Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici

Pedagogická fakulta

ALGEBRA III

Lineárna algebra

M. Haviar

2000

Obsah

Predslov

Cieľom týchto skrípt je oboznámiť študentov učiteľského štúdia (kombinácií s matematikou) so základnými pojmami a poznatkami lineárnej algebry.

Pri našom výklade sme zvolili obsahové členenie odlišné od známej učebnice [3], kde sa začína s vektorovými priestormi. Naším cieľom je už v prvej časti skrípt oboznámiť čitateľa s metódami riešenia sústav lineárnych rovníc nad poliami (kapitoly 1–4). Až v druhej časti skrípt prechádzame k skúmaniu algebraickej štruktúry množín riešení sústav lineárnych rovníc a budujeme teóriu vektorových priestorov (kapitoly 5–10).

Náš výklad preto začíname maticami a elementárnymi riadkovými operáciami na maticiach ako základným nástrojom, ktorý potom využívame v celom ďalšom texte. Postupne ukazujeme budúcemu učiteľovi vzájomne jednoznačnú korešpondenciu matíc so sústavami lineárnych rovníc (kapitoly 2, 3), podpriestormi konečnorozmerných vektorových priestorov (kapitoly 5–7) a lineárnymi zobrazeniami medzi nimi (kapitola 9). Použitím determinantov pri riešení sústav lineárnych rovníc sa zaoberáme v závere prvej časti (kapitola 4). V centre nášho záujmu v druhej časti sú konečnorozmerné vektorové priestory (kapitola 6). Potrebné súvislosti s maticami a sústavami lineárnych rovníc dopĺňame v kapitole 7. V závere nášho výkladu ukazujeme, že konečnorozmerné euklidovské vektorové priestory nad $\mathbb{R}$ sú z algebraického hľadiska “nerozlíšiteľné” od známych priestorov n-tíc reálnych čísel (kapitola 10).

Do týchto skrípt sme nezaradili v závere kapitol ďalšie cvičenia, pretože cvičenia z lineárnej algebry plánujeme v budúcnosti robiť aj pod niektorým zo softwarových programov Mathematica, Maple alebo MatLab. Radi by sme vydali pracovný zošit vhodný i pre takúto formu cvičení, ktorý sa bude v priebehu rokov flexibilne obmieňať v súlade s vývojom informačných technológií a nášho softwarového vybavenia. Pritom teória by mala zostať nemenná, preto sme považovali za vhodné oddeliť ju od súborov cvičení. Náš výklad je však bohato ilustrovaný 45 riešenými príkladmi.

Pretože tento text je napísaný v AMS-LaTeXu, mohli sme si dovoliť zaradiť na jeho koniec Index, ktorý má umožniť vyhľadávanie a dobrú orientáciu v texte. Číslovanie jednotlivých položiek v texte ako definície, lemy, vety, dôsledky a príklady je zvyčajným spôsobom $x.y$, kde x je číslo kapitoly a y je poradové číslo položky v kapitole x. Pre označovanie polí používame font “field”, teda pole reálnych čísel je označované $\mathbb{R}$. Symbol $:=$ znamená, že ide o definujúcu rovnosť. Koniec dôkazu označujeme zvyčajným symbolom $\square$ a koniec príkladu symbolom $\blacksquare$. Ak definujeme nový pojem v texte a nie v rámci osobitnej definície, používame preň font *italic*. Ak chceme určité slovo alebo formuláciu v texte zdôrazniť, používame font **bold**. Skladanie zobrazení robíme tak, že $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, teda tiež odlišne od [3]. Zaradili sme aj historické poznámky, ktoré uvádzame pod čiarou.

Podnety a komentáre z radov študentov i ostatných čitateľov tohto textu uvítam. Možno ich posielať e-mailom na adresu haviar@pdf.umb.sk.

V Melbourne, 28. augusta 2000

autor

1. Matice

Úvodné slovo. Matice hrajú centrálnu úlohu v lineárnej algebre. V tomto texte ukážeme ich vzájomne jednoznačnú korešpondenciu so sústavami lineárnych rovníc, podpriestormi konečnorozmerných vektorových priestorov a lineárnymi zobrazeniami konečnorozmerných vektorových priestorov. V tejto kapitole bude naším cieľom oboznámiť čitateľa so základnými pojmami a poznatkami týkajúcimi sa matíc typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$. Uvidíme napríklad, že tak ako pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí

$$a + b = b + a,\ a + (b + c) = (a + b) + c,\ a(bc) = (ab)c,\ a(b + c) = ab + ac,$$

tak tieto zákony platia aj pre sčítanie a násobenie matíc nad poľom. Na druhej strane, nie všetky pravidlá na ktoré si čitateľ zvykol pri práci s reálnymi číslami budú platiť u matíc. V algebre $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ nenulových reálnych čísel s násobením má napríklad každý prvok inverzný prvok, v algebre nenulových matíc s násobením, ako neskôr uvidíme, tomu tak nie je. Podobne komutatívnosť násobenia, ktorá platí pre reálne čísla, neplatí vo všeobecnosti pre matice. V tejto kapitole okrem iného ukážeme, že množina všetkých matíc typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$ s operáciami sčítania a násobenia tvorí okruh. Neskôr v kapitole 5 ukážeme, že matice nad $\mathbb{F}$ so sčitovaním a násobením skalárom z poľa $\mathbb{F}$ tvoria vektorový priestor.

Pojem matice.

1.1. Definícia *Nech $\mathbb{F}$ je pole a m, n sú prirodzené čísla. Pod maticou typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$ rozumieme obdĺžnikovú tabuľku prvkov poľa $\mathbb{F}$ pozostávajúcu z m riadkov (vodorovné zoskupenia prvkov) a n stĺpcov (zvislé zoskupenia prvkov).*

Matice budeme označovať veľkými polotučnými písmenami $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}, \ldots$. Prvok poľa $\mathbb{F}$ nachádzajúci sa v i-tom riadku a j-tom stĺpci matice $\mathbf{A}$ budeme označovať a_{ij}. V súlade s tým maticu $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ s prvkami a_{ij} budeme zapisovať v tvare

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a skrátene písať $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$. Ak $m = n$, hovoríme, že $\mathbf{A}$ je *štvorcová matica stupňa* n a píšeme $\mathbf{A} = [a_{ij}]_n$. V takom prípade zoskupeniu prvkov $a_{ii},\ i = 1, \ldots, n$ hovoríme *hlavná diagonála* matice $\mathbf{A}$.

Množinu všetkých matíc typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$ budeme označovať $M_{m,n}(\mathbb{F})$. V prípade štvorcových matíc stupňa n namiesto $M_{n,n}(\mathbb{F})$ budeme písať $M_n(\mathbb{F})$.

V množine $M_{m,n}(\mathbb{F})$ zaujíma zvláštne postavenie *nulová matica* $\mathbf{0} = [0_{\mathbb{F}}]_{m,n}$, ktorej všetky prvky sú rovné nulovému prvku poľa $\mathbb{F}$ a v množine $M_n(\mathbb{F})$ je to okrem nulovej matice i *jednotková matica* $\mathbf{I}_n = [a_{ij}]_n$ kde $a_{ii} = 1_{\mathbb{F}}$ (jednotkový prvok poľa $\mathbb{F}$) pre $i = 1, \ldots, n$ a $a_{ij} = 0_{\mathbb{F}}$ pre všetky $i \neq j$.

1.2. Definícia *Hovoríme, že matica* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ *sa rovná matici* $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{p,q}$, *ak* $m = p$ *a* $n = q$, *t.j. ak obe sú rovnakého typu a ak* $a_{ij} = b_{ij}$ *pre všetky* $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

1.3. Príklad Nech a, b, c, d, e, f sú reálne čísla a nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0{,}\overline{3} & 17 & \pi \end{pmatrix}$$

sú matice typu 2×3 nad poľom $\mathbb{R}$. Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sa rovnajú práve vtedy, keď $a = -2, b = \frac{3}{2}, c = 0, d = 0{,}\overline{3}, e = 17$ a $f = \pi$. Podobne, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ práve vtedy, keď $a = b = c = d = e = f = 0$. ■

Sčitovanie matíc a násobenie matíc skalárom.

1.4. Definícia *Nech* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *a* $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ *sú matice typu* $m \times n$ *nad poľom* $\mathbb{F}$. *Súčtom matíc* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *nazývame maticu* $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ *typu* $m \times n$ *takú, že* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *pre všetky* i, j. *Píšeme* $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Upozorňujeme, že súčet matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je definovaný iba v prípade, keď $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú toho istého typu.

Opačnou maticou k matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ nazývame maticu $-\mathbf{A} = [-a_{ij}]$. Matice $\mathbf{A}$ a $-\mathbf{A}$ majú ten istý typ a ľahko vidieť, že platí

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A}. \tag{1.1}$$

1.5. Definícia *Nech* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *je matica typu* $m \times n$ *nad poľom* $\mathbb{F}$. *Pre ľubovoľný skalár* $c \in \mathbb{F}$ *definujeme (skalárny) c-násobok matice* $\mathbf{A}$ *ako maticu* $\mathbf{B} = [c \cdot a_{ij}]_{m,n}$ *nad* $\mathbb{F}$. *Píšeme* $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$.

1.6. Príklad Nech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú matice z príkladu 1.3. Potom

$$-\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0{,}\overline{6} & 34 & 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - a & 3 - b & -c \\ 0{,}\overline{6} - d & 34 - e & 2\pi - f. \end{pmatrix}$$

■

Na základe predchádzajúcich definícií a na základe vlastností sčítania a násobenia prvkov v poli $\mathbb{F}$, čitateľ iste ľahko odvodí platnosť nasledujúcich tvrdení.

