1}_{\displaystyle\downarrow \atop \displaystyle\alpha}$$

$$\beta = \alpha \overset{\text{označ.}}{=} e$$

- $a_n < e < b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots \Longrightarrow \text{rastúca a ohraničená každým z čísel } b_n \Longrightarrow$$
$$\boxed{e} = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \geq a_{n+1} > \boxed{a_n}$$

$$b_1 > b_2 > a_3 > \ldots \Longrightarrow \text{klesajúca a ohraničená každým z čísel } a_n \Longrightarrow$$
$$\boxed{e} = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_1, b_2, b_3, \ldots\} \leq b_{n+1} < \boxed{b_n}$$

$$\Longrightarrow a_n < e \wedge e < b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n < e < b_n.$$

- $\underline{b_n - a_n < \dfrac{3}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{e}{n} < \frac{b_5}{n} = \frac{2,985984}{n} < \frac{3}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \square \end{aligned}$$

Poznámka 1.18.

$$e = 2,718\,28\,18\,28\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{neperiodicky}$$

Číslo e je iracionálne, dokonca transcendentné (t.j. nie je koreňom polynómu s celočíselnými koeficientami.

$$\log_e \equiv \ln$$

Veta 1.51. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$

Veta 1.52. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$

Poznámka 1.19. *Na záver uvedieme ďalšie vzorce, ktoré budeme potrebovať pri výpočte limít postupností:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = +\infty, a > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty, a > 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$

Ďalej budeme využívať:

$$Ak \lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R},\ L > 0,\ tak \lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln L.$$

Vyššie uvedené vzorce a pravidlá budú dokázané vo vyšších ročníkoch. Tu sme ich uviedli preto, aby sme mohli počítať príklady.

1.6 Limity vybraných postupností

Definícia 1.19. *Nech $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná číselná postupnosť. Potom postupnosť $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ nazývame vybranou postupnosťou z postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Veta 1.53. *Z každej postupnosti reálnych čísel možno vybrať monotónnu podpostupnosť.*

Definícia 1.20. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť a nech $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je jej podpostupnosť. Ak $(b_n)_1^{\infty}$ má limitu (vlastnú alebo nevlastnú), tak túto limitu nazývame hromadnou hodnotou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Množinu hromadných hodnôt postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ budeme označovať $HH(a_n)$.*

Príklad 1.6. *Majme postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, \ldots$ *Určme množinu jej hromadných hodnôt.*

Riešenie:
Z uvedenej postupnosti vyberieme dve podpostupnosti:

$$\begin{array}{lcl} 1, 1, 1, 1, \ldots & \longrightarrow & \text{jej limita je číslo } 1 \\ 2, 3, 4, 5, \ldots & \longrightarrow & \text{jej limita je } +\infty \end{array}$$

Teda 1 a $+\infty$ sú hromadné hodnoty postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Iné hromadné hodnoty postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nemá. Množina hromadných hodnôt postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má dva prvky:

$$HH(a_n) = \{1, +\infty\}.$$

Dôsledok 1.2. *Z vety 1.53 vyplýva, že každá postupnosť reálnych čísel má aspoň jednu hromadnú hodnotu. Následne použitím vety 1.48 dostávame, že množina hromadných hodnôt je neprázdna.*

Veta 1.54. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *(vlastná alebo nevlastná), potom každá podpostupnoeť postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má tiež limitu a to* L.

Dôsledok 1.3. *Z vety 1.54 vyplýva, že ak postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má dve podpostupnosti a rôznymi limitami, tak* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *nemá limitu. Ďalej, ak postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má podpostupnosť, ktorá nemá limitu, tak ani* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *nemá limitu.*

Teda postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu práve vtedy, keď* <u>*každá*</u> *podpostupnosť postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu.*

Príklad 1.7. *Postupnosť* $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ *nemá limitu.*

Dôkaz:
Z uvedenej postupnosti vyberieme dve podpostupnosti:

$$\begin{array}{lcl} 1, 1, 1, 1, \ldots & \longrightarrow & \text{jej limita je číslo } 1 \\ 2, 2, 2, 2, \ldots & \longrightarrow & \text{jej limita je číslo } 2 \end{array}$$

Našli sme dve podpostupnosti s rôznymi limitami, teda podľa dôsledku 1.3 postupnosť $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$ nemá limitu. □

Definícia 1.21. *Nech* $(a_n)_1^{\infty}$ *je postupnosťreálnych čísel. Potom najväčšiu (najmenšiu) hromadnú hodnotu postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *voláme limes superior (limes inferior) postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. *Označenie:* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ $(\liminf\limits_{n\to\infty} a_n)$.

Poznámka 1.20. *Limes superior a limes inferior postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *vždy existujú, lebo množina hromadných hodnôt postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je neprázdna (pozri dôsledok 1.2).*

Príklad 1.8. *Majme postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, \ldots$ *Určme jej limes superior a limes inferior.*

Riešenie:
Množina hromadných hodnôt postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $HH(a_n) = \{1, +\infty\}$. Teda $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Veta 1.55. *Pre každú postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *platí*

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \iff \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *Vtedy* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1.7 Cvičenie

1.7.1 Určovanie vlastností postupnosti

Príklad 1.9. *Vyšetrite ohraničenosť (resp. ohraničenosť zdola a zhora) postupností:*

a) $\left(\dfrac{n^2+n+2}{n^2+4n}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(n+2-\dfrac{n+1}{2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left((-1)^n \cdot 2n\right)_{n=1}^{\infty}$

Riešenie:

a)Všimnime si bližšie n-tý člen $a_n = \dfrac{n^2+n+2}{n^2+4n}$. Zrejme $a_n \geq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola, napr. číslom 0.

Skúsme teraz zistiť, či postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora. Upravme jej n-tý člen:

$$a_n = \frac{n^2+4n-4n+n+2}{n^2+4n} = 1 - \frac{3n-2}{n^2+4n};$$

Všimnime si, že zlomok $\dfrac{3n-2}{n^2+4n}$ je kladný pre každé $n \in \mathbb{N}$. Z toho dostávame

$$\begin{aligned} \frac{3n-2}{n^2+4n} &> 0 \quad | \cdot (-1) \\ -\frac{3n-2}{n^2+4n} &< 0 \quad |(+1) \\ \underbrace{1-\frac{3n-2}{n^2+4n}}_{a_n} &< 1, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Teda postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora, napr. číslom 1.

b) Všimnime si bližšie n-tý člen $a_n = n+2-\dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{2n^2+6n+5}{2n+3}$. Zrejme $a_n \geq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola, napr. číslom 0.

Skúsme teraz zistiť, či postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora. Upravme jej n-tý člen:

$$\begin{aligned} a_n &= n+2-\frac{n+1}{2n+3} = n+2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+3}\right) = n+2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2n+3-1}{2n+3}\right) = \\ &= n+2-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+3}\right) = n+2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2n+3)} = n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2(2n+3)} \end{aligned}$$

Keďže
$$\frac{1}{2(2n+3)} \geq 0,$$
potom
$$\underbrace{n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2(2n+3)}}_{a_n} \geq n+\frac{3}{2}.$$

Avšak postupnosť $\left(n+\frac{3}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zhora, pretože pre každé $K \in \mathbb{R}$ existujú $n \in \mathbb{N}, n > K - \frac{3}{2}$, také že $\underbrace{n+\frac{3}{2}}_{b_n} > K$. Teda ani postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zhora.

c) Všimnime si bližšie postupnosť $\big((-1)^n \cdot 2n\big)_{n=1}^{\infty}$. Táto pre párne n nadobúda hodnoty $a_n = 2n$ a pre nepárne n hodnoty $a_n = -2n$. Avšak postupnosť $(2n)_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zhora, pretože pre každé $K \in \mathbb{R}$ existujú párne $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{2}K$, také že $2n > K$. Teda ani postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zhora.

Podobne postupnos $(-2n)_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zdola, pretože pre každé $k \in \mathbb{R}$ existujú nepárne $n \in \mathbb{N}$, $n > -\frac{1}{2}k$, také že $-2n < k$. Teda ani postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zdola.

Príklad 1.10. *Vyšetrite monotónnosť postupností:*

a) $\left(\frac{2n+3}{3n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\big(1+(-1)^n+n^2\big)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\frac{3n^2+2}{3n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Riešenie:

a) Keďže $a_n = \frac{2n+3}{3n-2} > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, môžeme skúmať monotónnosť pomocou podielu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Teda
$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2(n+1)+3}{3(n+1)-2}}{\frac{2n+3}{3n-2}} = \frac{2n+2+3}{3n+3-2}\cdot\frac{3n-2}{2n+3} = \frac{2n+5}{3n+1}\cdot\frac{3n-2}{2n+3} = \\ &= \frac{6n^2-4n+15n-10}{6n^2+9n+2n+3} = \frac{6n^2+11n-10}{6n^2+11n+3} < 1\end{aligned}$$

Z toho máme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, pretože $a_{n+1} < a_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

b) Skúmajme rozdiel $a_{n+1} - a_n$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 1 + (-1)^{n+1} + (n+1)^2 - 1 - (-1)^n - n^2 = \\ &= (-1)^n \cdot (-1) + n^2 + 2n + 1 - (-1)^n - n^2 = (-1)^n \cdot (-2) + 2n + 1 = \\ &= 2n + 1 - 2 \cdot (-1)^n = \begin{cases} 2n + 1 - 2 \cdot (-1) = 2n + 3 > 0, \ n \text{ je nepárne} \\ \\ 2n + 1 - 2 \cdot 1 = 2n - 1 > 0, \ n \text{ je párne} \end{cases} \end{aligned}$$

Teda $a_{n+1} - a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, t.j. $a_{n+1} > a_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, preto postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca.

c) Keďže $a_n = \dfrac{3n^2 + 2}{3n^2 + 1} > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, môžeme skúmať monotónnosť pomocou podielu $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Teda

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{3(n+1)^2 + 2}{3(n+1)^2 + 1}}{\frac{3n^2 + 2}{3n^2 + 1}} = \frac{3(n^2 + 2n + 1) + 2}{3(n^2 + 2n + 1) + 1} \cdot \frac{3n^2 + 1}{3n^2 + 2} = \frac{3n^2 + 6n + 5}{3n^2 + 6n + 4} \cdot \frac{3n^2 + 1}{3n^2 + 2} = \\ &= \frac{9n^4 + 3n^2 + 18n^3 + 6n + 15n^2 + 5}{9n^4 + 6n^2 + 18n^3 + 12n + 12n^2 + 8} = \frac{9n^4 + 18n^3 + 18n^2 + 6n + 5}{9n^4 + 18n^3 + 18n^2 + 12n + 8} < 1 \end{aligned}$$

Z toho máme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, pretože $a_{n+1} < a_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Iný spôsob riešenia spočíva v úprave n-tého člena postupnosti na tvar:

$$a_n = \frac{3n^2 + 2}{3n^2 + 1} = 1 + \frac{1}{3n^2 + 1}$$

Potom môžeme skúmať rozdiel $a_{n+1} - a_n$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 1 + \frac{1}{3(n+1)^2 + 1} - 1 - \frac{1}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3(n+1)^2 + 1} - \frac{1}{3n^2 + 1} = \\ &= \frac{3n^2 + 1 - 3n^2 - 6n - 4}{3n^2 + 6n + 4} = \frac{-6n - 3}{3n^2 + 6n + 4} < 0 \end{aligned}$$

Z toho opäť máme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, pretože $a_{n+1} < a_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Ďalším spôsobom riešenia je skúmanie výrazu $a_n > a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ 1 + \frac{1}{3n^2 + 1} &> 1 + \frac{1}{3(n+1)^2 + 1} \\ \frac{1}{3n^2 + 1} &> \frac{1}{3(n+1)^2 + 1} \\ 3(n+1)^2 + 1 &> 3n^2 + 1 \\ 3(n+1)^2 &> 3n^2 \\ (n+1)^2 &> n^2 \end{aligned}$$

Ekvivalentnými úpravami sme dostali nerovnosť $(n+1)^2 > n^2$, ktorá platí pre každé $n \in \mathbb{N}$. Teda $a_n > a_{n+1}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, preto postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca .

Úlohy

1.1 Overte, či v každom riadku ide skutočne o dve vyjadrenia tej istej konečnej postupnosti

a) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ $\quad (n)_{n=1}^{8}$

b) $1, 4, 9, 16, 25$ $\quad (n^2)_{n=1}^{5}$

c) $5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$ $\quad (5)_{n=1}^{7}$

d) $3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, -3$ $\quad \left((-1)^{n+1} \cdot 3\right)_{n=1}^{10}$

e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$ $\quad \left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=1}^{5}$

1.2 Napíšte prvých 5 členov postupnosti daných vzorcom pre n-tý člen:

a) $(3n)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(0,5 + 0,5 \cdot (-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left((n-1) \cdot n\right)_{n=1}^{\infty}$

e) $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$

f) $\left(\sin \frac{\pi}{2} n\right)_{n=1}^{\infty}$

1.3 Vyjadrite dané konečné postupnosti pomocou vzorca pre n-tý člen:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ $\quad \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{5}\right]$

b) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1$ $\quad \left[\left((-1)^{n+1}\right)_{n=1}^{9}\right]$

c) $54, -18, 6, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}$ $\quad \left[\left(54 \cdot \left(-\frac{1}{3^n}\right)^{n-1}\right)_{n=1}^{6}\right]$

d) $1, 8, 27, 64, 125, 216$ $\quad [(n^3)_{n=1}^{6}]$

1.4 Vyšetrite ohraničenosť (resp. ohraničenosť zdola a zhora) postupností:

a) $\left(\frac{1}{2+3n}\right)_{n=1}^{\infty}$ [ohr.]

b) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ [ohr.]

c) $\left(\frac{5n-1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ [ohr.]

d) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ [ohr.]

e) $\left(\frac{n^2}{2} - 6\right)_{n=1}^{\infty}$ [ohr. zdola]

f) $\left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ [ohr.]

g) $\left((-1)^n \cdot n\right)_{n=1}^{\infty}$ [neohr.]

h) $\left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ [ohr.]