1.7. Lema *Pre ľubovoľné matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ *a skaláry* $c, d \in \mathbb{F}$ *platí:*

(1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
(2) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$;
(3) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
(4) $c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A}$;
(5) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$;
(6) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$.

Tvrdenie (2) hovorí, že sčitovanie matíc je asociatívne, a preto pri sčítaní troch alebo viacerých matíc nie je potrebné písať zátvorky. Ďalej si všimnime, že v (5) symbol + na ľavej strane reprezentuje sčítanie v $\mathbb{F}$, zatiaľčo symbol + na pravej strane reprezentuje sčítanie v $M_{m,n}(\mathbb{F})$.

Násobenie matíc. Násobenie matíc je komplikovanejšie ako sčítanie. Súčin matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{B}$ je definovaný len vtedy, keď **počet stĺpcov matice A sa rovná počtu riadkov matice B**.

1.8. Definícia *Nech* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ *a* $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,p}$ *sú matice nad* $\mathbb{F}$. *Súčinom matíc* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *je matica* $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m,p}$ *nad* $\mathbb{F}$, *kde pre všetky* $i = 1, \ldots, m$ *a* $j = 1, \ldots, p$ *platí*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Píšeme $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

1.9. Príklad Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

sú matice nad $\mathbb{R}$. Pretože počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ sa rovná počtu riadkov matice $\mathbf{B}$, možno utvoriť súčin $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, čo je matica typu 2×2. Ukážeme ako sa v matici $\mathbf{C}$ vypočíta prvok c_{21}. V súlade s definíciou 1.8 vezmeme druhý riadok matice $\mathbf{A}$ a prvý stĺpec matice $\mathbf{B}$ (oba obsahujú po tri prvky), vynásobime prvý (druhý, tretí) prvok daného riadku s prvým (druhým, tretím) prvkom v danom stĺpci a sčítame:

$$c_{21} = 0 \cdot 3 + \frac{3}{2} \cdot 2 + (-4) \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Analogicky sa vypočítajú prvky c_{11}, c_{12}, c_{22}. Dostaneme

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{a podobne} \quad \mathbf{D} := \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -20 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

■

V nasledujúcom príklade ukazujeme, že násobenie matíc nie je vo všeobecnosti komutatívne a že súčinom nenulových matíc môže byť nulová matica.

1.10. Príklad Zoberme nenulové matice

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$. Vynásobením sa presvedčíme, že

$$\mathbf{ST} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ale} \quad \mathbf{TS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

■

Čitateľ sa už pravdepodobne stretol s označením

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Toto označenie možno prirodzene rozšíriť a použiť pre vyjadrenie prvku c_{ij} matice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Čitateľ sa presvedčí o užitočnosti takéhoto stručného označovania už pri dôkaze nasledujúcich tvrdení o vlastnostiach operácie násobenia matíc.

1.11. Lema *Nech* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *sú matice nad poľom* $\mathbb{F}$.

(1) *Ak súčin* $\mathbf{AB}$ *je definovaný, tak pre všetky skaláry* $c \in \mathbb{F}$ *platí* $(c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$.

(2) *Ak súčiny* $\mathbf{AB}$ *a* $\mathbf{BC}$ *sú definované, tak sú definované aj súčiny* $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ *a platí* $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

(3) *Ak súčiny* $\mathbf{AB}$ *a* $\mathbf{AC}$ *sú definované, tak je definovaný aj súčin* $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ *a platí distributívnosť násobenia vzhľadom na sčítanie zľava:* $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.

(4) *Ak súčiny* $\mathbf{BA}$ *a* $\mathbf{CA}$ *sú definované, tak je definovaný aj súčin* $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}$ *a platí distributívnosť násobenia vzhľadom na sčítanie sprava:* $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$.

Dôkaz Urobíme dôkaz (2). (Dôkazy ostatných tvrdení prenechávame na čitateľa.)

Predpokladajme, že $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$ nad $\mathbb{F}$. Pretože súčiny $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{BC}$ sú definované, $\mathbf{B}$ je matica typu $n \times p$ a $\mathbf{C}$ je matica typu $p \times q$ pre nejaké prirodzené čísla p, q. Nech $\mathbf{AB} = \mathbf{E} = [e_{ij}]_{m,p}$ a $\mathbf{BC} = \mathbf{F} = [f_{ij}]_{n,q}$. Je zrejmé, že súčiny $\mathbf{G} := (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ a $\mathbf{H} := \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ sú definované a oba sú matice typu $m \times q$. Ostáva ukázať, že prvky g_{ij} a h_{ij} matíc $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$ sú rovnaké pre všetky $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, q$.

Podľa definície 1.8 prvok g_{ij} matice $\mathbf{G} = \mathbf{EC}$ je

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{p} e_{ik}c_{kj}, \quad \text{kde} \quad e_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}.$$

Po dosadení teda dostaneme

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk} \right) c_{kj}.$$

Analogicky možno vyjadriť prvok h_{ij} matice $\mathbf{H} = \mathbf{AF}$:

$$h_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj} \right).$$

Prvky g_{ij} i h_{ij} sú teda súčtami pn sčítancov $a_{il}b_{lk}c_{kj}$ pre $l = 1 \dots, n$ a $k = 1, \dots, p$, a teda sa rovnajú. □

V kapitole 9 ukážeme, ako alternatívny dôkaz, že asociatívnosť násobenia matíc vyplýva z asociatívnosti skladania im odpovedajúcich lineárnych zobrazení.

1.12. Veta *Množina $M_n(\mathbb{F})$ štvorcových matíc stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$ spolu s operáciami sčítania a násobenia matíc tvorí okruh $(M_n(\mathbb{F}), +, \cdot)$ s jednotkovým prvkom $\mathbf{I}_n$. Vo všeobecnosti ide o nekomutatívny okruh, ktorý nie je oborom integrity.*

Dôkaz Pre ľubovoľnú maticu $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{F})$ zrejme platí $\mathbf{AI}_n = \mathbf{A} = \mathbf{I}_n\mathbf{A}$. Prvá časť vety teraz vyplýva z lemy 1.7, rovností (1.1) a z lemy 1.11. Druhá časť vety vyplýva z toho, čo bolo ukázané v príklade 1.10. □

Inverzné a transponované matice. Štvorcová matica $\mathbf{A}$ stupňa n sa nazýva *regulárna* (alebo *invertovateľná*), ak existuje k nej štvorcová matica $\mathbf{B}$ taká, že

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

V takom prípade hovoríme, že $\mathbf{B}$ je *inverzná matica* k matici $\mathbf{A}$. Ak matica $\mathbf{A}$ nie je regulárna (nemá inverznú maticu), hovorí sa niekedy, že je *singulárna.*

1.13. Veta

(1) *Inverzná matica k regulárnej matici $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{F})$ je jednoznačne určená.*
(2) *V okruhu $M_n(\mathbb{F})$ je súčin regulárnych matíc opäť regulárna matica.*

Dôkaz (1) Predpokladajme, že $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{F})$ sú inverzné matice k matici $\mathbf{A}$, t.j. platí

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n = \mathbf{AC}.$$

Keďže podľa vety 1.12 je $(M_n(\mathbb{F}), \cdot)$ pologrupa s jednotkou $\mathbf{I}_n$, dostávame

$$\mathbf{B} = \mathbf{BI}_n = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{C}.$$

(2) Ak $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{F})$ sú regulárne matice, potom v $M_n(\mathbb{F})$ existujú matice $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ tak, že

$$\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}_n = \mathbf{BD} = \mathbf{DB}.$$

Opäť využitím faktu, že $(M_n(\mathbb{F}), \cdot)$ je pologrupa s jednotkou $\mathbf{I}_n$ dostaneme

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{DC}) = ((\mathbf{AB})\mathbf{D})\mathbf{C} = (\mathbf{A}(\mathbf{BD})\mathbf{C}) = (\mathbf{AI}_n)\mathbf{C} = \mathbf{AC} = \mathbf{I}_n$$
$$(\mathbf{DC})(\mathbf{AB}) = ((\mathbf{DC})\mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{D}(\mathbf{CA})\mathbf{B}) = (\mathbf{DI}_n)\mathbf{B} = \mathbf{DB} = \mathbf{I}_n,$$

odkiaľ vyplýva, že $\mathbf{DC}$ je inverzná matica k $\mathbf{AB}$. □

1.14. Dôsledok *Množina regulárnych matíc stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$ tvorí podgrupu pologrupy $(M_n(\mathbb{F}), \cdot)$ všetkých štvorcových matíc stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$.*

Dôkaz Vyplýva bezprostredne z definície regulárnej matice a z vety 1.13. □

Keďže podľa 1.13(1) inverzná matica k regulárnej matici $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{F})$ je jednoznačne určená, môžeme pre ňu zaviesť označenie $\mathbf{A}^{-1}$. Všimnime si ešte, že ak $\mathbf{A}$ je invertovateľná, tak je invertovateľná aj $\mathbf{A}^{-1}$ a platí $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Podľa 1.13(2) je súčin $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ invertovateľných matíc opäť invertovateľná matica a platí $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{-1} = \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$. Platnosť tohto možno matematickou indukciou ľahko rozšíriť a ukázať, že súčin $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n$ invertovateľných matíc je invertovateľná matica a platí $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$.

Pre ľubovoľnú štvorcovú maticu $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{F})$ môžeme tiež definovať jej mocniny $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}$, atď. Asociatívny zákon pre násobenie matíc pritom zaručuje, že mocniny $\mathbf{A}^n$ $(n \geqslant 3)$ sú korektne definované. V grupe regulárnych matíc stupňa n môžeme definíciu mocnín matice rozšíriť aj na záporné mocniny definovaním $\mathbf{A}^{-n} := (\mathbf{A}^{-1})^n$ $(n = 1, 2, \dots)$.