1.5 Vyšetrite monotónnosť postupností:

a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{1}^{\infty}$ [rastúca]

b) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{1}^{\infty}$ [klesajúca]

c) $\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)_{1}^{\infty}$ [rastúca]

d) $\left(\frac{n^2+2n+7}{n^2+2n+8}\right)_{1}^{\infty}$ [rastúca]

e) $\left(\dfrac{n^2}{2}-6\right)_1^\infty$ [rastúca]

f) $\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)_1^\infty$ [klesajúca]

g) $\left((-1)^n\cdot n\right)_1^\infty$ [ani rast. ani kles.]

h) $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right)_1^\infty$ [ani rast. ani kles.]

1.7.2 Úlohy na aritmetickú a geometrickú postupnosť

Príklad 1.11. *Voľne padajúce teleso prejde za prvú sekundu dráhu $0,5u$; za každú ďalšiu sekundu dráhu o u väčšiu ako v predchádzajúcej sekunde. Akú dráhu prejde teleso za t sekúnd?*

Riešenie:
Najprv si urobíme zápis údajov zo zadania:

$$
\begin{array}{ll}
1.s & \ldots\ldots 0,5u \\
2.s & \ldots\ldots 0,5u+u \\
3.s & \ldots\ldots 0,5u+2u \\
\vdots & \\
t.s & \ldots\ldots 0,5u+(t-1)u
\end{array}
$$

Z údajov vidíme, že prejdené dráhy v jednotlivých sekundách tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou u a prvým čenom $a_1 = 0,5u$. Potom za t sekúnd teleso prejde drahu s_t:

$$s_t = (0,5u+0,5u+(t-1)u)\cdot\frac{t}{2} = (u+t\cdot u-u)\cdot\frac{t}{2} = \frac{t^2u}{2}.$$

Odpoveď: Teleso prejde za t sekúnd dráhu $\dfrac{t^2u}{2}$.

Príklad 1.12. *Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky, ktorých dĺžky strán tvoria konečnú aritmetickú postupnosť.*

Riešenie:
Označme dĺžky strán pravouhlého trojuholníka písmenami a,b,c. Kedže tvoria konečnú aritmetickú postupnosť (AP), musí platiť:

$$a=b-d, b=b, c=b+d,$$

kde d je diferencia spomínanej AP. V pravouhlom trojuholníku platí pytagorova veta:

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= c^2 \\
(b-d)^2+b^2 &= (b+d)^2 \\
b^2-2bd+d^2+b^2 &= b^2+2bd+d^2 \\
b^2 &= 4bd \\
b &= 4d
\end{aligned}
$$

Z toho pre ostatné dĺžky strán dostávame

$$
\begin{aligned}
a &= b-d=4d-d=3d, \\
c &= b+d=4d+d=5d.
\end{aligned}
$$

Urobíme ešte skúšku správnosti:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ (3d)^2 + (4d)^2 &= (5d)^2 \\ 9d^2 + 16d^2 &= 25d^2 \\ 25d^2 &= 25d^2 \end{aligned}$$

Odpoveď: Všetky pravouhlé trojuholníky, ktorých dĺžky strán tvoria konečnú aritmetickú postupnosť, majú 3 strany nasledujúcich dĺžok: $3d, 4d, 5d$, kde $d > 0$.

Príklad 1.13. *Určite tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti, ktorá má diferenciu* $d = \dfrac{13}{3}$*, ak viete, že súčin týchto čísel sa rovná ich súčtu.*

Riešenie:
Označme hľadané tri členy ako $a - \dfrac{13}{3}, a, a + \dfrac{13}{3}$. Hľadáme a tak, aby platilo

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{13}{3}\right) + a + \left(a + \frac{13}{3}\right) &= \left(a - \frac{13}{3}\right) \cdot a \cdot \left(a + \frac{13}{3}\right) \\ 3a &= a \cdot \left[a^2 - \left(\frac{13}{3}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Skúmajme teraz dva prípady:

- $\boxed{a = 0}$
  Potom
  $$0 = 0$$
  a teda hľadané členy sú: $-\dfrac{13}{3}, 0, \dfrac{13}{3}$.

- $\boxed{a \neq 0}$
  Potom
  $$\begin{aligned} 3 &= a^2 - \frac{169}{9} \\ a^2 &= 3 + \frac{169}{9} \\ a^2 &= \frac{196}{9} \\ a &= \pm\frac{14}{3} \end{aligned}$$
  a teda hľadané členy sú: $\dfrac{1}{3}, \dfrac{14}{3}, 9$ a zároveň aj $-9, -\dfrac{14}{3}, -\dfrac{1}{3}$.

Odpoveď: Hľadané tri za sebou idúce členy danej aritmetickej postupnosti s diferenciou $d = \dfrac{13}{3}$ sú: $-\dfrac{13}{3}, 0, \dfrac{13}{3}$ a zároveň aj $\dfrac{1}{3}, \dfrac{14}{3}, 9$ a zároveň aj $-9, -\dfrac{14}{3}, -\dfrac{1}{3}$.

Príklad 1.14. *Polčas premeny rádia C je približne 20 minút. (Polčasom premeny nazývame dobu, za ktorú sa premení polovica počiatočnej hmotnosti rádioaktívnej látky.) Počiatočná hmotnosť rádia C je 3 mg. Aká bude jeho hmotnosť za 2 hodiny?*

Riešenie:
Napíšme hmotnosti rádia C po každých 20-tich minútach:

$$\begin{array}{rcl} \text{na začiatku} & \ldots\ldots & 3 \text{ mg} \\ \text{po 20-tich minútach} & \ldots\ldots & 3\cdot\frac{1}{2}\text{ mg} \\ \text{po 40-tich minútach} & \ldots\ldots & 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ mg} \\ \text{po 60-tich minútach} & \ldots\ldots & 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ mg} \\ \text{po 80-tich minútach} & \ldots\ldots & 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 \text{ mg} \\ \text{po 100 minútach} & \ldots\ldots & 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 \text{ mg} \\ \text{po 120-tich minútach} & \ldots\ldots & 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 \text{ mg} \end{array}$$

Odpoveď: Po dvoch hodinách bude hmotnosť rádia uhlíka $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0,046875$ mg.

Príklad 1.15. *Stroj stráca opotrebovaním každý rok p percent zo svojej ceny. Za koľko rokov klesne jeho hodnota na polovicu?*

Riešenie:
Opäť si napíšeme, čo vieme zo zadania:

$$\begin{array}{rcl} \text{počiatočná cena} & \ldots\ldots & a \ldots\ldots K_0 \\ \text{konečná cena} & \ldots\ldots & \frac{a}{2} \ldots\ldots K_n \\ \text{stráca ročne} & \ldots\ldots & p\% \\ \text{počet rokov} & \ldots\ldots & n \end{array}$$

Pri výpočte využijeme vzorec

$$\begin{aligned} K_n &= K_0\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^n \\ \frac{a}{2} &= a\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^n \\ \frac{1}{2} &= \left(1-\frac{p}{100}\right)^n \\ \ln\frac{1}{2} &= \ln\left(1-\frac{p}{100}\right)^n \\ \ln 0,5 &= n\cdot\ln\left(1-\frac{p}{100}\right) \\ n &= \frac{\ln 0,5}{\ln\left(1-\frac{p}{100}\right)} \end{aligned}$$

Odpoveď: Hodnota stroja klesne na polovicu za $n = \dfrac{\ln 0,5}{\ln\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)}$ rokov.

Príklad 1.16. *Polčas premeny rádioaktívnej látky je čas, za ktorý sa polovica jej pôvodného množstva premení na rozpadové produkty. Aký vek má archeologický nález, ak sa v spoločnej vrstve s ním našlo 2,1g rádioaktívneho uhlíka s polčasom premeny 5570 rokov a 300g rozpadových produktov.*

Riešenie:
Najprv si urobíme zápis údajov zo zadania:

$$\begin{array}{rcl}
\text{na začiatku} & \dots\dots & 302,1g \\
\text{po 5570-tich rokoch} & \dots\dots & \dfrac{302,1}{2}g \text{ rozpadových produktov} \\
\text{po } 2\cdot 5570\text{-tich rokoch} & \dots\dots & \dfrac{302,1}{2}g + \dfrac{302,1}{4}g = 302,1\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)g \text{ rozp. produktov} \\
\vdots & & \vdots \\
\text{po } t\cdot 5570\text{-tich rokoch} & \dots\dots & 302,1\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^t}\right)g \text{ rozpadových produktov}
\end{array}$$

Zo zadania ešte vieme, že po $t\cdot 5570$-tich rokoch sa našlo $300g$ rozpadových produktov. Teda dostávame

$$\begin{aligned}
302,1\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^t}\right) &= 300 \\
302,1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t - 1}{\frac{1}{2}-1}\right) &= 300 \\
302,1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^t\right] &= 300 \\
1-\left(\frac{1}{2}\right)^t &= \frac{300}{302,1} \\
1-\frac{300}{302,1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^t \qquad |\ln \\
\ln\left(1-\frac{300}{302,1}\right) &= t\cdot\ln\frac{1}{2} \\
t &= \frac{\ln\left(1-\dfrac{300}{302,1}\right)}{\ln\dfrac{1}{2}} = \frac{-4,9688}{-0,6931} \doteq 7,16895
\end{aligned}$$

Potom $t\cdot 5570 \doteq 39931$. Odpoveď: Archeologický nález má približne vek 39931 rokov.

Príklad 1.17. *Je daná geometrická postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Určte s_5, ak $s_2 = 4$ a $s_3 = 13$.*

Riešenie:
Zo zadania vieme, že $s_2 = 4$ a $s_3 = 13$. Avšak podľa vzorca pre súčet n členov geometrickej postupnosti platí:

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Teda dostávame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych b_1 a q:

$$\begin{aligned} s_2 &= b_1 \cdot \frac{q^2-1}{q-1} = b_1 \cdot (q+1) = 4 \\ s_3 &= b_1 \cdot \frac{q^3-1}{q-1} = b_1 \cdot (q^2+q+1) = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= b_1 \cdot (q+1) \quad \Longrightarrow \quad b_1 = \frac{4}{q+1} \\ 13 &= b_1 \cdot (q^2+q+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 &= \frac{4}{q+1} \cdot (q^2+q+1) \\ 13q + 13 &= 4q^2 + 4q + 4 \\ 0 &= 4q^2 - 9q - 9 \end{aligned}$$

Dostali sme tak kvadratickú rovnicu, ktorej korene q_1, q_2 vypočítame podľa vzorca:

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{9 \pm 15}{8} = \begin{cases} \frac{24}{8} = 3 \Longrightarrow b_1 = \frac{4}{3+1} = 1 \\ -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \Longrightarrow b_1 = \frac{4}{-\frac{3}{4}+1} = 16 \end{cases}$$

Máme teda dve geometrické postupnosti:

$$\begin{aligned} &\mathrm{GP}_1 : b_1 = 1, q = 3 \\ &\mathrm{GP}_2 : b_1 = 16, q = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ešte vypočítame príslušné hodnoty s_5:

$$\begin{aligned} &\text{pre } \mathrm{GP}_1 : s_5 = 1 \cdot \frac{3^5-1}{3-1} = \frac{243-1}{2} = 121 \\ &\text{pre } \mathrm{GP}_2 : s_5 = 16 \cdot \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^5 - 1}{-\frac{3}{4} - 1} = 16 \cdot \frac{\frac{243}{1024}+1}{\frac{7}{4}} = 16 \cdot \frac{1267}{1024} \cdot \frac{4}{7} = \frac{181}{16} \end{aligned}$$

Odpoveď: Hľadané hodnoty s_5 sú dve a to 121 a $\frac{181}{16}$.

Úlohy

1.6 Časť strechy domu má tvar lichobežníka a treba ju pokryť škridlami. Viete, že na hrebeni (vrchole) sa zmestí 85 škridiel. Do spodného radu sa zmestí pri odkvape 102 škridiel. Škridly budú kladené tak, že v každom nasledujúcom rade bude o jednu škridlu viac ako v predchádzajúcom. Koľko škridiel treba na pokrytie časti strechy? [1683]

1.7 V nasledujúcej tabuľke sú v každom riadku uvedené niektoré údaje o aritmetickej postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Doplňte všetky prázdne bunky tabuľky.

d	a_1	a_6	a_{10}	s_{10}
-0,4	2			
-2		4		
	-1	7,5		
		2,2	7	
			22,5	112,5
3				145

Tabuľka 1.4:

$[a_6 = 0; a_{10} = -1,6; s_{10} = 2]$
$[a_1 = 14; a_{10} = -4; s_{10} = 50]$
$[d = 1,7; a_{10} = 14,3; s_{10} = 66,5]$
$[d = 1,2; a_1 = -3,8; s_{10} = 16]$
$[d = 2,5; a_1 = 0; a_6 = 12,5]$
$[a_1 = 1; a_6 = 16; a_{10} = 28]$

1.8 Určte s_n a a_n v aritmetickej postupnosti, pre ktorú platí $a_3 + a_7 = 38$, $a_5 + a_{10} = 58$. $[s_n = n(2n+1), a_n = 4n - 1]$

1.9 V aritmetickej postupnosti platí: $a_4 = 0$, $a_6 = -4$ a $s_n = 12$. Určte, pre ktoré prirodzené n to platí. $[n = 3, n = 4]$

1.10 V nasledujúcej tabuľke sú v každom riadku uvedené niektoré údaje o geometrickej postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Doplňte všetky prázdne bunky tabuľky.

q	a_1	a_3	a_6	s_6
0,5	2			
2		8		
	-2	-4		
		3	$-\frac{1}{9}$	
2				63

Tabuľka 1.5:

$\left[a_3 = 0,5; a_6 = \frac{1}{16}; s_6 = \frac{63}{16}\right]$
$[a_1 = 2; a_6 = 64; s_6 = 126]$
$\left[q = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}; a_6 = \begin{cases} -8\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} \end{cases}; s_6 = \begin{cases} -14(\sqrt{2}+1) \\ 14(\sqrt{2}-1) \end{cases}\right]$
$\left[q = -\frac{1}{3}; a_1 = 27; s_6 = \frac{182}{9}\right]$
$[a_1 = 1; a_3 = 4; a_6 = 32]$

1.11 Aký veľký vklad vzrastie za 15 rokov na 1346 Eur, ak sa úrokuje 2% celoročne? [1000 Eur]

1.12 Nech $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_1 a q, ak $b_1 + b_2 + b_3 = 31$, $b_1 + b_3 = 26$. $[b_1 = 1, q = 5\ ; b_1 = 25, q = \frac{1}{5}]$

1.13 Nech $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_1, ak $b_3 = 18$, $s_3 = 26$. $[b_1 = 2\ ; b_1 = \frac{81}{2}]$

1.14 Nech $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_5, ak $b_2 - b_1 = 18$, $b_4 - b_3 = 162$. $[b_5 = 729\ ; b_1 = -\frac{729}{2}]$

1.7.3 Úlohy na dôkaz limity postupnosti z definície

Pri dôkazoch limity postupnosti z definície budeme dodržiavať nasledovný postup:

1. napíšeme, čo chceme dokázať;

2. urobíme rozbor;
3. napíšeme samotný dôkaz.