1.15. Definícia *Transponovanou maticou k matici* $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ *je matica* $\mathbf{B} = [b_{ji}] \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ *taká, že*

$$b_{ji} = a_{ij}$$

pre všetky $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$. *Budeme ju označovať symbolom* $\mathbf{A}^T$.

Všimnime si, že pre ľubovoľné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ a skalár $c \in \mathbb{F}$ platí

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A},\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{A}^T,\ (c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T. \tag{1.2}$$

1.16. Lema *Nech* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *sú matice a nech súčin* $\mathbf{AB}$ *je definovaný. Potom je definovaný aj súčin* $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ *a platí*

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T.$$

Dôkaz Nech $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$, $\mathbf{B} = [b_{jk}]_{n,p}$ a nech $\mathbf{C} := \mathbf{AB}$. Potom platí $\mathbf{B}^T = [b_{kj}]_{p,n}$, $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{n,m}$, teda súčin $\mathbf{D} := \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ je definovaný. Prvok d_{ij} matice $\mathbf{D}$ možno vyjadriť v tvare $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}$. Pretože násobenie prvkov poľa $\mathbb{F}$ je komutatívne, platí $d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$. Toto je však prvok c_{ji} matice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, teda prvok e_{ij} matice $\mathbf{E} := \mathbf{C}^T$. Čiže $d_{ij} = e_{ij}$ pre všetky i, j, teda platí $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$. $\square$

1.17. Príklad Zoberme matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$ z príkladu 1.9. Transponovaním matíc $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dostaneme matice

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prenechávame na čitateľa presvedčiť sa výpočtami, že platí

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -\frac{3}{2} \\ -2 & \frac{11}{2} & -5 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T+\mathbf{B})^T,$$

$$\mathbf{C}^T = (\mathbf{AB})^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T,$$

$$\mathbf{D}^T = (\mathbf{BA})^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ -3 & 6 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -20 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T. \qquad \blacksquare$$

Niektoré špeciálne triedy matíc.

Diagonálne matice

Hovoríme, že štvorcová matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$ je *diagonálna*, ak $a_{ij} = 0_{\mathbb{F}}$ pre každé $i \neq j$. Inými slovami, v diagonálnej matici sa nenulové prvky môžu nachádzať iba na hlavnej diagonále. Diagonálnu maticu

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

označujeme často stručne $\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Diagonálna matica tvaru $c\mathbf{I}_n$, kde $c \in \mathbb{F}$ je skalár, sa niekedy nazýva *skalárna matica.*

Symetrické matice

Hovoríme, že štvorcová matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$ je *symetrická*, ak $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t.j. platí rovnosť $a_{ij} = a_{ji}$ pre všetky i, j. Znamená to, že matica je symetrická podľa hlavnej diagonály.

Antisymetrické matice

Štvorcová matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stupňa n sa nazýva *antisymetrická*, ak $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, t.j. $a_{ij} = -a_{ji}$. Taká matica musí mať nevyhnutne na hlavnej diagonále samé nuly.

Horné a dolné trojuholníkové matice

Štvorcová matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stupňa n je *horná* (resp. *dolná*) *trojuholníková*, ak $a_{ij} = 0$ pre všetky $i > j$ (resp. $a_{ij} = 0$ pre všetky $i < j$). Teda $\mathbf{A}$ je horná (resp. dolná) trojuholníková matica, keď všetky prvky pod (resp. nad) hlavnou diagonálou sú nulové.

Prenechávame na čitateľa ukázať, že ak $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ sú symetrické (antisymetrické, horné trojuholníkové, dolné trojuholníkové) matice, tak aj matice $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ a všeobecne $c\mathbf{A} + d\mathbf{B}$ pre ľubovoľné $c, d \in \mathbb{F}$ sú symetrické (antisymetrické, horné trojuholníkové, dolné trojuholníkové).

1.18. Príklad Z nasledujúcich matíc typu 3×3 nad $\mathbb{R}$ je matica $\mathbf{A}$ symetrická, matica $\mathbf{B}$ antisymetrická a matica $\mathbf{C}$ horná trojuholníková:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

■

1.19. Príklad Ukážeme, že súčin dvoch horných trojuholníkových matíc nad poľom $\mathbb{F}$ je opäť horná trojuholníková matica.

Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sú horné trojuholníkové matice stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$ a nech $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]$. Teda $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Ak $i > j$ tak pre každé k buď $i > k$ alebo $k > j$. Ak $i > k$ tak $a_{ik} = 0_{\mathbb{F}}$, pretože $\mathbf{A}$ je horná trojuholníková matica. Podobne, ak $k > j$, tak $b_{kj} = 0_{\mathbb{F}}$. Teda pre každé $i > j$ platí $a_{ik} b_{kj} = 0_{\mathbb{F}}$, odkiaľ vyplýva, že $\mathbf{C}$ je horná trojuholníková matica. ■

Ortogonálne matice

Hovoríme, že štvorcová matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$ je *ortogonálna*, ak $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Vidíme, že $\mathbf{A}$ je ortogonálna práve vtedy, keď je invertovateľná a $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Tieto matice sú dôležité v euklidovskej geometrii.

1.20. Príklad Ukážeme, že každá ortogonálna matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stupňa 2 má tvar buď

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

pre nejaké $\theta \in (-\pi, \pi >$.

Vychádzame zo známeho faktu, že ak reálne čísla x, y spĺňajú $x^2 + y^2 = 1$ tak existuje jediné reálne číslo (uhol v radiánoch) $\theta \in (-\pi, \pi >$ tak, že $\cos\theta = x$ a $\sin\theta = y$.

Pretože $\mathbf{A}$ je ortogonálna, platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$, odkiaľ dostávame rovnice

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \;\; a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \;\; a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

Prvé dve rovnice implikujú, na základe faktu spomenutého vyššie, existenciu reálnych čísel $\theta, \theta' \in (-\pi, \pi >$ tak, že $\cos\theta = a_{11}$, $\sin\theta = a_{21}$, $\cos\theta' = a_{12}$ a $\sin\theta' = a_{22}$. Po dosadení do tretej rovnice potom dostávame

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = 0, \quad \text{t.j.} \quad \cos(\theta - \theta') = 0.$$

Teda $\theta - \theta' = \pm\frac{\pi}{2}$, odkiaľ $\theta' = \theta \pm \frac{\pi}{2}$.

Riešenie $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$ dáva $\cos\theta' = -\sin\theta$ a $\sin\theta' = \cos\theta$, čiže $\mathbf{A}$ je matica prvého tvaru. Riešenie $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$ dáva $\cos\theta' = \sin\theta$ a $\sin\theta' = -\cos\theta$, čiže matica $\mathbf{A}$ má druhý z uvedených tvarov. ■

2. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

Úvodné slovo. Rovnica typu $y = ax$ na vyjadrenie priamej úmery dvoch kvantít označených premennými y a x sa používa v prírodných i spoločenských vedách a rovnako aj v technickej praxi. Volá sa *lineárnou rovnicou*, pretože jej grafom v rovine je priamka. Podobne, rovnica $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b$ vyjadrujúca b pomocou konštánt a_i a premenných x_i sa nazýva lineárna.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať sústavami lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{F}$ (niekedy sa im hovorí tiež systémy lineárnych rovníc). V technickej praxi sa sústavy lineárnych rovníc používajú vo vyjadrení mnohých fyzikálno-chemických modelov. V školskej praxi ich najčastejšie riešime nad číselnými poliami $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ a $\mathbb{Z}_p$ (kde p je prvočíslo). Nulový prvok v poli $\mathbb{F}$ budeme preto namiesto $0_{\mathbb{F}}$ často označovať iba 0. Všeobecný tvar sústav lineárnych rovníc, ktorými sa budeme zaoberať je

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \quad \dots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

kde a_{ij}, b_i sú konštanty z poľa $\mathbb{F}$ a x_j sú premenné nadobúdajúce hodnoty tiež z poľa $\mathbb{F}$ (pre všetky $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$). Konštanty a_{ij}, b_i z poľa $\mathbb{F}$ nazývame *koeficientami sústavy* a premenné x_j *neznámymi.* Sústavu rovníc v tvare (2.1) nazývame *sústavou (systémom) m lineárnych rovníc s n neznámymi nad* $\mathbb{F}$.

Dosaďme za n-ticu $(x_1, \dots, x_n)$ premenných n-ticu $(c_1, \dots, c_n)$ prvkov poľa $\mathbb{F}$. Týmto dosadením sa z i-tej rovnice sústavy (2.1) chápanej ako výroková forma nad $\mathbb{F}$ stane výrok

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i,$$

ktorý je buď pravdivý alebo nepravdivý. Pod *riešením sústavy* (2.1) *nad* $\mathbb{F}$ rozumieme každú n-ticu $(c_1, \dots, c_n)$ prvkov poľa $\mathbb{F}$, po dosadení ktorej za premenné $(x_1, \dots, x_n)$ sa **každá** z m rovníc sústavy (2.1) stane pravdivým výrokom. Naším cieľom v tejto kapitole bude oboznámiť čitateľa s metódou ktorá sa používa na nájdenie všetkých riešení akejkoľvek sústavy v tvare (2.1).[1]

Matice budú pritom hrať kľúčovú úlohu v tom, že budú jednoznačne "kódovať" sústavy rovníc a umožnia nám prehľadnejšiu a efektívnejšiu manipuláciu s nimi. Naším cieľom bude nájsť postupnosť krokov pri manipulácii s maticami, ktorou sa