Príklad 1.18. *Z definície limity dokážte, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Riešenie:

CHCEME: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \qquad \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$

ROZBOR:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n^2} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n^2 \\ \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} &< n \end{aligned}$$

DÔKAZ: Nech $\boxed{\varepsilon > 0.}$ Zvoľme $\boxed{\exists n_0 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}}$, $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}.}$ Potom $\boxed{\forall n > n_0}$ platí

$$\begin{aligned} n > n_0 &> \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \\ n &> \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \\ n^2 &> \frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{1}{n^2} &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon} \;\square$$

Príklad 1.19. *Nech* $a > 0$*. Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$.

Riešenie:

CHCEME: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \qquad \left|\frac{1}{n^a} - 0\right| < \varepsilon$

ROZBOR:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n^a} - 0\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n^a} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n^a \;\Big|^{\frac{1}{a}} \\ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}} &< n \end{aligned}$$

DÔKAZ: Nech $\boxed{\varepsilon > 0.}$ Vezmime $\boxed{n_0 \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}}$, $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}.}$ Potom $\boxed{\forall n > n_0}$ platí

$$\begin{aligned} n > n_0 &\geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}} \\ n &> \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}} \\ n^a &> \frac{1}{\varepsilon} \\ \left|\frac{1}{n^a}\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{n^a} - 0\right| < \varepsilon} \quad \square$$

Príklad 1.20. *Z definície dokážte, že* $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$. *Pre* $\varepsilon = 0,001$ *nájdite* n_0.

Riešenie:

CHCEME: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

ROZBOR:

$$\begin{aligned} \left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{n-1-n-1}{n+1}\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{-2}{n+1}\right| &< \varepsilon \\ \frac{2}{n+1} &< \varepsilon \\ \frac{2}{\varepsilon} &< n+1 \\ \frac{2}{\varepsilon} - 1 &< n \end{aligned}$$

DÔKAZ: Nech $\boxed{\varepsilon > 0.}$ Vezmime $\boxed{n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1}$, $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}.}$ Potom $\boxed{\forall n > n_0}$ platí

$$\begin{aligned} n > n_0 &\geq \frac{2}{\varepsilon} - 1 \\ n &> \frac{2}{\varepsilon} - 1 \\ n+1 &> \frac{2}{\varepsilon} \\ \frac{2}{n+1} &< \varepsilon \\ \left|\frac{-2}{n+1}\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\boxed{\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|<\varepsilon}\ \square$$

Pre $\varepsilon = 0,001$ je $n_0 \geq \dfrac{2}{0,001} - 1 = 2000 - 1 = 1999$.

Príklad 1.21. *Nech* $0 < q < 1$. *Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. *Dokážte z definície limity.*

Riešenie:
CHCEME: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \quad |q^n - 0| < \varepsilon$
ROZBOR:

$$\begin{aligned}
|q^n - 0| &< \varepsilon \\
q^n &< \varepsilon \ \ |\log \\
\log q^n &< \log \varepsilon \\
n \cdot \log q &< \log \varepsilon \ \ | : \log q, \quad \text{ale } 0 < q < 1 \Rightarrow \log q < 0 \\
n &> \frac{\log \varepsilon}{\log q}
\end{aligned}$$

DÔKAZ: Nech $\boxed{\varepsilon > 0.}$ Vezmime $\boxed{n_0 \geq \dfrac{\log \varepsilon}{\log q}}$, $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}.}$ Potom $\boxed{\forall n > n_0}$ platí

$$\begin{aligned}
n > n_0 &\geq \frac{\log \varepsilon}{\log q} \\
n &> \frac{\log \varepsilon}{\log q} \\
n \cdot \log q &< \log \varepsilon \\
\log q^n &< \log \varepsilon \\
q^n &< \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\boxed{q^n - 0| < \varepsilon}\ \square$$

Príklad 1.22. *Z definície dokážte, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n-7}{2n^2-3} = \dfrac{1}{2}$.

Riešenie:
CHCEME: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \quad \left|\dfrac{n^2+4n-7}{2n^2-3} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$
ROZBOR:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+4n-7}{2n^2-3} - \frac{1}{2}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{2n^2+8n-14-2n^2+3}{2(2n^2-3)}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{8n-11}{4n^2-6}\right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ďalej platí:

$$|8n - 11| < 8n$$

a pre $n \geq 3$ je

$$|4n^2 - 6| > |4n^2 - n^2| = 3n^2$$

Z toho dostávame nasledujúcu nerovnosť

$$\left|\frac{8n - 11}{4n^2 - 6}\right| < \frac{8n}{3n^2} = \frac{8}{3n}$$

My chceme:

$$\left|\frac{8n - 11}{4n^2 - 6}\right| < \varepsilon$$

Teda stačilo by, keby

$$\begin{aligned} \frac{8}{3n} &< \varepsilon \\ \frac{8}{3\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

DÔKAZ: Nech $\boxed{\varepsilon > 0.}$ Vezmime $\boxed{n_0 \geq \frac{8}{3\varepsilon} \wedge n_0 \geq 3 \text{ t.j. } n_0 \geq \max\left\{\frac{8}{3\varepsilon}, 3\right\}}$, $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}.}$ Potom $\boxed{\forall\, n > n_0}$ platí

$$\begin{aligned} n > n_0 &\geq \frac{8}{3\varepsilon}, n \geq 3 \\ n &> \frac{8}{3\varepsilon}, n \geq 3 \\ \varepsilon &> \frac{8}{3n}, n \geq 3 \end{aligned}$$

a teda

$$\boxed{\left|\frac{n^2 + 4n - 7}{2n^2 - 3} - \frac{1}{2}\right|} = \frac{|8n - 11|}{|4n^2 - 6|} < \frac{8}{3n} \boxed{< \varepsilon} \ \square$$

Príklad 1.23. *Z definície dokážte, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3 - 5n + 9}{5n^3 + n} = \dfrac{8}{5}$.

Riešenie:

CHCEME: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N} \qquad \left|\dfrac{8n^3 - 5n + 9}{5n^3 + n} - \dfrac{8}{5}\right| < \varepsilon$

ROZBOR:

$$\begin{aligned} \left|\frac{8n^3 - 5n + 9}{5n^3 + n} - \frac{8}{5}\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{40n^3 - 25n + 45 - 40n^3 - 8n}{5(5n^3 + n)}\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{-33n + 45}{25n^3 + 5n}\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{33n - 45}{25n^3 + 5n}\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ďalej platí:

$$|33n - 45| < 33n$$

a

$$|25n^3 + 5n| > |25n^3| = 25n^3$$

Z toho dostávame nasledujúcu nerovnosť

$$\left|\frac{33n-45}{25n^3+5n}\right| < \frac{33n}{25n^3} = \frac{33}{25n^2}$$

My chceme:

$$\left|\frac{33n-45}{25n^3+5n}\right| < \varepsilon$$

Teda stačilo by, keby

$$\begin{aligned} \frac{33}{25n^2} &< \varepsilon \\ \frac{33}{25\varepsilon} &< n^2 \\ \sqrt{\frac{33}{25\varepsilon}} &< n \end{aligned}$$

DÔKAZ: Nech $\boxed{\varepsilon > 0.}$ Vezmime $\boxed{n_0 \geq \sqrt{\frac{33}{25\varepsilon}}}$, $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}.}$ Potom $\boxed{\forall n > n_0}$ platí

$$\begin{aligned} n > n_0 &\geq \sqrt{\frac{33}{25\varepsilon}} \\ n &> \sqrt{\frac{33}{25\varepsilon}} \\ n^2 &> \frac{33}{25\varepsilon} \\ \varepsilon &> \frac{33}{25n^2} \end{aligned}$$

a teda

$$\boxed{\left|\frac{8n^3-5n+9}{5n^3+n} - \frac{8}{5}\right|} = \frac{|33n-45|}{|25n^3+5n|} < \frac{33}{25n^2} \boxed{< \varepsilon} \ \square$$

Príklad 1.24. *Z definície dokážte, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^n} = 1.$

Riešenie:

CHCEME: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \qquad \left|\frac{2^n+1}{2^n} - 1\right| < \varepsilon$

ROZBOR:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2^n+1}{2^n}-1\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{2^n+1-2^n}{2^n}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{1}{2^n}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{2^n} &< \varepsilon \\
\frac{1}{\varepsilon} &< 2^n \quad |\log_2 \\
\log_2\frac{1}{\varepsilon} &< \log_2 2^n \\
\log_2\frac{1}{\varepsilon} &< n
\end{aligned}$$

DÔKAZ: Nech $\boxed{\varepsilon > 0.}$ Vezmime $\boxed{n_0 \geq \log_2\frac{1}{\varepsilon}}$, $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}.}$ Potom $\boxed{\forall\, n > n_0}$ platí

$$\begin{aligned}
n > n_0 &\geq \log_2\frac{1}{\varepsilon} \\
n &> \log_2\frac{1}{\varepsilon} \\
2^n &> \frac{1}{\varepsilon} \\
\frac{1}{2^n} &< \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left|\frac{2^n+1}{2^n}-1\right| < \varepsilon} \ \square$$

Príklad 1.25. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = L^k$. *Dokážte.*

Riešenie:
Dôkaz Matematickou indukciou (MI):

1^0 $k = 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = L^1$

2^0 Indukčný predpoklad (IP): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = L^k, \forall\, k \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{k+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot a_n^k) \overset{\text{IP}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot L^k = L \cdot L^k = L^{k+1}$ $\square$

Príklad 1.26. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, *tak* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0$. *Dokážte.*

Riešenie:
CHCEME: $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N} \quad |\sqrt[k]{a_n} - 0| < \varepsilon$

ROZBOR:

$$\begin{aligned} |\sqrt[k]{a_n} - 0| &< \varepsilon \\ \left|a_n^{\frac{1}{k}}\right| &< \varepsilon, \quad a_n \geq 0 \\ a_n^{\frac{1}{k}} &< \varepsilon \quad |^k \\ a_n &< \varepsilon^k \end{aligned}$$

VIEME: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N} \qquad |a_n - 0| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |a_n| &< \varepsilon, \quad a_n \geq 0 \\ a_n &< \varepsilon \end{aligned}$$

DÔKAZ: Nech $\boxed{\varepsilon > 0} \overset{\text{priradíme}}{\longmapsto} \varepsilon^k > 0 \overset{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}{\longmapsto} \boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N}}, \boxed{\forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &< \varepsilon^k \\ |a_n| &< \varepsilon^k, \quad a_n \geq 0 \\ a_n &< \varepsilon^k \\ a_n^{\frac{1}{k}} &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\boxed{|\sqrt[k]{a_n} - 0| < \varepsilon} \;\square$$

Príklad 1.27. *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$*. Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$*. Dokážte.*

<u>Riešenie:</u>

CHCEME: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N} \qquad \left|\dfrac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$

ROZBOR:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{1}{a_n}\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< |a_n| \end{aligned}$$

VIEME: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \iff \forall\, K \in \mathbb{R} \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N} \qquad |a_n| > K$

DÔKAZ: Nech $\boxed{\varepsilon > 0} \overset{\text{priradíme}}{\longmapsto} \dfrac{1}{\varepsilon} > 0 \overset{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty}{\longmapsto} \boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N}}, \boxed{\forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} |a_n| &> \frac{1}{\varepsilon} \\ \left|\frac{1}{a_n}\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon} \;\square$$

Príklad 1.28. *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a nech* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$. *Dokážte.*

Riešenie:

CHCEME: $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{a_n} > K$

ROZBOR:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} &> K \\ \frac{1}{K} &> a_n \end{aligned}$$

VIEME: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \quad |a_n - 0| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |a_n| &< \varepsilon, \quad a_n > 0 \\ a_n &< \varepsilon \end{aligned}$$

DÔKAZ: Nech $\boxed{K > 0} \overset{\text{priradíme}}{\longmapsto} \frac{1}{K} > 0 \overset{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}{\longmapsto} \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}}, \boxed{\forall n > n_0, n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &< \frac{1}{K} \\ |a_n| &< \frac{1}{K}, \quad a_n > 0 \\ a_n &< \frac{1}{K} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{a_n} > K} \ \square$$

Úlohy

1.15 Na základe definície limity postupnosti dokážte

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+2} = 2$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+5} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-4}{2-n} = -1$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2-n} = 0$

1.7.4 Výpočet limít postupností použitím vzorcov

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} n^a = +\infty, a > 0$

Príklad 1.29. *Vypočítajte limity postupností*

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{-3n^3 + 2n^2 + 5}{2n^3 - 2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2}{n^4 - n^3 + 2n + 1}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 3n^3 + 5}{n^2 - 2n - 1}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^4 + 3n - 8}{(1-n)^2}$

Riešenie:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{-3n^3+2n^2+5}{2n^3-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(-3 + \overbrace{\frac{2}{n}}^{\nearrow 0} + \overbrace{\frac{5}{n^3}}^{\nearrow 0}\right)}{n^3 \cdot \left(2 - \underbrace{\frac{2}{n^3}}_{\searrow 0}\right)} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^4-n^3+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \left(1 + \overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\nearrow 0}\right)}{n^4 \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\searrow 0} + \underbrace{\frac{2}{n^3}}_{\searrow 0} + \underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\searrow 0}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^5-3n^3+5}{n^2-2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 \cdot \left(1 - \overbrace{\frac{3}{n^2}}^{\nearrow 0} + \overbrace{\frac{5}{n^5}}^{\nearrow 0}\right)}{n^2 \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\searrow 0} - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\searrow 0}\right)} = \lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^4+3n-8}{(1-n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^4+3n-8}{1-2n+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 \cdot \left(-2 + \overbrace{\frac{3}{n^3}}^{\nearrow 0} - \overbrace{\frac{8}{n^4}}^{\nearrow 0}\right)}{n^2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\searrow 0} - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\searrow 0} + 1\right)} = (-2) \cdot \lim_{n\to\infty} n^2 =$$

$$= (-2) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Poznámka 1.21.