[1]Počiatky riešenia takýchto sústav siahajú až do babylonskej, egyptskej a čínskej matematiky približne 2500 až 1500 rokov pred Kristom. V stredoveku boli takéto úlohy riešené v Indii, Arabskom svete a v Európe. Ale až v 17. storočí sa objavili sústavy v dnešnej podobe. Okolo roku 1730 Škót Colin Maclaurin našiel explicitné vzorce pre riešenie sústavy dvoch a troch lineárnych rovníc s dvoma resp. troma neznámymi ako aj rekurzívne vzorce pre sústavy štyroch lineárnych rovníc so štyrmi neznámymi. V roku 1750 Gabriel Cramer poskytol vzorce pre pre riešenie sústavy n lineárnych rovníc s n neznámymi pre ľubovoľné n. Tieto vzorce, známe ako *Cramerovo pravidlo*, uvedieme v kapitole 4. Podrobnejšie historické pozadie možno nájsť napríklad v knihe [2].

rozšírená matica sústavy (2.1),

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

jednoznačne "kódujúca" zadanú sústavu (2.1), upraví do tvaru z ktorého bude možné určiť všetky riešenia sústavy (2.1); takým tvarom bude tzv. redukovaný trojuholníkový tvar matice $\mathbf{A}'$. Pri úpravách matice sa vhodné násobky riadkov pripočítavajú k iným riadkom čo v odpovedajúcej sústave linárnych rovníc znamená pripočítavanie násobkov rovníc k iným rovniciam. Pritom sa v niektorých rovniciach eliminujú niektoré premenné, čo vedie k jednoduchšej sústave resp. odpovedajúcej matici. Táto eliminačná metóda riešenia s ktorou sa čitateľ určite sčasti zoznámil už na strednej škole má názov *Gaussova-Jordanova eliminačná metóda* po významných matematikoch 19. storočia C.F. Gaussovi (1777-1855)[2] a W. Jordanovi (1842-1899)[3].

Sústavy lineárnych rovníc v maticovom tvare. Rozšírenú maticu sústavy (2.1) sme už prezentovali vyššie. Teraz utvoríme maticu z koeficientov na ľavej strane rovníc sústavy (2.1), maticu z premenných a maticu z konštánt pravej strany. Položme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

---

[2]Carl Friedrich Gauss (1777–1855) sa narodil v chudobnej rodine v nemeckom Brunswicku a umrel v nemeckom Göttingene ako najuznávanejší svetový matematik tej doby; prischla mu honosná prezývka "princ matematiky".

Gauss bol "zázračným dieťaťom". Dojem ktorý urobil na svojich učiteľov bol dostatočný na to, aby mu vďaka ich intervencii Vojvoda z Brunswicku poskytol štipendium na miestnej strednej škole. Už tam Gauss urobil objavy v teórii čísel a začal špekulovať o neeuklidovskej geometrii. V rokoch 1796–1800 študoval na známej univerzite v Göttingene, kde v roku 1799 získal doktorát. V roku 1907 bol menovaný riaditeľom Observatória v Göttingene.

Jeho celoživotné dielo zahŕňa mnohé dôležité výsledky v teórii čísel, algebre, analýze, geometrii, pravdepodobnosti a štatistike, ale aj astronómii, geodézii, mechanike a magnetizme. Jeho poznámkové bloky obsahovali mnoho ďalších objavov, ktoré nikdy nepublikoval. Vo svojich výskumoch používal výpočty, ktoré neskoršie generácie zovšeobecnili do dnešných riadkových úprav matíc a nazvali jeho menom. Treba však povedať, že metóda bola používaná pod menom *fangcheng* v Číne už takmer o 2000 rokov skôr, pričom koeficienty sústavy sa zapisovali do tabuľky.

[3]Wilhelm Jordan (1842–1922) sa narodil v južnom Nemecku. Navštevoval college v Stuttgarte a v r. 1868 sa stal profesorom geodézie na technickom college v nemeckom Karlsruhe. Zúčastnil sa na mapovaní niekoľkých oblastí Nemecka. Jeho hlavné dielo, *Handbuch der Vermessungskunde* (Príručka geodézie) bolo preložené do francúzskeho, talianskeho a ruského jazyka. Mal výnimočný talent na písanie a bol vynikajúcim učiteľom. Gaussova-Jordanova metóda sa namiesto neho dosť často prisudzovala známemu francúzskemu matematikovi menom Camille Jordan (1838–1922). Zdá sa tiež, že metóda bola nezávisle objavená v rovnakom čase kňazom menom B.I. Classen, ktorý žil v Luxemburgu. Viac sa o historickom pozadí metódy možno dozvedieť v článku [1]

Matica $\mathbf{A}$ sa nazýva *maticou sústavy* (2.1) a *maticový tvar* tejto sústavy je

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

Je zrejmé, že ľubovoľná sústava lineárnych rovníc nad $\mathbb{F}$ v tvare (2.1) jednoznačne určuje maticu sústavy a rozšírenú maticu sústavy a obrátene, každá matica $\mathbf{A}'$ typu $m \times (n+1)$ nad $\mathbb{F}$ určuje sústavu lineárnych rovníc nad $\mathbb{F}$ v tvare (2.1) s rozšírenou maticou sústavy $\mathbf{A}'$.

V prípade, že v sústave (2.1) sú koeficienty $b_1, \ldots, b_m$ na pravej strane nulové (resp. v maticovom tvare je $\mathbf{B} = \mathbf{0}$), nazývame sústavu (2.1) *homogénnou*; v opačnom prípade hovoríme o *nehomogénnej* sústave (systéme) lineárnych rovníc.

2.1. Príklad Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -3 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

sú matica sústavy resp. rozšírená matica sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_2 - x_3 \qquad &= -\frac{1}{2} \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

nad $\mathbb{R}$. Maticový tvar tejto sústavy je

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}^T.$$

■

Elementárne riadkové operácie na maticiach. Dôsledkovými a ekvivalentnými úpravami sme sa zaoberali v závere Algebry I pri riešení algebraických rovníc nad obormi integrity. Chápanie týchto úprav pri riešení sústav lineárnych rovníc je obdobné.

Pri riešení akejkoľvek sústavy rovníc (v špeciálnom prípade jednej rovnice) je cieľom prejsť dôsledkovými alebo ekvivalentnými úpravami k takej sústave rovníc, ktorej riešenia je možné už ľahko určiť. Ak sa pritom používajú iba ekvivalentné úpravy, množina riešení výslednej sústavy je totožná s množinou riešení pôvodnej sústavy, a preto nie je nutné skúškou preverovať získané riešenia.

Je zrejmé, že medzi ekvivalentné úpravy sústavy (2.1) m lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$ patria výmena ľubovoľných dvoch rovníc sústavy a vynásobenie ktorejkoľvek rovnice sústavy nenulovým prvkom poľa $\mathbb{F}$. Zrejmým je aj fakt, že pripočítanie ľubovoľného c-násobku j-tej rovnice k i-tej rovnici sústavy ($c \in \mathbb{F}$, $i \neq j$) je ekvivalentná úprava, ak si uvedomíme, že spätným odpočítaním c-násobku j-tej rovnice od i-tej rovnice dostaneme presne pôvodnú sústavu rovníc.

Na rozšírenej matici sústavy (2.1) budeme práve spomenuté jednoduché ekvivalentné úpravy simulovať nasledujúcimi *elementárnymi riadkovými operáciami.*

2.2. Definícia *Elementárna riadková operácia (ďalej len e.r.o.)* $\mathcal{R}$ *na matici je ľubovoľný z nasledujúcich troch úkonov:*

(1) *vzájomná výmena* i*-teho a* j*-teho riadku matice, označenie* $\mathcal{R} \equiv (R_i \leftrightarrow R_j)$*;*
(2) *vynásobenie* i*-teho riadku nenulovým skalárom* c*, označenie* $\mathcal{R} \equiv (R_i \to cR_i)$*;*
(3) *pripočítanie* c*-násobku* j*-teho riadku matice k* i*-temu riadku* $(i \neq j)$*, označenie* $\mathcal{R} \equiv (R_i \to R_i + cR_j)$*.*

Poznamenávame, že pripúšťame $i = j$ v operácii (1), aj $c = 0$ v operácii (3), hoci v týchto prípadoch výsledný efekt nie je žiadny. Čo nepripúšťame je, aby $c = 0$ v operácii (2) a aby $i = j$ v operácii (3).

Ak z matice $\mathbf{A}$ vznikla matica $\mathbf{B}$ pomocou e.r.o. $\mathcal{R}$, budeme písať $\mathbf{A}\ (\mathcal{R})\ \mathbf{B}$ alebo $\mathbf{B} = \mathcal{R}(\mathbf{A})$. Ak matica $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ konečnou postupnosťou $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_k$ e.r.o., vyjadríme to zápisom

$$\mathbf{A}\ (\mathcal{R}_1)\ \mathbf{A}_1\ (\mathcal{R}_2)\ \mathbf{A}_2\ \ldots\ \mathbf{A}_{k-1}\ (\mathcal{R}_k)\ \mathbf{B}.$$

2.3. Príklad Zoberme sústavu z príkladu 2.1 a upravujme pomocou e.r.o. rozšírenú maticu sústavy $\mathbf{A}'$. Platí

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -3 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (R_2 \to 2R_2)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} (R_1 \to R_1 + 3R_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prvá e.r.o. odpovedá vzájomnej výmene prvej a druhej rovnice sústavy, druhá následnému vynásobeniu druhej rovnice číslom 2 a tretia pripočítaniu 3-násobku druhej rovnice k prvej rovnici. Výsledná matica je teda rozšírenou maticou sústavy

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad - x_4 &= \ \ 0 \\ x_2 - 2x_3 \qquad &= -1, \end{aligned}$$

ktorá je ekvivalentná s pôvodnou sústavou a z ktorej je už ľahké určiť pri zvolení hodnôt $x_4 = t,\ x_3 = s\ (t, s \in \mathbb{R})$, že množina riešení danej sústavy je

$$\{(t, -1 + 2s, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

■

Symboly s, t v riešení predchádzajúcej sústavy nazývame *parametrami* a riešenie s parametrami nazývame *parametrické riešenie.*

Hovoríme, že e.r.o. $\mathcal{S}$ je *inverzná* k e.r.o. $\mathcal{R}$, ak pre ľubovoľné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ také, že $\mathbf{A}\ (\mathcal{R})\ \mathbf{B}$ platí $\mathbf{B}\ (\mathcal{S})\ \mathbf{A}$. Je zrejmé, že ak $\mathcal{S}$ je inverzná e.r.o. k $\mathcal{R}$, tak inverzná e.r.o. k $\mathcal{S}$ je zasa $\mathcal{R}$.