- *Limita podielu dvoch polynómov rovnakého stupňa sa rovná podielu koeficientov pri najväčšom stupni.*
- *Limita podielu dvoch polymómov, kde v čitateli je menší stupeň ako v menovateli, je 0.*
- *Limita podielu dvoch polynómov, kde stupeň čitateľa je väčší ako stupeň menovateľa, je $+\infty \cdot c$, kde c je podiel koeficientov pri najväčších mocninách v čitateli a v menovateli.*

Príklad 1.30. *Vypočítajte limity postupností*

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{-\sqrt{2n^4+3}}{n+1}$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{n+7}{n-1}\right)$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{-(n+2)}$

Riešenie:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{-\sqrt{2n^4+3}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2\cdot\sqrt{2+\overbrace{\frac{3}{n^4}}^{\nearrow 0}}}{n\cdot\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\searrow 0}\right)} = \sqrt{2}\cdot\lim_{n\to\infty}(-n) =$$
$$= \sqrt{2}\cdot(-1)\cdot(+\infty) = -\infty$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{n+7}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} - \lim_{n\to\infty}\frac{n+7}{n-1} = 0-1 = -1$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{-(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\sqrt{1+\overbrace{\frac{1}{n^4}}^{\nearrow 0}}}{-n\cdot\left(1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\searrow 0}\right)} = \sqrt{1}\cdot\lim_{n\to\infty}(-n) =$$
$$= (-1)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Úlohy

1.16 Vypočítajte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)(n^2-2)}{2(n^4+1)}$ $\quad\left[\dfrac{1}{2}\right]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-5)^3}{(n+1)(n^2-2)}$ $\quad[1]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^3}{1-n^2}$ $\quad[-\infty]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^2+n+1)^2}{(n+1)(n-3)}$ $\quad[+\infty]$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-n+2}{5n^3+2n^2+n-1}$ $\quad\left[\dfrac{1}{5}\right]$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2}{3+2n}$ $\quad[+\infty]$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{n^2+1}$ $\quad[1]$

1.7.5 Výpočet limít postupností typu $1^{+\infty}$ použitím vzorcov

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a, a\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{\Box\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{\Box}\right)^{\Box} = e^a$

Príklad 1.31. *Vypočítajte limity postupností*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+1}\right)^{n-2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-3n+2}{-3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

Riešenie:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^2} = \text{"}1^{+\infty}\text{"} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+3+2}{n^2-3}\right)^{n^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n^2-3}\right)^{n^2-3+3} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{5}{n^2-3}\right)^{n^2-3}}_{\searrow e^5}\cdot\left(1+\underbrace{\frac{5}{n^2-3}}_{\searrow 0}\right)^3\right] =$$
$$= e^5\cdot(1+0)^3 = e^5$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \text{"}1^{+\infty}\text{"} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\searrow e^{-1}}\cdot\left(1-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\searrow 0}\right)^{-1}\right] = e^{-1}\cdot(1-0)^{-1} =$$
$$= e^{-1}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\searrow e} = \ln e = 1$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{2n+1}\right)^{n-2} = \text{"}1^{+\infty}\text{"} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1-1-5}{2n+1}\right)^{n-2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{6}{2n+1}\right)^{n-2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{2n+1}\right)^{n}\cdot\left(1-\underbrace{\frac{6}{2n+1}}_{\searrow 0}\right)^{-2}\right] =$$
$$= (1-0)^{-2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{6}{2n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{6}{2n+1}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{2n+1}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{2n+1}\right)^{2n+1-1}\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1-\frac{6}{2n+1}\right)^{2n+1}}_{\searrow e^{-6}}\cdot\left(1-\underbrace{\frac{6}{2n+1}}_{\searrow 0}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= [e^{-6}\cdot(1-0)^{-1}]^{\frac{1}{2}} = [e^{-6}]^{\frac{1}{2}} = e^{-3}$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3n+2}{-3n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \text{"}1^{+\infty}\text{"} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3n-1-1}{3n-1}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3n-1}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3n-1}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{6}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1+1}\right]^{\frac{1}{6}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}}_{\searrow e^{-1}}\cdot\left(1-\underbrace{\frac{1}{3n-1}}_{\searrow 0}\right)^{1}\right]^{\frac{1}{6}} =$$
$$= [e^{-1}\cdot(1-0)^1]^{\frac{1}{6}} = [e^{-1}]^{\frac{1}{6}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1} = \lim_{n\to\infty}\ln\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\searrow e}\right]^{-1} =$$
$$= \ln[e]^{-1} = -1$$

Príklad 1.32. *Vypočítajte limity postupností*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]\right\}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(6n+4)\left[\ln(12n)-\ln(12n-2)\right]\right\}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n\ln e^{\frac{n+2}{n}}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3n\ln\frac{n-1}{n}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n\ln\frac{e^{\frac{2n+1}{n}}}{e^{\frac{3n+1}{3n}}}\right)$

Riešenie:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\searrow e} = \ln e = 1$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left\{(6n+4)\left[\ln(12n)-\ln(12n-2)\right]\right\} = \lim_{n\to\infty}\left((6n+4)\cdot\ln\frac{12n}{12n-2}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{12n}{12n-2}\right)^{6n+4} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{12n-2+2}{12n-2}\right)^{6n+4} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{12n-2}\right)^{6n+4} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{6n-1}\right)^{6n-1+5} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{6n-1}\right)^{6n-1}}_{\searrow e}\cdot\left(1+\underbrace{\frac{1}{6n-1}}_{\searrow 0}\right)^{5}\right] =$$
$$= \ln[e\cdot(1+0)^5] = \ln e = 1$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(-n\ln e^{\frac{n+2}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-n\cdot\frac{n+2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(-n-2) = -\infty$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\left(-3n\ln\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-3n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\searrow e^{-1}}\right]^{-3}=$$

$$=\ln\left[e^{-1}\right]^{-3}=\ln e^{3}=3$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\left(3n\ln\frac{e^{\frac{2n+1}{n}}}{e^{\frac{3n+1}{3n}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[3n\ln\left(e^{\frac{2n+1}{n}-\frac{3n+1}{3n}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[3n\cdot\left(\frac{2n+1}{n}-\frac{3n+1}{3n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3n\cdot\frac{6n+3-3n-1}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}(3n+2)=+\infty$$

Úlohy

1.17 Vypočítajte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n}$ $[e^{7}]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}$ $[e^{-2}]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ $[e^{-1}]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-5}{n+7}\right)^{n-1}$ $[e^{-12}]$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-n}{2-n}\right)^{\frac{1}{2}-n}$ $[e]$

1.7.6 Výpočet limít postupností použitím vzorcov

- $\lim\limits_{n\to\infty}a^{n}=0, |a|<1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}a^{n}=+\infty, a>1$

Príklad 1.33. *Vypočítajte limity postupností*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n}-4^{n}}{3^{n}+4^{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{2n-1}(2^{2n}+5^{2n})}{10^{2n+1}}$

Riešenie:

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n}-4^{n}}{3^{n}+4^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n}\cdot\left(\frac{3^{n}}{4^{n}}-1\right)}{4^{n}\cdot\left(\frac{3^{n}}{4^{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}^{\nearrow 0}-1}{\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}_{\searrow 0}+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n-1}(2^{2n}+5^{2n})}{10^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}\cdot 3^{-1}\cdot(2^{2n}+5^{2n})}{10^{2n}\cdot 10}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{30}\cdot\underbrace{\left(\frac{3\cdot 2}{10}\right)^{2n}}_{\searrow 0}+\frac{1}{30}\cdot\underbrace{\left(\frac{3\cdot 5}{10}\right)^{2n}}_{\searrow +\infty}\right]=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot 0+\frac{1}{30}\cdot(+\infty)=+\infty$$

Príklad 1.34. *Vypočítajte limity postupností*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{2n+1}\right)^{3n-2}$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{4n}$

Riešenie:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{2n+1}\right)^{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{3n+5}{2n+1}}_{\searrow\frac{3}{2}}\Bigg)^{\overbrace{3n-2}^{\nearrow+\infty}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty} = +\infty$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{4n} = \lim_{n\to\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{n+2}{3n-1}}_{\searrow\frac{1}{3}}\Bigg)^{\overbrace{4n}^{\nearrow+\infty}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

Úlohy

1.18 Vypočítajte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+2^n}{4^{n-1}-2^{n+1}}$ [16]

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^{3n-2}+6^{3n}}{9^{3n}\left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$ [0]

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}}{1+(-2)^n}$ [−2]

1.7.7 Výpočet limít postupností použitím vzorcov

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n!}=0$

Príklad 1.35. *Vypočítajte limity postupností*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)!}{(n-4)!+2n}$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+3n+4}{2n!}$

Riešenie:

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)!}{(n-4)!+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-4)!\cdot\dfrac{(n-2)!}{(n-4)!}}{(n-4)!\cdot\left(1+\dfrac{2n}{(n-4)!}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)!}{(n-4)!}}{1+2\cdot\dfrac{n-4+4}{(n-4)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(n-2)\cdot(n-3)}^{\nearrow+\infty}}{1+2\cdot\left(\underbrace{\frac{n-4}{(n-4)!}}_{\searrow 0}+\underbrace{\frac{4}{(n-4)!}}_{\searrow 0}\right)} = \frac{+\infty}{1+2\cdot 0} = +\infty$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!+3n+4}{2n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot\left(1+\frac{3n}{n!}+\frac{4}{n!}\right)}{n!\cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{3n}{n!}}^{\nearrow 0}+\overbrace{\frac{4}{n!}}^{\nearrow 0}}{2} = \frac{1}{2}$$

Úlohy

1.19 Vypočítajte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ $[+\infty]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n!+2(n+1)!}$ $[0]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n-2}{(n+1)!+3n+5}$ $[0]$

1.7.8 Výpočet limít postupností použitím vzorcov

- $AP : a_n = a_1 + (n-1)\cdot d,\ s_n = \dfrac{n}{2}\cdot(a_1+a_n)$
- $GP : a_n = a_1\cdot q^{n-1},\ s_n = a_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$

Príklad 1.36. *Vypočítajte limity postupností*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{\frac{n^3}{2}}$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+5+8+11+\ldots+(3n-1)}{\sqrt{16n^4-1}}$

Riešenie:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}}{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}{\frac{n^3}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\left[1-\overbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}^{\nearrow 0}\right]}{\underbrace{n^3}_{\searrow+\infty}} = \frac{3\cdot(1-0)}{+\infty} = 0$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2+5+8+11+\ldots+(3n-1)}{\sqrt{16n^4-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}\cdot(2+3n-1)}{4n^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{16n^4}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+3n}{8n\cdot\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{16n^4}}_{\searrow 0}}} = \frac{1}{\sqrt{1}}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1+3n}{8n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(\overbrace{\frac{1}{n}}^{\nearrow 0}+3\right)}{8n} = \frac{3}{8}$$

Úlohy

1.20 Vypočítajte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n^2+n+3}-\frac{2}{n}\right)$ [1]

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{4n^2-3}$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^3}-\frac{2}{n^3}-\frac{3}{n^3}-\ldots-\frac{n}{n^3}\right)$ [0]

1.7.9 Výpočet limít postupností obsahujúcich odmocninu

Príklad 1.37. *Vypočítajte limity postupností*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n-5}-\sqrt{3n}\right)$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-3}}$