Zrejmé sú aj nasledujúce tvrdenia, ktoré formálne potvrdzujú už avizovaný fakt, že **e.r.o.** na rozšírenej matici sústavy **simulujú ekvivalentné úpravy** odpovedajúcej sústavy lineárnych rovníc.

2.4. Lema *Pre elementárne riadkové operácie (e.r.o.) na maticiach platí:*

(1) *inverzná e.r.o. k* $(R_i \leftrightarrow R_j)$ *je opät'* $(R_i \leftrightarrow R_j)$;
(2) *inverzná e.r.o. k* $(R_i \to cR_i)$ *je* $(R_i \to c^{-1}R_i)$;
(3) *inverzná e.r.o. k* $(R_i \to R_i + cR_j)$ *je* $(R_i \to R_i - cR_j)$.

Budeme hovorit', že matica $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ nad pol'om $\mathbb{F}$ je *riadkovo ekvivalentná* s maticou $\mathbf{B}$ typu $m \times n$ nad $\mathbb{F}$ a písat' $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, ak $\mathbf{B}$ možno dostat' z $\mathbf{A}$ pomocou konečnej postupnosti e.r.o.

2.5. Lema *Relácia* $\sim$ *je reláciou ekvivalencie na množine* $M_{m,n}(\mathbb{F})$.

Dôkaz Je zrejmé, že pre každú maticu $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ platí $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$. Predpokladajme, že $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. Potom existuje konečná postupnost' e.r.o. $\mathcal{R}_i$, $i = 1, \ldots, k$ tak, že

$$\mathbf{A}\ (\mathcal{R}_1)\ \mathbf{A}_1\ (\mathcal{R}_2)\ \mathbf{A}_2\ \ldots\ \mathbf{A}_{k-1}\ (\mathcal{R}_k)\ \mathbf{B}.$$

Podl'a lemy 2.4 má každá e.r.o. $\mathcal{R}_i$ svoju inverznú e.r.o. $\mathcal{S}_i$, $i = 1, \ldots, k$. Preto

$$\mathbf{B}\ (\mathcal{S}_k)\ \mathbf{A}_{k-1}\ \ldots\ \mathbf{A}_2\ (\mathcal{S}_2)\ \mathbf{A}_1\ (\mathcal{S}_1)\ \mathbf{A},$$

čiže $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$. Teda relácia $\sim$ je aj symetrická. Overenie tranzitívnosti relácie $\sim$ prenechávame na čitatel'a. □

Ked'že $\sim$ je reláciou ekvivalencie na množine $M_{m,n}(\mathbb{F})$, umožňuje rozklad množiny $M_{m,n}(\mathbb{F})$ na triedy navzájom ekvivalentných matíc. Úlohu reprezentantov týchto tried budú hrat' v d'alšom *redukované trojuholníkové matice*. K nim budú smerovat' naše úpravy pomocou e.r.o. na rozšírených maticiach sústavy. Redukované trojuholníkové matice ako výsledné matice našich úprav budú kódovat' sústavu ekvivalentnú s pôvodnou a to v takom tvare, z ktorého riešenia sústavy bude najjednoduchšie určit'. Ukážeme, že každá matica z množiny $M_{m,n}(\mathbb{F})$ je riadkovo ekvivalentná s práve jednou redukovanou trojuholníkovou maticou v množine $M_{m,n}(\mathbb{F})$.

Vedúcim prvkom riadku matice nazývame jeho prvý nenulový prvok. Ak sú všetky prvky niektorého riadku matice nulové, tak tento riadok nemá vedúci prvok.

2.6. Definícia *Matica* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *typu* $m \times n$ *sa nazýva redukovaná trojuholníková matica, ak má nasledujúce vlastnosti:*

(a) *nulové riadky (ak existujú) ležia pod všetkými nenulovými riadkami;*
(b) *vedúci prvok v každom nenulovom riadku je* 1;
(c) *pre každé* $i \geqslant 1$ *pre ktoré* i*-ty a* $(i+1)$*-vý riadok sú nenulové leží vedúci prvok* $(i+1)$*-ého riadku v stĺpci* ***vpravo*** *od stĺpca s vedúcim prvkom* i*-teho riadku;*
(d) *každý stĺpec ktorý obsahuje vedúci prvok niektorého riadku má všetky ostatné prvky nulové.*

2.7. Príklad Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nie sú redukované trojuholníkové matice. Matica $\mathbf{A}$ nespĺňa podmienku (a), matica $\mathbf{B}$ podmienku (b), matica $\mathbf{C}$ podmienku (c) a matica $\mathbf{D}$ podmienku (d). Naopak, matice $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{2,3}$,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2-3i \\ 0 & 1 & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}, \ \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi \end{pmatrix}$$

sú redukované trojuholníkové matice. Môžeme ich považovať za rozšírené matice sústav lineárnych rovníc postupne nad poliami $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$. V nasledujúcej časti určíme riešenia týchto sústav v daných poliach.

Matica $\mathbf{E}$ nad poľom $\mathbb{Z}_3 = (\{0,1,2\}, \oplus, \odot)$ je rozšírenou maticou sústavy, ktorá pozostáva z dvoch rovnakých rovníc

$$0x_1 + 0x_2 = 0.$$

Táto sústava má parametrické riešenia $(x_1, x_2) = (s, t)$ $(s, t \in \mathbb{Z}_3)$, čiže množina riešení je

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}.$$

Matica $\mathbf{F}$ nad $\mathbb{Q}$ je rozšírenou maticou sústavy

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{2}{3}x_2 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že druhej rovnici $0x_1 + 0x_2 = 1$ nevyhovujú žiadne $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$. Preto celá sústava nemá riešenie v $\mathbb{Q}$ (a nemá riešenie ani v $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

Matica $\mathbf{G}$ nad $\mathbb{C}$ je rozšírenou maticou sústavy

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 2-3i \\ x_2 \quad &= -1+i \\ x_3 &= i. \end{aligned}$$

Táto sústava má v $\mathbb{C}$ jediné riešenie $(x_1, x_2, x_3) = (2-3i, -1+i, i)$.

Napokon matica $\mathbf{H}$ nad $\mathbb{R}$ je rozšírenou maticou sústavy

$$\begin{aligned} x_2 + \quad \sqrt{2}x_4 \quad &= -1 \\ x_3 - 3x_4 \quad &= \frac{1}{3} \\ x_5 &= \pi. \end{aligned}$$

Dostávame

$$\begin{aligned} x_2 &= -1 - \sqrt{2}x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{3} + 3x_4 \\ x_5 &= \pi. \end{aligned}$$

Po zvolení x_1 a x_4 za parametre s, t $(s, t \in \mathbb{R})$ dostaneme množinu riešení

$$\{(s, -1 - \sqrt{2}t, \frac{1}{3} + 3t, t, \pi) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

■

Úprava matice na redukovaný trojuholníkový tvar. Prv než pristúpime k vete, že každú maticu možno pomocou elementárnych riadkových operácií upraviť na redukovaný trojuholníkový tvar, ilustrujeme si takúto úpravu na príklade.

2.8. Príklad Našou úlohou bude upraviť maticu

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ na redukovaný trojuholníkový tvar.

Keďže v prvom stĺpci je aspoň jeden nenulový prvok, najprv určíme tzv. *pivota* prvého stĺpca, pomocou ktorého potom v ďalšom kroku "vynulujeme ostatné políčka" v danom *pivotálnom stĺpci.* Pivota c v prvom kroku presunieme do prvého riadku a následnym vynásobením jeho riadku prvkom c^{-1} upravíme na jednotku . Ak by sme v našom prípade zvolili za pivota číslo 3 v prvom riadku, pomocou e.r.o. $R_1 \to \frac{1}{3}R_1$ by sme ho mohli upraviť na jednotku, ale hneď by nám vznikli zlomky v upravovanej matici.Vznik zlomkov v matici sa snažíme pri ručnom počítaní čo možno najviac oddialiť, preto zvoľme radšej za pivota číslo 1 v treťom riadku. Pivota umiestníme do prvého riadku pomocou e.r.o. $R_1 \leftrightarrow R_3$ typu (1). Tohto pivota nebudeme musieť už upravovať na jednotku, čím ušetríme jednu e.r.o. typu (2). Teda prvý krok je

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

V druhom kroku pomocou e.r.o. typu (3) "vynulujeme ostatné políčka" v prvom stĺpci, takže pre prvý stĺpec bude platiť podmienka (d) z definície 2.6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Postup pri ďalších stĺpcoch je analogický. Keďže však druhý stĺpec je nulový, prejdeme rovno k tretiemu stĺpcu, ktorý obsahuje nenulové prvky.

V treťom kroku určíme pivota v treťom stĺpci. Bude to v niektorom z riadkov s výnimkou prvého, ktorý už predtým poskytol pivota pre prvý stĺpec. Vidíme, že v našom prípade bude najvýhodnejšie zvoliť za pivota číslo 2 v druhom riadku a pomocou e.r.o. $R_2 \to \frac{1}{2}R_2$ typu (2) ho upraviť na jednotku. Keďže sme po druhom kroku dostali maticu, v ktorej sú tretí a štvrtý riadok rovnaké, v treťom kroku ešte odčítame od štvrtého riadku tretí riadok. Posledný riadok zostane "vynulovaný" až do konca našich úprav. Teda tretí krok je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 \to \frac{1}{2}R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vo štvrtom kroku pomocou e.r.o. typu (3) "vynulujeme všetky políčka" treťom stĺpci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 + 4R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matica, ktorú sme obdržali, ešte nie je redukovaná trojuholníková matica, keďže nespĺňa podmienky (b) a (d) - vedúci prvok treťom riadku nie je 1 a v stĺpci v ktorom leží tento prvok (vo štvrtom) nie sú ostatné prvky nulové. V piatom kroku teda zvolíme za pivota vedúci prvok tretieho riadku a pomocou e.r.o. $R_3 \to (-\frac{1}{6})R_3$ ho upravíme na prvok 1, ktorý nám poslúži na "vynulovanie políčok" štvrtého stĺpca v poslednom šiestom kroku. Teda piaty krok je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (R_3 \to (-\frac{1}{6})R_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a šiesty krok je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (R_1 \to R_1 - 2R_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posledná matica je už redukovaná trojuholníková matica. ■

Každú maticu možno analogickým spôsobom upraviť na redukovanú trojuholníkovú maticu. Nasledujúci všeobecný dôkaz tohto tvrdenia je konštruktívny a používa metódu ilustrovanú v predchádzajúcom príklade. Keďže tvrdenie chceme dokázať pre ľubovoľnú maticu, dôkaz je urobený matematickou indukciou.

2.9. Veta *Každá matica je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

Dôkaz Nech $\mathbf{A}$ je ľubovoľná matica typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$. Ak $\mathbf{A}$ je nulová, tak $\mathbf{A}$ je už redukovaná trojuholníková matica, t.j. tvrdenie platí. Predpokladajme teraz, že $\mathbf{A}$ je nenulová. Tvrdenie dokážeme indukciou vzhľadom na počet riadkov m matice $\mathbf{A}$.

1. Nech $m = 1$. Aby sme z matice typu $1 \times n$ dostali redukovanú trojuholníkovú maticu, stačí vedúci prvok jej jediného riadku, nech je to c, zmeniť na číslo 1. Dosiahneme to pomocou e.r.o. $R_1 \to c^{-1}R_1$ typu (2). (Keďže daný riadok je nenulový, máme zaručené, že $c \neq 0$.)

2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre ľubovoľnú maticu s $m = k$ riadkami, kde $k \geqslant 1$ je kladné celé číslo. Ukážeme, že za tohto predpokladu platí aj pre ľubovoľnú maticu s $k+1$ riadkami. Nech teda $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je matica typu $(k+1) \times n$. Nech prvý nenulový stĺpec matice $\mathbf{A}$ je s-tý stĺpec. Nech a_{is} je nejaký nenulový prvok v tomto stĺpci (pivot). Pomocou e.r.o. $R_i \to a_{is}^{-1}R_i$ typu (2) dostaneme z neho jednotku. Ak i-ty riadok, v ktorom sa táto jednotka nachádza, nie je prvým riadkom, pomocou e.r.o. $R_i \leftrightarrow R_1$ typu (1) ho urobíme prvým riadkom. Nech matica ktorú takto dostaneme je $\mathbf{B}$. Teraz vďaka prvku $b_{1s} = 1$ pomocou e.r.o. typu (3) "vynulujeme" ostatné nenulové prvky v s-tom stĺpci; ak v tomto stĺpci je v i-tom riadku ($i \in \{2, \ldots, k+1\}$) nenulový prvok b_{is}, tak na nulu ho zmeníme pomocou e.r.o. $R_i \to R_i - b_{is}R_1$. Nech matica ktorú takto dostaneme je $\mathbf{C}$. Jej tvar je

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & c_{1,s+1} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & c_{2,s+1} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & c_{k+1,s+1} & \ldots & c_{k+1,n} \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{C}'$ maticu typu $k \times n$, ktorú z matice $\mathbf{C}$ dostaneme odobratím jej prvého riadku. Podľa indukčného predpokladu je $\mathbf{C}'$ riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou $\mathbf{D}'$. Pretože matica $\mathbf{C}'$ sa líši od matice $\mathbf{C}$ iba odobratým prvým riadkom, môžeme výmeny, násobenia a pripočítavania násobkov riadkov v matici $\mathbf{C}'$, ktorými ju možno upraviť na maticu $\mathbf{D}'$, uskutočňovať rovno na matici $\mathbf{C}$; pritom tieto e.r.o. neovplyvnia prvý riadok matice $\mathbf{C}$. Dostaneme tak maticu $\mathbf{D}$, ktorej prvý riadok je totožný s prvým riadkom matice $\mathbf{C}$ a ostatné riadky tvoria redukovanú trojuholníkovú maticu $\mathbf{D}'$, pričom v každom z týchto riadkov, ktorý je nenulový, je vedúcim prvkom jednotka. Vďaka týmto jednotkám možno v ich stĺpcoch pomocou e.r.o. typu (3) "vynulovať" prípadné nenulové prvky v prvom riadku matice $\mathbf{D}$; ak napríklad pre stĺpcový index s je $d_{2,s+1} = 1$ a $d_{1,s+1} \neq 0$, pomocou e.r.o. $R_1 \to R_1 - d_{1,s+1}R_2$ typu (3) na matici $\mathbf{D}$ "vynulujeme" pôvodný prvok $d_{1,s+1}$. Matica $\mathbf{E}$ ktorú napokon takto dostaneme je už redukovaná trojuholníková matica. Keďže všetky úpravy boli vykonané pomocou e.r.o., je výsledná matica $\mathbf{E}$ riadkovo ekvivalentná s pôvodnou maticou $\mathbf{A}$. □

Gaussova-Jordanova eliminačná metóda. Najprv metódu opäť ilustrujeme na príklade.

2.10. Príklad Nech $\mathbf{A}'$ je matica z príkladu 2.8. Táto matica nad poľom $\mathbb{R}$ je rozšírenou maticou sústavy

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad + 2x_3 \qquad + 4x_5 &= -5 \\ -x_1 \qquad\qquad - 2x_4 - 2x_5 &= 3 \\ x_1 \quad + 2x_3 + 2x_4 \qquad &= -1 \\ 2x_1 \qquad\qquad - 2x_4 + 4x_5 &= -4 \end{aligned}$$

štyroch rovníc s piatimi neznámymi nad $\mathbb{R}$. Našou úlohou bude nájsť všetky jej riešenia.

Maticu $\mathbf{A}'$ upravíme pomocou e.r.o. na redukovanú trojuholníkovú maticu. V príklade 2.8 sme to urobili a dostali sme maticu, označme ju $\mathbf{B}'$,

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Redukovaná trojuholníková matica $\mathbf{B}'$ má tri nenulové riadky, ktorých vedúce prvky sú v prvom, treťom a štvrtom stĺpci. Pretože v druhom a piatom stĺpci nie sú vedúce prvky žiadneho riadku, za hodnoty premenných x_2 a x_5, ktoré odpovedajú týmto stĺpcom, zvolíme parametre s, t $(s, t \in \mathbb{R})$.

Hodnoty premenných x_1, x_3 a x_4 odpovedajúcich stĺpcom, v ktorých sú vedúce prvky riadkov, teraz ľahko vypočítame zo sústavy

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2x_5 &= -\frac{7}{3} \\ x_3 \quad - x_5 &= \ 1 \\ x_4 \qquad &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

kódovanej maticou $\mathbf{B}'$. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{7}{3} - 2t \\ x_3 &= 1 + t \\ x_4 &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Keďže táto sústava je ekvivalentná s pôvodnou sústavou, dostaneme parametrické riešenia pôvodnej sústavy v tvare

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\frac{7}{3} - 2t, s, 1 + t, -\frac{1}{3}, t) \ (s, t \in \mathbb{R}).$$

Teda množinou riešení danej sústavy je

$$\{(-\frac{7}{3} - 2t, s, 1 + t, -\frac{1}{3}, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

■

Vo všeobecnosti uvažujme o sústave (2.1) m lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$ v maticovom tvare $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ s maticou sústavy $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ a nech $\mathbf{A}' = [\mathbf{A}|\mathbf{B}]_{m,n+1}$ je rozšírená matica tejto sústavy. Ak $\mathbf{A}'$ je nulová matica, množina riešení je $\mathbb{F}^n = \{(c_1, \ldots, c_n) \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}\}$. Predpokladajme v ďalšom, že matica $\mathbf{A}'$ je nenulová. **Gaussova-Jordanova eliminačná metóda** riešenia sústavy (2.1) pozostáva z nasledovných krokov:

Krok 1: Rozšírenú maticu $\mathbf{A}' = [\mathbf{A}|\mathbf{B}]_{m,n+1}$ sústavy (2.1) upravíme pomocou e.r.o. na redukovanú trojuholníkovú maticu $\mathbf{B}'$.

Ak $\mathbf{B}'$ obsahuje riadok tvaru $(0, 0, \ldots, 0, c)$, kde $c \neq 0$, odpovedá to rovnici

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = c,$$

ktorá nemá riešenie, preto sústava (2.1) **nemá riešenie**. Ak matica $\mathbf{B}'$ neobsahuje taký riadok, ideme na krok 2, kde rozlišujeme dva prípady:

Krok 2: (a) Nech matica $\mathbf{B}'$ má n nenulových riadkov. Znamená to, že $m \geqslant n$ a nenulové riadky matice $\mathbf{B}'$ tvoria maticu

$$\mathbf{C}' = [\mathbf{I}_n|\mathbf{C}]_{n,n+1},$$

kde $\mathbf{I}_n$ je jednotková matica stupňa n a $\mathbf{C} = (c_1 \dots c_n)^T$. Odpovedajúca sústava má tvar

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \dots,\ x_n = c_n$$

a **jediné riešenie** $(x_1, \dots, x_n) = (c_1, \dots, c_n)$.