Riešenie:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n-5}-\sqrt{3n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{3n-5}-\sqrt{3n}\right)\cdot\frac{\sqrt{3n-5}+\sqrt{3n}}{\sqrt{3n-5}+\sqrt{3n}}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n-5-3n}{\sqrt{3n-5}+\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-5}{\sqrt{3n-5}+\sqrt{3n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-5}{\underbrace{\sqrt{n}}_{\searrow+\infty}\cdot\left(\sqrt{3-\underbrace{\frac{5}{n}}_{\searrow 0}}+\sqrt{3}\right)} =$$
$$= \frac{-5}{(+\infty)\cdot(\sqrt{3-0}+\sqrt{3})} = 0$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-3}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-3}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-3}}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-2\sqrt{n}(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-3})}{n^2+2-n^2+3} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-2\overbrace{\sqrt{n}\cdot n}^{\nearrow+\infty}\cdot\left(\sqrt{1+\overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\nearrow 0}}+\sqrt{1-\overbrace{\frac{3}{n^2}}^{\nearrow 0}}\right)}{5} =$$

$$= \frac{-2\cdot(+\infty)\cdot(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0})}{5} = \frac{-2\cdot(+\infty)\cdot 2}{5} =$$

$$= -\infty$$

Úlohy

1.21 Vypočítajte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-\sqrt{n^3-n}\right)$ $[+\infty]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{3n^2}\right)$ $[-\infty]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+2n}\right)$ $[-1]$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n}}$ $[0]$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}\right)$ $[0]$

1.7.10 Úlohy z topológie číselnej osi

Príklad 1.38. *Vyplňte tabuľku*

A	$A^{\uparrow}$	$A^{\downarrow}$	$\max A$	$\min A$	$\sup A$	$\inf A$
$\langle 0,1\rangle$						
$\langle 0,1)$						
$(0,1\rangle$						
$(0,1)$						
$\langle 0,\infty)$						
$(-\infty,1)$						
$\emptyset$						
$\mathbb{R}$						
$\{0\}$						
$\{1,2,3\}$						
$\mathbb{N}$						
$\mathbb{Z}$						
$\mathbb{Q}$						
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$						

Tabuľka 1.6:

Riešenie:

A	$A^{\uparrow}$	$A^{\downarrow}$	$\max A$	$\min A$	$\sup A$	$\inf A$
$\langle 0,1\rangle$	$\langle 1,\infty)$	$(-\infty,0\rangle$	1	0	1	0
$\langle 0,1)$	$\langle 1,\infty)$	$(-\infty,0\rangle$	$\nexists$	0	1	0
$(0,1\rangle$	$\langle 1,\infty)$	$(-\infty,0\rangle$	1	$\nexists$	1	0
$(0,1)$	$\langle 1,\infty)$	$(-\infty,0\rangle$	$\nexists$	$\nexists$	1	0
$\langle 0,\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty,0\rangle$	$\nexists$	0	$\nexists$	0
$(-\infty,1)$	$\langle 1,\infty)$	$\emptyset$	$\nexists$	$\nexists$	1	$\nexists$
$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\{0\}$	$\langle 0,\infty)$	$(-\infty,0\rangle$	0	0	0	0
$\{1,2,3\}$	$\langle 3,\infty)$	$(-\infty,1\rangle$	3	1	3	1
$\mathbb{N}$	$\emptyset$	$(-\infty,1\rangle$	$\nexists$	1	$\nexists$	1
$\mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$

Tabuľka 1.7:

Kapitola 2

Nekonečné číselné rady

2.1 Konvergencia a divergencia nekonečných číselných radov

Definícia 2.1. *Nech* $(a_n)_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \ldots$ *je postupnosť reálnych čísel. Výraz* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *sa nazýva nekonečný číselný rad. Iné označenie:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Pozor! Hovoriť, že sčítame nekonečne veľa čísel je nezmysel. Vieme sčítať len dve čísla a konečne veľa čísel.

K danému nekonečnému číselnému radu možno vytvoriť tzv. **postupnosť čiastočných súčtov:**

$$\left.\begin{array}{l} s_1 := a_1 \\ s_2 := a_1 + a_2 \\ s_3 := a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ \vdots \end{array}\right\} \begin{array}{l} (s_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je postupnosť čiastočných súčtov radu} \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \end{array}$$

Sú možnosti:

(1) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}}$ ...... povieme, že **rad** $a_1 + a_2 + \ldots$ **konverguje a má súčet s**. Niekedy píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

(2) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty}$ ...... povieme, že **rad** $a_1 + a_2 + \ldots$ **diverguje do** $+\infty$. Niekedy vravíme, že má súčet $+\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

(3) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty}$ ...... povieme, že **rad** $a_1 + a_2 + \ldots$ **diverguje do** $-\infty$. Niekedy vravíme, že má súčet $-\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

(4) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \nexists}$ ...... povieme, že **rad** $a_1 + a_2 + \ldots$ **osciluje**.

V prípadoch (2), (3) a (4) hovoríme, že rad $a_1 + a_2 + \ldots$ diverguje a v prípadoch (1), (2) a (3), že rad má súčet.

Príklad 2.1. *Rad* $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ *konverguje a má súčet rovný 1.*

Dôkaz:
Najprv si musíme určiť postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ tohoto radu. Platí:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \overset{\text{ukážeme na cvičení}}{=} 1 - \frac{1}{n+1}$$

Preto $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. Teda rad konverguje a má súčet 1. Môžeme písať

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1. \quad \square$$

Príklad 2.2. *Rad* $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ *osciluje.*

Dôkaz:
Opäť si určíme postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

$$\left.\begin{array}{l} s_1 := 1 \\ s_2 := 0 \\ s_3 := 1 \\ s_4 := 0 \\ \vdots \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} s_n, \text{ teda rad } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{ osciluje. } \square$$

Príklad 2.3. *Rad* $1 + 1 + 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ *diverguje do* $+\infty$*.*

Dôkaz:
Určíme si postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ tohoto radu. Platí:

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-krát}} = n\cdot 1 = n.$$

Potom $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$. Teda rad diverguje do $+\infty$. Môžeme písať

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty. \quad \square$$

Príklad 2.4. (Geometrický rad)
Vezmime rad $a + aq + aq^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$. *Skúmajme jeho konvergenciu a divergenciu v závislosti od hodnoty* $a, q \in \mathbb{R}$.

Riešenie:

(1) $\boxed{a = 0}$ ...... rad $0 + 0 + 0 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ **konverguje** a má **súčet 0**.

(2) $\boxed{a \neq 0}$ ...... využijeme fakt, že $s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} =$

$$= a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \overset{\text{ak } q \neq 1}{=} a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- $\boxed{|q| < 1}$ ...... $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a \cdot \frac{1 - \overbrace{q^n}^{\nearrow 0}}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}$, teda rad **konverguje** a má **súčet** $\boxed{\frac{a}{1 - q}}$.

- $\boxed{q = 1}$ ...... potom je rad tvaru

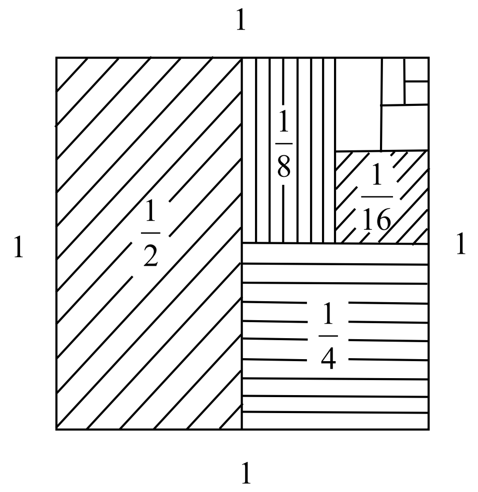
$$a + a + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a \quad \begin{cases} \boxed{a > 0} \Rightarrow \text{rad } \textbf{diverguje} \text{ do } \boxed{+\infty} \\ \boxed{a < 0} \Rightarrow \text{rad } \textbf{diverguje} \text{ do } \boxed{-\infty} \end{cases}$$

- $\boxed{q = -1}$ ...... potom je rad tvaru $a - a + a - a + a - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot (-1)^{n-1}$ $\Rightarrow$ rad **osciluje**

- $\boxed{q > 1}$ ...... $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a \cdot \frac{1 - \overbrace{q^n}^{\nearrow +\infty}}{1 - q} \right) = a \cdot (+\infty) =$

$$= \begin{cases} +\infty, \text{ ak } \boxed{a > 0} \Rightarrow \text{rad } \textbf{diverguje} \text{ do } \boxed{+\infty} \\ -\infty, \text{ ak } \boxed{a < 0} \Rightarrow \text{rad } \textbf{diverguje} \text{ do } \boxed{-\infty} \end{cases}$$

- $\boxed{q < -1}$ ...... $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a \cdot \frac{1 - \overbrace{q^n}^{\nexists \lim_{n\to\infty} q^n}}{1 - q} \right) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ $\Rightarrow$ rad **osciluje**.



Obrázok 2.1:

Poznámka 2.1. *Už starí Gréci vedeli, že* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$ *(pozri obr. 2.1).*

Príklad 2.5. (Harmonický rad)
Rad $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *diverguje do* $+\infty$.

Dôkaz:
Skúmajme hodnoty postupnosti čiastočných súčtov tohoto radu:

$$
\begin{aligned}
s_2 &= 1+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}\\
s_4 &= 1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{3}}^{\geq\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\geq 2\cdot\frac{1}{2}\\
s_8 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\overbrace{\frac{1}{5}}^{\geq\frac{1}{8}}+\overbrace{\frac{1}{6}}^{\geq\frac{1}{8}}+\overbrace{\frac{1}{7}}^{\geq\frac{1}{8}}+\frac{1}{8}\geq 3\cdot\frac{1}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Matematickou indukciou sa dá ukázať, že $s_{2^n}\geq n\cdot\frac{1}{2}, n\in\mathbb{N}$. Avšak $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}=+\infty$, teda aj $\lim\limits_{n\to\infty}s_{2^n}=+\infty$. Keďže

$$
\left.\begin{array}{l}
s_1\leq\boxed{s_2}\leq s_3\leq\boxed{s_4}\leq s_5\leq\ldots\\[2ex]
\lim\limits_{n\to\infty}s_{2^n}=+\infty
\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty,
$$

lebo neklesajúca postupnosť má limitu buď číslo alebo $+\infty$. Teda harmonický rad diverguje do $+\infty$. Môžeme písať

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.\quad\square$$

Veta 2.1. *Nech* $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=s$ *(s môže byť poprípade tiež* $+\infty$ *alebo* $-\infty$*) a nech* $k_1<k_2<k_3<\ldots$ *je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Potom je tiež* $(a_1+a_2+\ldots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+a_{k_1+2}+\ldots+a_{k_2})+(a_{k_2+1}+a_{k_2+2}+\ldots+a_{k_3})+\ldots=s$.

Poznámka 2.2. *Prvý člen radu* $(a_1+a_2+\ldots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+a_{k_1+2}+\ldots+a_{k_2})+\ldots$ *je číslo* $a_1+a_2+\ldots+a_{k_1}$*, druhý je* $a_{k_1+1}+a_{k_1+2}+\ldots+a_{k_2}$ *atď.*

Ak zlúčime v rade vždy niekoľko po sebe idúcich členov v jeden člen, ktorý má určitý súčet, dostaneme nový rad, ktorý má ten istý súčet ako pôvodný rad.

Veta 2.2. *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=s$*,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=t$ *sú konvergentné rady. Nech* c, A, B *sú čísla. Potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n=c\cdot s,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A\cdot a_n+B\cdot b_n)=A\cdot s+B\cdot t$$

Poznámka 2.3. *V súčte konečného počtu sčítancov môžeme vynechať sčítance rovné 0, súčet sa tým nezmení. To isté platí u nekonečných radov.*

(1) *Ak má rad len konečný počet členov rôznych od 0, dá sa napísať v tvare*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Tento rad zrejme konverguje a má súčet $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

(2) *Ak má rad nekonečne veľa členov rôznych od 0 a ak vynecháme (niektoré alebo všetky) nulové členy, dostaneme opäť nekonečný rad. Napr. z radu*

$$0 + 0 + c_1 + c_2 + 0 + 0 + 0 + c_3 + 0 + c_4 + \ldots \tag{2.1}$$

dostaneme rad

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots \tag{2.2}$$

Ak položíme $s_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$, *tak rad (2.2) má čiastočné súčty*

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$$

pričom rad (2.1) má čiastočné súčty

$$0, 0, s_1, s_2, s_2, s_2, s_2, s_3, s_3, s_4, \ldots.$$

Rozdiel medzi čiastočnými súčtami radov (2.1) a (2.2) je v tom, že okrem dvoch núl sa v čiastočných súčtoch radu (2.1) niektoré členy opakujú.
Teda:
Postupnosti $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ *a* $0, 0, s_1, s_2, s_2, s_2, s_2, s_3, s_3, s_4, \ldots$ *majú tie isté vlastnosti, čo sa týka existencie a hodnoty limity.*
Teda:
Rady (2.1) a (2.2) buď oba oscilujú alebo majú rovnaký súčet (*číslo*, $+\infty, -\infty$).

Veta 2.3. *Nech k je prirodzené číslo. Potom rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ *buď oba konvergujú alebo oba divergujú do* $+\infty$ *alebo* $-\infty$, *alebo oba oscilujú. Ak konvergujú, platí rovnosť:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

Poznámka 2.4. *Z vety 2.3 vyplýva, že pridanie, odstránenie alebo zmenenie konečného počtu členov v nekonečnom rade, nezmení jeho charakter. Iba v prípade konvergencie sa zmení hodnota súčtu samozrejmým spôsobom.*

Veta 2.4. *Nech* $a_1 + a_2 + \ldots = s$ *a* $b_1 + b_2 + \ldots = t$ *sú dva konvergentné rady. Nech* $a_n \leq b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Potom je* $s \leq t$. *A ak aspoň pre jednu hodnotu n je* $a_n < b_n$, *potom dokonca je* $s < t$.