(b) Nech matica $\mathbf{B}'$ má $k < n$ nenulových riadkov tvoriacich maticu $\mathbf{D}' = [\mathbf{D}|\mathbf{C}]$ a nech vedúce prvky (jednotky) nenulových riadkov sú v stĺpcoch $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ matice $\mathbf{B}'$. Nech $\{\ell_1, \dots, \ell_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$.

Za hodnoty premenných $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_{n-k}}$ zvolíme parametre z $\mathbb{F}$, čiže položíme

$$x_{\ell_1} = t_1,\ x_{\ell_2} = t_2,\ \dots,\ x_{\ell_{n-k}} = t_{n-k}. \tag{2.2}$$

Keďže každá z ostatných premenných $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}$ odpovedá stĺpcu matice $\mathbf{B}'$, kde je jedna jednotka a ostatné prvky nulové, nachádza sa každá z týchto premenných práve v jednej rovnici odpovedajúcej sústavy rovníc, odkiaľ jej hodnotu možno ľahko vyjadriť pomocou parametrov a konštanty na pravej strane rovnice:

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= c_1 - d_{1\ell_1}t_1 - d_{1\ell_2}t_2 - \cdots - d_{1\ell_{n-k}}t_{n-k} \\ x_{j_2} &= c_2 - d_{2\ell_1}t_1 - d_{2\ell_2}t_2 - \cdots - d_{2\ell_{n-k}}t_{n-k} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{j_k} &= c_k - d_{k\ell_1}t_1 - d_{k\ell_2}t_2 - \cdots - d_{k\ell_{n-k}}t_{n-k}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Zlúčením (2.2) a (2.3) dostávame **parametrické riešenie** danej sústavy. Sústavami lineárnych rovníc a množinami ich riešení sa budeme ďalej zaoberať v závere kapitoly 7.

2.11. Poznámka Pri riešení homogénnej sústavy, čiže v prípade, keď v sústave (2.1) sú koeficienty $b_1, \dots, b_m$ na pravej strane nulové, nie je potrebné pracovať s rozšírenou maticou $\mathbf{A}' = [\mathbf{A}|\mathbf{0}]_{m,n+1}$ sústavy. Udržiavať informáciu o poslednom stĺpci tejto matice nie je potrebné, pretože posledný stĺpec je pri používaní e.r.o. v ktoromkoľvek kroku nulový. V prvom kroku eliminačnej metódy preto stačí upraviť maticu sústavy $\mathbf{A}$ na redukovanú trojuholníkovú maticu a rovno prejsť na krok 2, kde $\mathbf{C} = (0 \dots 0)^T$. V prípade (a) má daná sústava iba triviálne riešenie $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. Ku kroku 2(b) v prípade homogénnej sústavy sa podrobnejšie vrátime v závere kapitoly 7.

Doteraz sme sa zaoberali sústavami lineárnych rovníc, kde koeficienty sústavy (prvky rozšírenej matice sústavy) boli konštanty z daného poľa $\mathbb{F}$. Úplne analogicky však možno prostredníctvom matíc (a e.r.o. na nich) upravovať aj *sústavy lineárnych rovníc s parametrami*, t.j. sústavy v tvare (2.1), kde niektoré koeficienty sústavy sú vyjadrené parametrami nadobúdajúcimi hodnoty z poľa $\mathbb{F}$.

2.12. Príklad Nad poľom $\mathbb{Z}_5$ riešme nasledujúcu sústavu štyroch lineárnych rovníc s troma neznámymi s parametrami a, b, c:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= a \\ 2x_1 + bx_2 + 4x_3 &= c. \end{aligned}$$

Rozšírenú maticu tejto sústavy označme $\mathbf{A}'$. Upravme pomocou e.r.o. maticu $\mathbf{A}'$ na redukovanú trojuholníkovú maticu. (Treba si uvedomiť, že sčitovanie a násobenie uskutočňujeme v poli $\mathbb{Z}_5 = (\{0,1,2,3,4\}, \oplus, \odot)$, t.j. počítame "modulo 5".)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 2 & b & 4 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + 4R_1 \\ R_4 \to R_4 + 3R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 \\ 0 & b & 2 & c+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_3 \to R_3 + 3R_2 \\ R_4 \to R_4 + 4bR_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & b+2 & c+3b+2 \end{pmatrix} (R_3 \leftrightarrow R_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & b+2 & c+3b+2 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}.$$

Ďalej už môžeme postupovať iba za predpokladu, že rozlíšime niekoľko prípadov v závislosti od hodnôt parametrov a, b, c.

I. V prvom rade vidíme na poslednom riadku matice, že pre $a + 2 \neq 0$, t.j. pre $a \neq 3$, sústava nemá riešenie. V ďalšom budeme predpokladať, že $a = 3$, teda posledný riadok matice je nulový.

II. Ak $b \neq 3$ tak predposledný riadok matice určuje jednoznačné parametrické vyjadrenie premennej x_3, a síce $x_3 = \frac{c+3b+2}{b+2}$. Z druhého riadku matice potom máme $x_2 = 2 + x_3 = 2 + \frac{c+3b+2}{b+2}$ a z prvého riadku matice $x_1 = 4 + 4x_3 = 4 + 4\frac{c+3b+2}{b+2}$.

III. Nech $a = b = 3$. Predposledný riadok matice je potom $(0,0,0,c+1)$, čiže pre $c \neq 4$ sústava opäť nemá riešenie.

IV. Nech $a = b = 3$ a $c = 4$, t.j. posledné dva riadky matice sú nulové. Za hodnotu premennej x_3 zvolíme parameter t ($t \in \mathbb{Z}_5$) a z prvých dvoch riadkov vyjadríme x_1 a x_2: $x_1 = 4 + 4t$, $x_2 = 2 + t$.

Záver: Daná sústava lineárnych rovníc s parametrami nad $\mathbb{Z}_5$ nemá riešenie ak $a \in \{0,1,2,4\}$ alebo $a = b = 3$ a $c \in \{0,1,2,3\}$.

Ak $a = 3$ a $b \in \{0,1,2,4\}$, sústava má pre každú hodnotu $c \in \mathbb{Z}_5$ jediné riešenie $(x_1, x_2, x_3) = (4+4\frac{c+3b+2}{b+2}, 2+\frac{c+3b+2}{b+2}, \frac{c+3b+2}{b+2})$. Pre tieto hodnoty parametrov dostávame teda spolu 20 riešení.

Pre $a = b = 3$ a $c = 4$ má sústava parametrické riešenie $(x_1, x_2, x_3) = (4+4t, 2+t, t)$ $(t \in \mathbb{Z}_5)$. Pre tieto hodnoty parametrov a, b, c dostaneme teda ďalších 5 riešení. ■

3. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC S JEDINÝM RIEŠENÍM A INVERTOVATEĽNÉ MATICE

3.1. **Úvodné slovo.** V lineárnej algebre je dôležité vedieť rozhodnúť či daná štvorcová matica $\mathbf{A}$ stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$ je invertovateľná a v prípade, že je tomu tak, vedieť určiť inverznú maticu. Určenie inverznej matice je dôležité aj v technickej praxi, pretože mnohé fyzikálno-chemické modely sú opísané sústavami lineárnych rovníc. Napríklad nejaký chemický proces môže byť vyjadrený regulárnou maticou $\mathbf{A}$ stupňa n a v sústave $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ môže matica $\mathbf{X}$ typu $n \times 1$ predstavovať n vstupných hodnôt do procesu a matica $\mathbf{B}$ zas n výstupných hodnôt. Cieľom je určiť neznáme vstupné hodnoty $\mathbf{X}$ tak, aby sa dosiahli požadované výstupné hodnoty $\mathbf{B}$. Ak sa aj požadované výstupné hodnoty $\mathbf{B}$ menia, stačí vypočítať inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ raz a kedykoľvek sa zmení matica $\mathbf{B}$, hľadané riešenie $\mathbf{X}$ sa určí ako $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

V tejto kapitole ukážeme, že štvorcová matica $\mathbf{A}$ stupňa n je invertovateľná práve vtedy, keď homogénna sústava lineárnych rovníc $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ (kde $\mathbf{X}$ a $\mathbf{0}$ sú matice typu $n \times 1$) má jediné (triviálne) riešenie $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, a to je práve vtedy, keď sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ má jediné riešenie pre každú maticu $\mathbf{B}$ typu $n \times 1$. Potom opíšeme metódu ako možno vypočítať inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k invertovateľnej matici $\mathbf{A}$.

Homogénne sústavy lineárnych rovníc s jediným riešením. Maticový tvar homogénnej sústavy lineárnych rovníc je $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Významnou črtou homogénnych sústav je to, že sú riešiteľné, pretože majú vždy triviálne riešenie $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Rozšírená matica homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ nad poľom $\mathbb{F}$ je matica $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ typu $m \times (n+1)$, kde posledný stĺpec pozostáva z nulových prvkov poľa $\mathbb{F}$. Ako sme už spomenuli v poznámke 2.11, pri úpravách rozšírenej matice sústavy pomocou e.r.o. zostáva tento posledný stĺpec vždy nulový, preto pracujeme len s maticou sústavy namiesto rozšírenej matice sústavy.

Nasledujúci výsledok sa pochopiteľne týka i poľa $\mathbb{R}$, nad ktorým v školskej praxi najčastejšie riešime sústavy lineárnych rovníc.