Veta 2.5. (Nutná podmienka konvergencie radu)
Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, tak* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Dôkaz:

Majme rad $\overbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n}^{s_n} + \ldots$, označme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$ a teda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. $\square$

Poznámka 2.5. *Veta sa nedá obrátiť! Teda ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, vezmime napr. rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Dôsledok 2.1. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *(t.j. neexistuje alebo existuje ale nie je to 0), tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Príklad 2.6. *Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ *diverguje, lebo* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Teda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \text{rad diverguje} \\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \text{na základe vety 2.5 nevieme rozhodnúť} \end{cases}$$

Veta 2.6. (Cauchy - Bolzanovo kritérium konvergencie radu)
Rad $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *konverguje práve vtedy, keď* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N}$ $\forall\, p \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

2.2 Rady s nezápornými členmi

Ide o rady typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Z toho vyplýva, že postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ u týchto radov je neklesajúca, t.j.

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots.$$

Veta 2.7. *Rad s nezápornými členmi alebo konverguje alebo diverguje do* $+\infty$.

Konverguje ak postupnosť čiastočných súčtov je zhora ohraničená a diverguje, ak postupnosť čiastočných súčtov je zhora neohraničená.

Dôkaz:

Keďže pre rad s nezápornými členmi platí, že $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots$, tak sú dve možnosti:

(1) $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Rad konverguje a má súčet s.

(2) $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je zhora neohraničená $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Rad diverguje do $+\infty$. □

Poznámka 2.6. *Pre všeobecné rady ohraničenosť postupnosti čiastočných súčtov nestačí ku konvergencii. Vidieť to napr. na rade* $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$.

Veta 2.8. (Prvé porovnávacie kritérium)
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú dva rady s nezápornými členmi a nech* $a_n \le b_n$, $\forall\, n = 1, 2, \ldots$. *Potom*

(1) ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje* $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(2) ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje* $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje.*

Dôkaz:
Nech $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a nech $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Keďže $a_n \le b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tak aj $s_n \le t_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Potom

(1) ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{Veta 2.7}}{\Longrightarrow} (t_n)_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená $\overset{s_n \le t_n}{\Longrightarrow} (s_n)_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a teda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(2) je dôsledok (1), lebo $a \Rightarrow b$ je ekvivalentné s $\neg b \Rightarrow \neg a$. □

Poznámka 2.7. *Vo vete 2.8 stačí, aby* $a_n \le b_n \quad \forall\, n \ge n_0$.

Príklad 2.7. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

<u>Riešenie:</u>
Skúsme najprv zlomok $\dfrac{1}{n!}$ ohraničiť zhora. Platí

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \overbrace{3}^{>2} \cdot \ldots \cdot \overbrace{n}^{>2} \ge 2^{n-1},$$

teda

$$\underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} \le \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}}}_{b_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Avšak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ je geometrický rad s kvocientom $q = \dfrac{1}{2}$, ktorý konverguje. Teda podľa prvého porovnávacieho kritéria (1PK) aj rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje.

Veta 2.9. (Druhé porovnávacie kritérium)
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú dva rady s kladnými členmi a nech* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. *Potom*

(1) ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje* $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(2) ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje* $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje.*

Dôkaz:
Keďže $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, tak aj $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Z toho máme

$$k = \frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2} \geq \frac{a_3}{b_3} \geq \ldots \geq \frac{a_n}{b_n} \geq \ldots \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Teda

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &\leq k, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\ 0 \leq a_n &\leq k \cdot b_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Potom

(1) ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{Veta 2.2}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot b_n$ konverguje $\overset{\text{Veta 2.8 (1PK)}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(2) je dôsledok (1), lebo $a \Rightarrow b$ je ekvivalentné s $\neg b \Rightarrow \neg a$. $\square$

Poznámka 2.8. *Vo vete 2.9 stačí, aby* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall\, n \geq n_0$.

Veta 2.10. (Tretie porovnávacie kritérium)
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú dva rady s kladnými členmi a nech existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, *kde* $0 \leq K \leq +\infty$. *Potom*

(1) ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje a* $K < +\infty \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(2) ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje a* $K > 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Dôkaz:
(1) Keďže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K < +\infty$, tak $K \in \mathbb{R}$. Potom z definície limity pre $\varepsilon = 1$ máme, že $\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N}}$ $\boxed{\forall\, n > n_0}$ platí

$$K - 1 < \frac{a_n}{b_n} < K + 1.$$

Z toho dostávame

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &< K + 1, \\ a_n &< (K + 1) \cdot b_n. \end{aligned}$$

Zároveň $a_n > 0$, lebo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Teda $\boxed{0 < a_n < (K + 1) \cdot b_n}$.
Ďalej vieme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \overset{\text{Veta 2.2}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (K + 1) \cdot b_n \text{ konverguje.}$$

Potom využitím Vety 2.8 (1PK), Poznámky 2.7 a z orámovaných častí a z poznatku, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(K+1)\cdot b_n$ konverguje, dostávame, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(2) Nech $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = K > 0$. Potom môžu nastať dve možnosti: $K \in \mathbb{R}$ alebo $K = +\infty$.

<u>1. prípad:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}, K > 0$. Vezmime $\varepsilon = \frac{K}{2}$. Potom z definície limity k tomuto epsilonu $\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N}}$ $\boxed{\forall\, n > n_0}$ platí

$$K - \frac{K}{2} < \frac{a_n}{b_n} < K + \frac{K}{2}.$$

Z toho dostávame

$$\begin{aligned}\frac{K}{2} &< \frac{a_n}{b_n},\\ \frac{K}{2}\cdot b_n &< a_n.\end{aligned}$$

Zároveň $b_n > 0$, lebo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je rad s kladnými členmi. Teda $\boxed{0 < \frac{K}{2}\cdot b_n < a_n}$. Ďalej vieme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje} \overset{\text{Veta 2.2}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{2}\cdot b_n \text{ diverguje.}$$

Potom využitím Vety 2.8 (1PK), Poznámky 2.7 a z orámovaných častí a z poznatku, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{K}{2}\cdot b_n$ diverguje, dostávame, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

<u>2. prípad:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Vezmime $A > 0$ Potom z definície limity máme, že $\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N}}$ $\boxed{\forall\, n > n_0}$ platí

$$A < \frac{a_n}{b_n}.$$

Teda

$$A \cdot b_n < a_n.$$

Zároveň $b_n > 0$, lebo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je rad s kladnými členmi. Teda $\boxed{0 < A\cdot b_n < a_n}$. Ďalej vieme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje} \overset{\text{Veta 2.2}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} A\cdot b_n \text{ diverguje.}$$

Potom využitím Vety 2.8 (1PK), Poznámky 2.7 a z orámovaných častí a z poznatku, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A\cdot b_n$ diverguje, dostávame, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Dôsledok 2.2. *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú rady s kladnými členmi a nech* $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = K \in (0,+\infty)$. *Potom rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *majú rovnaký charakter.*

Príklad 2.8. *Zistite charakter radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$.

Riešenie:

K radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{a_n}$ vezmime rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$, o ktorom vieme, že diverguje.

Skúmajme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \in (0, +\infty).$$

Potom na základe dôsledku 2.2 máme, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ diverguje.

Príklad 2.9. *Zistite charakter radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n^3 - 2n^2 + 7}}$.

Riešenie:

K radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5n^3 - 2n^2 + 7}}}_{a_n}$ vezmime rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}_{b_n}$, o ktorom vieme, že konverguje

(ide o Riemannov p-rad pre $p = \frac{3}{2}$, pozri príklad 2.10). Skúmajme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5n^3 - 2n^2 + 7}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3}{5n^3 - 2n^2 + 7}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \in (0, +\infty).$$

Potom na základe dôsledku 2.2 máme, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n^3 - 2n^2 + 7}}$ konverguje.

Veta 2.11. (Cauchyho kritérium)
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nezápornými členmi. Potom*

(1) ak $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(2) ak $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

(3) existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, *dokonca* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Dôsledok 2.3. *Ak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *má nezáporné členy a* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *tak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*
Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *má nezáporné členy a* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *tak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Veta 2.12. (D'Alembertovo kritérium)
Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi. Potom*

(1) ak $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(2) ak $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

(3) existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Dôsledok 2.4. *Ak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi a* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *tak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Ak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi a* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *tak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Veta 2.13. (Kondenzačné kritérium)
Nech $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje* $\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x_{2^k}$ *konverguje.*

Uvedené rady majú tvar

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x_n &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x_{2^k} &= x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + \ldots \end{aligned}$$

Príklad 2.10. (Riemannov p-rad)
Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. *Skúmajme jeho konvergenciu a divergenciu v závislosti od hodnoty* $p \in \mathbb{R}$.

Riešenie:

(1) $\boxed{p < 0}$ .... $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\overbrace{(-p)}^{>0}}$. Počítajme limitu: $\lim_{n\to\infty} n^{\text{kladné}} = +\infty$. Keďže nie je splnená nutná podmienka konvergencie (Veta 2.5), tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ **diverguje**.

(2) $\boxed{p = 0}$ .... $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$. Tento rad **diverguje**.

(3) $\boxed{p > 0}$ .... $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{x_n}$. Keďže platí $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq 0$, použijeme na zistenie konvergencie nášho radu kondenzačné kritérium. Počítajme

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{(1-p)} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k$$

Dostali sme tak geometrický rad s kvocientom $q = 2^{1-p}$. Tento rad konverguje práve vtedy, keď $|q| < 1$. Teda

$$\begin{aligned} |2^{1-p}| &< 1 \\ 2^{1-p} &< 1 \\ 1-p &< 0 \\ 1 &< p \end{aligned}$$

Z kondenzačného kritéria potom máme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ **konverguje** pre $\boxed{p > 1.}$

Záver:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \text{konverguje} \iff p > 1 \\ \\ \text{diverguje} \iff p \leq 1 \end{cases}$$

Harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je hraničný prípad.

Príklad 2.11. *Určme charakter radu* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Riešenie:

Označme $x_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$. Keďže $x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq 0$, tak na zistenie konvergencie tohoto radu môžeme použiť kondenzačné kritérium. Skúmajme rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot x_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \cdot \ln 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Avšak $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je harmonický rad a ten diverguje, teda aj rad $\frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

Potom podľa kondenzačného kritéria máme, že rad $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ diverguje.

Veta 2.14. (Kummerovo (Jensenovo) kritérium)
Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi. Nech* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je nejaká postupnosť kladných čísel. Potom*

(1) ak $\liminf_{n\to\infty} \left(b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right) > 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(2) ak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ *diverguje a* $\limsup_{n\to\infty} \left(b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right) < 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Poznámka 2.9. *Ak špeciálne zvolíme* $b_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, *tak dostaneme D'Alembertovo kritérium. Ak špeciálne zvolíme* $b_n = n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, *tak dostaneme Raabeho kritérium (pozri nasledujúcu vetu).*

Veta 2.15. (Raabeho kritérium)
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi. Potom*

(1) *ak* $\liminf\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(2) *ak* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje,*

(3) *existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré* $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] = 1.$

2.3 Všeobecné rady. Ich absolútna a relatívna konvergencia.

Majme všeobecný rad

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \ \text{kde } a_i \in \mathbb{R}.$$

Z neho vieme spraviť rad s nezápornými členmi

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots .$$

V tejto časti sa budeme zaoberať tým, ako tieto dva rady súvisia z hľadiska konvergencie a ako možno využiť kritéria platiace pre rady s nezápornými členmi u všeobecných radov.

Veta 2.16. *Ak konverguje rad* $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$, *potom konverguje aj rad* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Dôkaz:
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\overset{\text{Veta 2.6 (C-B)}}{\Longrightarrow}$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N}}$ platí
$\underbrace{\big| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| \big| < \varepsilon}$

$$\Downarrow \text{ lebo } |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| =$$
$$= \big| |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| \big|$$

$\boxed{|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon}$

Z orámovaných častí využitím Vety 2.6 (Cauchy-Bolzanovho kritéria konvergencie radu) dostávame konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Definícia 2.2. *Ak* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *konverguje, ale* $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ *diverguje, povieme, že* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *relatívne konverguje. Ak* $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ *konverguje* ($\overset{\text{Veta 2.16}}{\Longrightarrow}$ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *konverguje), povieme, že* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *absolútne konverguje.*

U všeobecných radov môžu nastať tieto prípady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konverguje} \quad \ldots\ldots \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolútne konverguje}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ diverguje} \quad \ldots\ldots \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ relatívne konverguje}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ diverguje} \quad \ldots\ldots \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

Prípad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konverguje}$$

nenastane, lebo platí Veta 2.16.

Poznámka 2.10. *Veta 2.16 sa nedá obrátiť! Napr. rad*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konverguje (pozri vetu 2.19) avšak rad

$$|1| + \left| -\frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{3} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

diverguje (ide o harmonický rad).

Poznámka 2.11. (Ako pri všeobecných radoch využiť kritériá pre nezáporné rady)
Majme všeobecný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. *K nemu spravíme rad s nezápornými členmi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *a budeme vyšetrovať jeho konvergenciu pomocou kritérií pre tieto rady. Môžu nastať tieto prípady:*

(1) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \textbf{ konverguje}} \overset{\text{Veta 2.16}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (absolútne);*

(2) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \textbf{ diverguje}} \Longrightarrow$ *nevieme, čo robí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Ale, ak divergenciu radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *získame z* **Cauchyho alebo D'Alembertovho kritéria**, *tak ako vyplýva z dôkazu týchto kritérií vieme, že nie je splnená nutná podmienka konvergencie radu (Veta 2.5), t.j.* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \overset{\text{Veta 2.5}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Veta 2.17.

(1) Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje a* $c \in \mathbb{R}$, *potom aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ *absolútne konverguje.*

(2) Ak rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolútne konvergujú, potom aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *absolútne konverguje.*

Dôkaz:

(1) Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, potom z definície 2.2 máme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konverguje} \overset{\text{Veta 2.2}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (|c| \cdot |a_n|) \text{konverguje} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c \cdot a_n| \text{ konverguje}$$

Znovu využitím definície 2.2 z poznatku, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c \cdot a_n|$ konverguje dostávame, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ absolútne konverguje.

(2) Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolútne konvergujú, potom z definície 2.2 máme, že rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergujú. Z toho využitím vety 2.2 dostávame konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$. Keďže platí

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$$

a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ konverguje, využitím prvého porovnávacieho kritéria (veta 2.8) máme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$ konverguje. Opäť z definície 2.2 spätne dostávame absolútnu konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$. □

Definícia 2.3. *Nech* $a_i \geq 0 \ \forall\, i$*. Potom rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$*,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$ *sa nazývajú alternujúce rady (rady so striedavými znamienkami).*

Veta 2.18. (Leibnizovo kritérium)
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *je rad so striedavými znamienkami (t.j.* $a_i \geq 0 \ \forall\, i$ *!) a nech* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$*. Potom* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *konverguje práve vtedy, keď* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *(*$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \big((-1)^{n+1} a_n\big) = 0$*).*

Teda to čo je vo všeobecnosti iba nutnou podmienkou konvergencie je pre takéto rady aj postačujúcou podmienkou.

Veta 2.19. (Leibnitzov rad)
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots = \ln 2$

Veta 2.20. (Dirichletovo kritérium)
Nech pre rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ *platí:*

(1) postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *čiastočných súčtov radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je ohraničená*
(t.j. $\exists\, A \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \quad |s_n| \leq A$*)*

(2) postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *monotónne konverguje k nule*
(t.j. $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *označujeme skrátene aj* $b_n \searrow 0$;
alebo
$b_1 \leq b_2 \leq \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *označujeme skrátene aj* $b_n \nearrow 0$*).*

Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ *konverguje.*

Poznámka 2.12. *Ťažšia časť Lebnitzovho kritéria vyplýva z Dirichletovho kritéria, t.j.*

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \\ a_1 \geq a_2 \geq \ldots \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Dirichletovo kritérium}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{konverguje}$$

Dôkaz:
Všimnime si bližšie rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$:

(1) rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ má ohraničené čiastočné súčty (t.j. $(s_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$)

(2) postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monotónne konverguje k nule ($a_1 \geq a_2 \geq \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$)

Z (1) a (2) využitím Dirichletovho kritéria (vety 2.20) dostávame, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje. □

Príklad 2.12. *Majme rad* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$. *Skúsme vyšetriť jeho charakter.*

Riešenie:
U tohoto radu sa nedá použiť Leibnitzovo kritérium (veta 2.18), pretože znamienka sa striedajú systémom $++, --, ++, \ldots$, t.j. dvakrát plus a dvakrát mínus. Avšak z radu môžeme vytvoriť dve postupnosti:

$$(b_n)_{n=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \qquad - \text{ postupnosť čísel}$$
$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, -1, \ldots \qquad - \text{ postupnosť ”znamienok”}$$

Potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je náš rad. Keďže

(1) rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má ohraničené čiastočné súčty (t.j. $(s_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, \ldots$)

(2) postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ monotónne konverguje k nule (t.j. $b_1 > b_2 > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$)

Potom z (1) a (2) využitím Dirichletovho kritéria (vety 2.20) dostávame, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

konverguje.

Veta 2.21. (Abelovo kritérium)
Nech pre rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ *platí:*

(1) rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* ($\Rightarrow$ *postupnosť čiastočných súčtov je ohraničená);*

(2) postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je monotónna a ohraničená* ($\Leftrightarrow$ *monotónne konverguje* $\not\Rightarrow$ *monotónne konverguje k 0)*

Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ *konverguje.*

Dôkaz:
Z (2) vyplýva, že postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje, t.j. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ možno potom prepísať v tvare

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n \cdot (b_n - L) + L \cdot a_n\big] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (b_n - L) + \sum_{n=1}^{\infty} L \cdot a_n,$$

ak oba rady vpravo konvergujú.

Skúmajme teraz charakter radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (b_n - L)$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} L \cdot a_n$.

Keďže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak z vety 2.2 máme, že aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} L \cdot a_n$ konverguje. Ďalej vieme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má ohraničené čiastočné súčty, lebo tento rad konverguje (t.j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$). Navyše postupnosť $(b_n - L)_{n=1}^{\infty}$ monotónne konverguje k 0, lebo postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ monotónne konverguje k L. Z týchto dvoch faktov pomocou Dirichletovho kritéria (veta 2.20) dostávame, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (b_n - L)$ konverguje.

Nakoniec z vety 2.2 máme, že aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje, pretože je súčtom dvoch konvergentných radov. □

Príklad 2.13. *Vyšetrime charakter radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Riešenie:
Vyznačme premenné a_n a b_n v rade, teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}}_{a_n} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{b_n}.$$

Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (Leibnitzov rad) a postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a ohraničená ($b_n \nearrow e$). Teda z Abelovho kritéria (veta 2.21) máme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konverguje.

2.4 Prerovnávanie radov

Majme rad

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots. \tag{2.3}$$

Skúsme ho prerovnať, t.j. poprehadzovať jeho členy. Týmto spôsobom dostaneme napr. rad

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \dots. \tag{2.4}$$

Hovoríme, že je to prerovnaný rad k radu (2.3), alebo že tento rad je prerovnaním radu (2.3).

Otázka: Ak rad prerovnáme, môže sa zmeniť jeho charakter? Jeho súčet?
Odpoveď: Ako kedy.

Príklad 2.14.

- *rad* $\mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \dots + \mathbf{1} + \dots$ *diverguje do* $+\infty$.
  Každé jeho prerovnanie:
  $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ *diverguje do* $+\infty$.
- *rad* $\mathbf{2} - \mathbf{1} + \mathbf{2} - \mathbf{1} + \mathbf{2} - \mathbf{1} + \mathbf{2} - \mathbf{1} + \dots$ *diverguje do* $+\infty$.
  Jeho prerovnanie:
  - $2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1 + \dots$ *diverguje do* $+\infty$*;*
  - $2 - 1 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 - 1 + \dots$ *diverguje do* $-\infty$*;*
  - $2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + \dots$ *osciluje.*

Záver:
U **divergentných radov** to závisí od toho, aký konkrétny rad máme.
U **relatívne konvergentných radov** sa dá:

- divergovať do $+\infty$
- divergovať do $-\infty$

- oscilovať
- konvergovať a súčet aký chceme

U **absolútne konvergentných radov** sa prerovnaním nezmení charakter.

Definícia 2.4. *Nech* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť prirodzených čísel, v ktorej sa každé prirodzené číslo nachádza práve raz (t.j. zobrazenie* $n \longmapsto K_n$ *je bijekcia* $\mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$*). Označme* $a_n = a_{K_n}$*. Potom rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{K_n}$ *je tzv. prerovnaný rad k radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Veta 2.22. *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolútne konvergentný rad. Potom každé jeho prerovnanie je tiež absolútne konvergentný rad, a to s tým istým súčtom ako pôvodný rad.*

Veta 2.23. (Riemannova veta)
Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je relatívne konvergentný rad. Potom platí:*

(1) Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *možno prerovnať tak, že jeho súčtom bude ľubovoľné vopred zvolené reálne číslo.*

(2) Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *možno prerovnať tak, že prerovnaný rad bude divergovať do* $+\infty$ *alebo* $-\infty$*.*

(3) Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *možno prerovnať tak, že prerovnaný rad bude oscilovať.*

2.5 Cvičenie

2.5.1 Úlohy na nekonečný geometrický rad

Nekonečný geometrický rad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n, \quad s_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

- konverguje len keď $|q| < 1$, vtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \dfrac{a}{1-q} = \dfrac{\text{prvý člen}}{1 - \text{kvocient}}$

Príklad 2.15. *Zistite, ktoré nekonečné rady sú konvergentné a nájdite ich súčet.*

a) $\dfrac{2}{9} + \left(\dfrac{2}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{9}\right)^3 + \dots$

b) $\dfrac{20}{7} + \left(\dfrac{20}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{20}{7}\right)^3 + \dots$

Riešenie:
a) Uvedený rad možno všeobecne zapísať ako

$$\frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

Keďže $q = \frac{2}{9}$, tak $|q| = \left|\frac{2}{9}\right| = \frac{2}{9} < 1$, teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n$ konverguje. Ešte nájdeme jeho súčet:

$$s = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{2}{7}.$$

b) Zo zadania máme

$$\frac{20}{7} + \left(\frac{20}{7}\right)^2 + \left(\frac{20}{7}\right)^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20}{7}\right)^n$$

Teda $q = \frac{20}{7}$, potom $|q| = \left|\frac{20}{7}\right| = \frac{20}{7} > 1$. Z toho vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20}{7}\right)^n$ diverguje.

Príklad 2.16. *Zistite, či rad* $1 + \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^3 + \ldots$ *konverguje a ak áno, nájdite jeho súčet.*

Riešenie:
Uvedený rad možno všeobecne zapísať ako

$$1 + \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$$

Keďže $q = -\frac{4}{5}$, tak $|q| = \left|-\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5} < 1$, teda rad $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$ konverguje. Ešte nájdeme jeho súčet:

$$s = \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}.$$

Príklad 2.17. *Vyjadrite číslo* $27,1\overline{02}$ *v tvare zlomku v základnom tvare.*

Riešenie:

Počítajme

$$\begin{aligned}
27,1\overline{02} &= 27,1+0,002+0,00002+\ldots = 27,1+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^5}+\frac{2}{10^7}+\ldots = \\
&= 27,1+2\cdot\Bigg[\underbrace{\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+\ldots}_{\text{geom. rad}, q=\frac{1}{10^2}}\Bigg] = 27,1+2\cdot\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = \\
&= 27,1+2\cdot\frac{\frac{1}{10^3}}{\frac{99}{10^2}} = 27,1+2\cdot\frac{1}{990} = \frac{26831}{990}.
\end{aligned}$$

Číslo $27,1\overline{02}$ možno napísať ako $\dfrac{26831}{990}$.

Úlohy

2.1 Zistite, ktoré nekonečné rady sú konvergentné a nájdite ich súčet.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+\ldots$ $\left[\text{konverguje}, s=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\right]$

b) $(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)^2+(\sqrt{5}-2)^3+\ldots$ $\left[\text{konverguje}, s=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$

c) $\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^3+\ldots$ [diverguje]

2.2 Nájdite súčet nekonečného radu:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{7}\right)^n$ $\left[-\dfrac{5}{12}\right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\left[\dfrac{2}{5}\right]$

2.3 Vyjadrite dané číslo v tvare zlomku v základnom tvare:

a) $2,\overline{123}$ $\left[\dfrac{707}{333}\right]$

b) $1,0\overline{19}$ $\left[\dfrac{1009}{990}\right]$

c) $1,\overline{63}$ $\left[\dfrac{18}{11}\right]$

d) $0,2\overline{4}$ $\left[\dfrac{22}{90}\right]$

2.5.2 Úlohy na určenie súčtu nekonečného číselného radu

Nekonečný číselný rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ má súčet, ak $\exists \lim\limits_{n\to\infty}s_n$, vtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}s_n=\begin{cases} s\in\mathbb{R}\\ +\infty\\ -\infty\end{cases},$$

kde $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov tohoto radu, t.j. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 2.18. *Nájdite súčty nekonečných číselných radov:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$

Riešenie:
a) Skúsme najprv n-tý člen radu napísať ako súčet dvoch zlomkov, t.j.

$$a_n = \boxed{\frac{1}{n\cdot(n+1)}} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \boxed{\frac{n(A+B)+A}{n(n+1)}}$$

Porovnaním čitateľov orámovaných zlomkov dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Jej riešením je $B=-1$ a $A=1$. Po dosadení do a_n máme

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Teraz si môžeme vyjadriť s_n:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \\ &= \frac{1}{1} \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{4} +}_{=0} \ldots \underbrace{+ \frac{1}{n-1} - }_{=0}\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{=0} - \frac{1}{n+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Potom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{\nearrow 0}\right) = 1.$

b) Opäť skúsme najprv n-tý člen radu napísať ako súčet troch zlomkov, t.j.

$$\begin{aligned} a_n &= \boxed{\frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n-2} = \\ &= \frac{A(n-1)(n-2) + Bn(n-2) + Cn(n-1)}{n(n-1)(n-2)} = \\ &= \frac{A(n^2-3n+2) + B(n^2-2n) + C(n^2-n)}{n(n-1)(n-2)} = \\ &= \boxed{\frac{n^2(A+B+C) + n(-3A-2B-C) + 2A}{n(n-1)(n-2)}} \end{aligned}$$

Porovnaním čitateľov orámovaných zlomkov (t.j. koeficientov pri n^2, n^1 a n^0) dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -3A-2B-C &= 0 \\ 2A &= 1 \end{aligned}$$

Jej riešením je $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$ a $C=\frac{1}{2}$. Po dosadení do a_n máme

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{\frac{1}{2}}{n-2}.$$

Teraz si môžeme vyjadriť s_n:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 4\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)} = \\ &= \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1}}_{a_1} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{2}}_{a_2} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{5} - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{3}}_{a_3} + \ldots + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{\frac{1}{2}}{n-2}}_{a_n} \end{aligned}$$

Teraz si podpíšeme jednotlivé členy radu a_1, a_2, …, a_n v súčte s_n pod seba nasledovným spôsobom:

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{3} \boxed{+\frac{\frac{1}{2}}{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{5} - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{n-2} - \frac{1}{n-3} + \frac{\frac{1}{2}}{n-4}$$

$$\boxed{\frac{\frac{1}{2}}{n-1}} - \frac{1}{n-2} + \frac{\frac{1}{2}}{n-3}$$

$$\boxed{\frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{n-2}$$

Skúsme jednotlivé zlomky sčitovať po stĺpcoch. Stĺpce obsahujúce 3 zlomky dávajú v súčte nulu, napr. $\frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{3} = 0$, teda v súčte s_n ostanú len orámované zlomky

$$s_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{n-1} + \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2n}$$

Potom $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \overbrace{\frac{1}{2(n-1)}}^{\nearrow 0} + \overbrace{\frac{1}{2n}}^{\nearrow 0}\right) = \frac{1}{4}.$

c) Najprv si n-tý člen radu napíšeme ako súčet štyroch zlomkov, t.j.

$$\begin{aligned}
a_n &= \boxed{\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}} = \frac{A}{n^2} + \frac{B}{(n+1)^2} + \frac{C}{n} + \frac{D}{n+1} = \\
&= \frac{A(n+1)^2 + Bn^2 + Cn(n+1)^2 + Dn^2(n+1)}{n^2\cdot(n+1)^2} = \\
&= \boxed{\frac{n^2(A+B+2C+D) + n(2A+C) + A}{n^2\cdot(n+1)^2}}
\end{aligned}$$

Porovnaním čitateľov orámovaných zlomkov (t.j. koeficientov pri n^2, n^1 a n^0) dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}
A+B+2C+D &= 0\\
2A+C &= 2\\
A &= 1
\end{aligned}$$

Jej riešením je $A=1$, $B=-1$, $C=0$ a $D=0$. Po dosadení do a_n máme

$$a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Teraz si môžeme vyjadriť s_n:

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} = \\
&= \frac{1}{1^2} \underbrace{- \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{4^2} +}_{=0} \ldots \underbrace{+ \frac{1}{(n-1)^2}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}_{=0} - \frac{1}{(n+1)^2} = \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Potom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\cdot(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \overbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}^{\nearrow 0}\right) = 1.$

Príklad 2.19. *Určte súčet nekonečných číselných radov:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

Riešenie:
a) Najprv si určíme s_n:

$$\begin{aligned} s_n &= \ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{\ln a+\ln b=\ln a\cdot b}{=} \\ &= \ln\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \\ &= \ln\left[2\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right] = \ln(n+1) \end{aligned}$$

Potom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty.$

b) Určíme si s_n:

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\ldots+(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2})+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = \\ &= (-\sqrt{0}+\underbrace{\sqrt{1})+(-\sqrt{1}}_{=0}+\underbrace{\sqrt{2})+}_{=0}\ldots\underbrace{+(-\sqrt{n-2}}_{=0}+\underbrace{\sqrt{n-1})+(-\sqrt{n-1}}_{=0}+\sqrt{n}) = \\ &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

Potom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty.$

c) Najprv si upravíme n-tý člen radu tak, že zlomok vynásobíme číslom 1:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}}_{=1} \overset{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}{=} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n+1-n+1} = \\ &= -\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}) \end{aligned}$$

Ďalej si určíme s_n:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \\ &= -\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{0}-\underline{\sqrt{2}}+\sqrt{1}-\underline{\sqrt{3}}+\underline{\sqrt{2}}-\underline{\sqrt{4}}+\underline{\sqrt{3}}-\underline{\sqrt{5}}+\ldots+\underline{\sqrt{n-3}}-\underline{\sqrt{n-1}}+ \\ &+ \underline{\sqrt{n-2}}-\sqrt{n}+\underline{\sqrt{n-1}}-\sqrt{n+1}) = -\frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}), \end{aligned}$$

kde podčiarknuté výrazy vypadnú, t.j. napr. $-\sqrt{2}$ sa vynuluje neskôr s $\sqrt{2}$. Potom

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} &= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\big(1-(+\infty)-(+\infty)\big) = -\frac{1}{2}\cdot(-\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Úlohy

2.4 Nájdite súčty nekonečných číselných radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2}$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+3n^2+2n}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

2.5.3 Vyšetrovanie konvergencie nekonečných radov

<u>1. porovnávacie kritérium:</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n;\ a_n, b_n \geq 0;\ a_n \leq b_n \quad \forall\, n$

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

<u>3. porovnávacie kritérium:</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n;\ a_n, b_n > 0$

ak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K \in (0, +\infty)$, tak oba rady majú rovnaký charakter (t.j. buď oba divergujú alebo oba konvergujú).

Príklad 2.20. *Pomocou porovnávacieho kritéria vyšetrite konvergenciu radov:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin\frac{1}{n}$

<u>Riešenie:</u>

a) Uvedieme dva spôsoby riešenia.

<u>1. spôsob:</u> Skúsime ohraničiť n-tý člen radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1}$. Pre $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leq & n \quad | + 100n \\ 100n+1 & \leq & 101n \\ \underbrace{\dfrac{1}{101n}}_{a_n} & \leq & \underbrace{\dfrac{1}{100n+1}}_{b_n} \end{array}$$

Avšak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje $\Longrightarrow$ rad $\frac{1}{101}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{101n}$ diverguje, teda z 1. porovnávacieho kritéria (1.PK) máme, že aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100n+1}$ diverguje.

2. spôsob: Najprv si nájdeme pomocný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, ktorého n-tý člen bude zlomok s menovateľom obsahujúcim premennú n v najvyššej mocnine aká je v menovateli zlomku $\frac{1}{100n+1}$ (u nás je to $n^1 = n$). Teda pomocný rad bude mať tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, tento rad diverguje. Zrátame ešte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{100n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100} \in (0,+\infty)$$

Teda podľa 3. porovnávacieho kritéria rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100n+1}$ diverguje.

b) Najprv si upravíme n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$:

$$a_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

Teda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

Opäť si uvedieme dva spôsoby riešenia.

1. spôsob: Skúsime ohraničiť n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$. Pre $\forall\, n\in\mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} n-1 &< n \\ \sqrt{n-1} &< \sqrt{n} \quad |+\sqrt{n} \\ \sqrt{n}+\sqrt{n-1} &< 2\sqrt{n} \\ \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{n}}}_{a_n} &< \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}}_{b_n} \end{aligned}$$

Avšak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverguje (Riemannov p rad, $p=\frac{1}{2}$) $\Longrightarrow$ rad $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverguje, teda z 1. porovnávacieho kritéria (1.PK) máme, že aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ diverguje.

2. spôsob: Najprv si nájdeme pomocný rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ktorého n-tý člen bude zlomok s menovateľom obsahujúcim premennú n v najvyššej mocnine aká je v menovateli zlomku $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ (u nás je to $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$). Teda pomocný rad bude mať tvar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, tento rad diverguje. Zrátame ešte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{2} \in (0, +\infty)$$

Teda podľa 3. porovnávacieho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ diverguje.

c) Skúsime ohraničiť n-tý člen radu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$. Pre $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \ln n &< n \\ \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} &< \underbrace{\frac{1}{\ln n}}_{b_n} \end{aligned}$$

Avšak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, teda z 1. porovnávacieho kritéria (1.PK) máme, že aj rad $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverguje.

d) Uvedieme znovu dva spôsoby riešenia.

1. spôsob: Skúsime ohraničiť n-tý člen radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$. Platí

$$\begin{aligned} |\sin x| &< |x| \\ \left|\sin \frac{\pi}{3^n}\right| &< \left|\frac{\pi}{3^n}\right| \\ 0 \le \underbrace{\sin \frac{\pi}{3^n}}_{a_n} &< \underbrace{\frac{\pi}{3^n}}_{b_n} = \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Avšak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konverguje (geometrický rad, $q = \frac{1}{3}$) $\Longrightarrow$ rad $\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konverguje, teda z 1. porovnávacieho kritéria (1.PK) máme, že aj rad

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$ konverguje.

2. spôsob: Vezmime pomocný rad tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3^n}$, tento rad konverguje. Zrátajme ešte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \overbrace{\frac{\pi}{3^n}}^{=t\to 0}}{\underbrace{\frac{\pi}{3^n}}_{=t\to 0}} \overset{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}=1}{=} 1 \in (0, +\infty)$$

Teda podľa 3. porovnávacieho kritéria rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$ konverguje.

e) Uvedieme dva spôsoby riešenia.

1. spôsob: Skúsime ohraničiť n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{1}{n}$. Platí

$$\begin{aligned} |\sin x| &< |x| \\ \left|\sin \frac{1}{n}\right| &< \left|\frac{1}{n}\right| \\ \sin \frac{1}{n} &< \frac{1}{n} \\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{1}{n}}_{a_n} &< \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}\cdot n}}_{b_n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Avšak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje (Riemannov p rad, $p = \frac{3}{2}$), teda z 1. porovnávacieho kritéria (1.PK) máme, že aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{1}{n}$ konverguje.

2. spôsob: Vezmime pomocný rad tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, tento rad konverguje. Zrátajme ešte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}\cdot n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \overbrace{\frac{1}{n}}^{=t\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{n}}_{=t\to 0}} \overset{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}=1}{=} 1 \in (0, +\infty)$$

Teda podľa 3. porovnávacieho kritéria rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{1}{n}$ konverguje.

Nutná podmienka konvergencie (NPK):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

Príklad 2.21. *Využitím NPK dokážte, že rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{7n+1}$ *diverguje.*

Riešenie:
Vypočítame $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{7n+1} = \frac{2}{7} \neq 0 \overset{\text{NPK}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{7n+1} \text{ diverguje.}\square$$

D'Alembertovo kritérium (D'AK): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Longrightarrow$ neviem rozhodnúť

Príklad 2.22. *Vyšetrite konvergenciu radov pomocou D'Alembertovho kritéria:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2}\right)^2 \cdot \sin \dfrac{\pi}{2^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

Riešenie:
a) Vypočítame $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\big((n+1)!\big)^2}{\big(2(n+1)\big)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\big[(n+1)\cdot n!\big]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1
\end{aligned}$$

Potom z D'Alembertovho kritéria máme, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konverguje.

b) Znovu vypočítame $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^2\cdot\sin\underbrace{\frac{\pi}{2^n}}_{=2\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}}} \overset{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = (1)^2\cdot\frac{1}{2\cdot\cos 0} = \frac{1}{2} < 1$$

Potom z D'Alembertovho kritéria máme, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$ konverguje.

c) Vypočítame $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\overbrace{\frac{n+1}{n}}^{\nearrow 1}\cdot\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\mathrm{tg}\left(2\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \overset{\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \overset{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{2\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\cos 0}{2\cdot(\cos 0)^2} = \frac{1}{2\cdot 1^2} = \frac{1}{2} < 1$$

Potom z D'Alembertovho kritéria máme, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$ konverguje.

Cauchyho kritérium (CK): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \Longrightarrow$ neviem rozhodnúť (skúsim, či je splnená NPK)

Príklad 2.23. *Pomocou Cauchyho kritéria vyšetrite konvergenciu radov:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big(\ln(n+1)\big)^{n+1}}$

Riešenie:

a) Vypočítame najprv $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \operatorname{arctg} 0 = 0 < 1$$

Teda podľa Cauchyho kritéria rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n$ konverguje.

b) Znovu si vypočítame $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\big(\ln(n+1)\big)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\big(\ln(n+1)\big)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\big(\ln(+\infty)\big)^{1}} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0 < 1\end{aligned}$$

Teda podľa Cauchyho kritéria rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big(\ln(n+1)\big)^{n+1}}$ konverguje.

Leibnitzovo kritérium (LK): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,\ a_n \geq 0,\ a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ konverguje} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Príklad 2.24. *Vyšetrite konvergenciu nekonečného radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ *pomocou Leibnitzovho kritéria.*

Riešenie:

Najprv overíme podmienky Leibnitzovho kritéria, t.j $a_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} > 0$ a $\forall\, n$ platí $a_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} > \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$. Teraz vypočítame $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$$

Teda podľa Leibnitzovho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ konverguje.

Úlohy

2.5 Pomocou porovnávacieho kritéria overte konvergenciu radov:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ [diverguje]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)^2}$ [konverguje]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n+1}}$ [konverguje]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ [konverguje]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ [diverguje]

2.6 Využitím NPK dokážte, že dané rady sú divergentné:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

2.7 Vyšetrite konvergenciu radov pomocou D'Alembertovho kritéria:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ [konverguje]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ [konverguje]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ [diverguje]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)!}$ [konverguje]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ [konverguje]

2.8 Pomocou Cauchyho kritéria vyšetrite konvergenciu nekonečných radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$ [konverguje]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n-1}$ [konverguje]

2.9 Vyšetrite konvergenciu nekonečného radu pomocou Leibnitzovho kritéria:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(2n+1)}$ [konverguje]

Literatúra

[1] Burjan, V. - Hrdina, Ľ. - Maxian, M.: *Prehľad matematiky, 2. časť*, SPN Bratislava, 1998.

[2] Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 2*, STU Bratislava, 1995.

[3] Kadlečková, M. - Rašiová, M. - Špirková, J. - Zimka, R.: *Praktikum z matematiky I*, Ekonómia Banská Bystrica, 2006.

[4] Kadlečková, M. - Rašiová, M. - Špirková, J. - Zimka, R.: *Zbierka úloh z matematiky II*, Matcentrum Zvolen, 2001.

[5] Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M.: *Matematika I*, SVTL Bratislava, 1966.

[6] Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M.: *Matematika II*, SVTL Bratislava, 1965.

[7] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia. Postupnosti a řady.*, Prometheus Praha, 1999.

[8] Sivák, B. - Snoha, Ľ.: *Matematická analýza I*, Pedagogická fakulta Banská Bystrica, 1985.

[9] Vejsada, F. - Talafous, F.: *Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ*, SPN Bratislava, 1972.

Autor: RNDr. Katarína Čunderlíková, PhD.

Názov: Postupnosti a nekonečné rady pre učiteľov
Vysokoškolské skriptá

Vydavateľ: Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici
Vydanie: 1. vydanie
Rok: 2011

Rozsah: 108 strán
Formát: A4
Väzba: brožovaná
Náklad: 100 ks

Tlač: Bratia Sabovci s.r.o., Zvolen

ISBN: 978-80-557-0273-5