3.1. Veta *Homogénna sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi nad nekonečným poľom $\mathbb{F}$ má v prípade $m < n$ nekonečne veľa navzájom rôznych riešení.*

Dôkaz Daná sústava má maticový tvar $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, kde matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$ a $\mathbf{0}$ sú postupne typu $m \times n$, $n \times 1$ a $m \times 1$. Predpokladajme, že úpravou matice $\mathbf{A}$ na redukovaný trojuholníkový tvar vznikne matica $\mathbf{B}$; táto má samozrejme najviac m nenulových riadkov s vedúcimi prvkami. Pretože $m < n$, musí mať matica $\mathbf{B}$ aspoň jeden stĺpec, ktorý neobsahuje vedúci prvok žiadneho riadku. Nech je to k-ty stĺpec, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Potom podľa Gaussovej-Jordanovej eliminačnej metódy, ktorú sme opísali v predchádzajúcej kapitole, v parametrickom riešení tejto sústavy neznáma x_k nadobúda ľubovoľnú hodnotu z poľa $\mathbb{F}$. Pretože za x_k môžeme dosadiť nekonečne veľa rôznych prvkov poľa $\mathbb{F}$, sústava má nekonečne veľa nazájom rôznych riešení. $\square$

3.2. Dôsledok *Ak* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sú matice typu* $m \times n$ *a* $n \times m$ *nad nekonečným poľom* $\mathbb{F}$ *a platí* $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$*, tak* $m \geqslant n$.

Dôkaz Najprv ukážeme, že sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{X}$ je matica typu $n \times 1$ má iba triviálne riešenie. Skutočne, ak $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, tak $\mathbf{B}(\mathbf{AX}) = \mathbf{B0} = \mathbf{0}$. Ale $\mathbf{B}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{BA})\mathbf{X}$, a pretože $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$, dostávame $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Pretože $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ je homogénna sústava m rovníc s n neznámymi nad nekonečným poľom $\mathbb{F}$ a nemá nekonečne veľa navzájom rôznych riešení, vzhľadom na vetu 3.1 nemôže platiť $m < n$, čiže $m \geqslant n$. □

Aj v prípade, že v matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ je $m \geqslant n$, je jasné, že redukovaná trojuholníková matica $\mathbf{B}$, ktorá vznikne pomocou e.r.o. z $\mathbf{A}$, má najviac n nenulových riadkov. Preto **každá homogénna sústava** m **lineárnych rovníc s** n **neznámymi je ekvivalentná sústave, kde** $m \leqslant n$. V prípade $m < n$ hovorí o počte riešení nad nekonečným poľom veta 3.1. Teraz sa budeme zaoberať prípadom $m = n$.

3.3. Veta *Nech* $\mathbf{A}$ *je štvorcová matica stupňa* n *a* $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{0}$ *sú matice typu* $n \times 1$ *nad poľom* $\mathbb{F}$*. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(1) *Sústava* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *má jediné (triviálne) riešenie.*
(2) $\mathbf{A}$ *je riadkovo ekvivalentná s jednotkovou maticou* $\mathbf{I}_n$.
(3) *Sústava* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *má jediné riešenie pre každú maticu* $\mathbf{B}$ *typu* $n \times 1$.

Dôkaz (1) $\Longrightarrow$ (2). Predpokladajme, že sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ má iba triviálne riešenie. Nech pri riešení tejto sústavy Gaussovou-Jordanovou eliminačnou metódou vznikne z matice sústavy $\mathbf{A}$ redukovaná trojuholníková matica $\mathbf{C}$ (teda $\mathbf{C}$ je ekvivalentná s $\mathbf{A}$). Keďže sústava $\mathbf{CX} = \mathbf{0}$ má jediné riešenie v poli $\mathbb{F}$ a $\mathbb{F}$ má minimálne dva rôzne prvky (nulový a jednotkový), za hodnotu žiadnej z premenných $x_1, \ldots, x_n$ nemohol byť zvolený parameter (povedzme $t \in \mathbb{F}$). Preto v redukovanej trojuholníkovej matici $\mathbf{C}$ musí každý stĺpec obsahovať jednotku ako vedúci prvok niektorého riadku. Teda $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Predpokladajme, že z matice $\mathbf{A}$ pomocou e.r.o. vznikla matica $\mathbf{I}_n$. Znamená to, že z rozšírenej matice $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ pomocou analogických e.r.o. vznikne matica $[\mathbf{I}_n|\mathbf{D}]$ s posledným stĺpcom $\mathbf{D}$, čo je nejaká matica $(d_1 \ldots d_n)^T$ typu $n \times 1$. Čiže sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ je ekvivalentná so sústavou $\mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{D}$, ktorá má evidentne jediné riešenie $(x_1, \ldots, x_n) = (d_1, \ldots, d_n)$. Toto je teda aj jediné riešenie sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Ak sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ má pre každú maticu $\mathbf{B}$ jediné riešenie, tak má jediné riešenie aj v prípade $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ a je zrejmé, že týmto riešením je triviálne riešenie $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. □

Sústavy s jediným riešením a invertovateľné matice. Vo vete 3.3 sme ukázali, že (nehomogénna) sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ nad poľom má jediné riešenie práve vtedy, keď homogénna sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ má jediné (triviálne) riešenie. Teraz ukážeme, že to je práve vtedy, keď matica $\mathbf{A}$ je invertovateľná.

Jedným smerom je posledné tvrdenie ľahko dokázateľné. Ak matica $\mathbf{A}$ je invertovateľná, t.j. má inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$, tak z rovnosti $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ dostaneme rovnosť $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{0}$, čiže $\mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{0}$, odkiaľ vyplýva $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Obrátené tvrdenie hovorí, že ak má sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ iba triviálne riešenie, tak matica $\mathbf{A}$ má inverznú maticu. Dokážeme ho v dvoch krokoch.

3.4. Lema *Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa n a nech platí, že sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ má iba triviálne riešenie. Potom existuje štvorcová matica $\mathbf{B}$ stupňa n tak, že platí $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$.*

Dôkaz Nech stĺpce matice $\mathbf{I}_n$ sú chápané ako matice $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n$ typu $n \times 1$. Keďže sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ má jediné riešenie, podľa vety 3.3 má aj každá zo sústav $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_j$, $j = 1, \dots, n$, jediné riešenie; označme ho $\mathbf{B}_j$. Nech $\mathbf{B}$ označuje štvorcovú maticu stupňa n so stĺpcami $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$. Možno ľahko preveriť, že v súčine $\mathbf{AB}$ je j-tym stĺpcom matica $\mathbf{E}_j$, čiže $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$. □

Maticu $\mathbf{B}$ z lemy 3.4 nazývame *pravou inverznou maticou* k matici $\mathbf{A}$. Analogicky sa definuje *ľavá inverzná matica* k danej matici.

3.5. Lema *Predpokladajme, že štvorcová matica $\mathbf{A}$ stupňa n má pravú inverznú maticu $\mathbf{B}$. Potom $\mathbf{A}$ je invertovateľná a $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$.*

Dôkaz Podľa predpokladu je $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ a našou úlohou je ukázať, že potom aj $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$.

Najprv ukážeme, že lemu 3.4 možno použiť pre maticu $\mathbf{B}$. Skutočne, z rovnosti $\mathbf{BX} = \mathbf{0}$ možno dostať rovnosť $\mathbf{A}(\mathbf{BX}) = \mathbf{0}$, čiže $\mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{0}$, odkiaľ vyplýva $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Podľa lemy 3.4 existuje preto k matici $\mathbf{B}$ pravá inverzná matica $\mathbf{C}$.

Teraz použijeme rovnosti $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{AI}_n = \mathbf{A}$ a $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{C}$, z ktorých dostávame $\mathbf{A} = \mathbf{C}$, čiže $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$. □

Dostávame teda nasledujúci systém navzájom ekvivalentných tvrdení, ktorý možno chápať ako hľadané kritérium pre invertovateľnosť štvorcovej matice stupňa n nad ľubovoľným poľom.

3.6. Veta ***(Kritérium invertovateľnosti matice)*** *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné pre ľubovoľnú štvorcovú maticu $\mathbf{A}$ stupňa n nad poľom.*

(1) *$\mathbf{A}$ je invertovateľná.*
(2) *$\mathbf{A}$ má ľavú inverznú maticu.*
(3) *Sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ má iba triviálne riešenie.*
(4) *$\mathbf{A}$ je riadkovo ekvivalentná s jednotkovou maticou $\mathbf{I}_n$.*
(5) *Sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ má jediné riešenie pre každú maticu $\mathbf{B}$ typu $n \times 1$.*
(6) *$\mathbf{A}$ má pravú inverznú maticu.*

Dôkaz Implikácia (1) $\Longrightarrow$ (2) je triviálna, pretože $\mathbf{A}^{-1}$ je ľavá inverzná matica k $\mathbf{A}$.
(2) $\Longrightarrow$ (3). Nech $\mathbf{C}$ je ľavá inverzná matica k $\mathbf{A}$. Potom

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{CAX} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Implikácie (3) $\Longrightarrow$ (4) a (4) $\Longrightarrow$ (5) vyplývajú z vety 3.3.
Implikácia (5) $\Longrightarrow$ (6) vyplýva z vety 3.3 a lemy 3.4.
Implikácia (6) $\Longrightarrow$ (1) je lema 3.5. □

Určenie inverznej matice. Z predchádzajúcej časti vyplýva, že inverzná matica k invertovateľnej matici $\mathbf{A}$ stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$ môže byť získaná riešením rovnice

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$$

nad okruhom $M_n(\mathbb{F})$, kde neznámou je matica $\mathbf{X} = [x_{ij}]$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$. Skutočne, matica $\mathbf{X}$, ktorá je riešením tejto rovnice, je pravá inverzná matica k matici $\mathbf{A}$, čiže podľa lemy 3.5 je to inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$. Všimnime si, že $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$ je zároveň maticový tvar sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a_{i1}x_{1i} + a_{i2}x_{2i} + \cdots + a_{in}x_{ni} &= 1 \quad (i = 1, \ldots, n) \\ a_{i1}x_{1j} + a_{i2}x_{2j} + \cdots + a_{in}x_{nj} &= 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j), \end{aligned}$$

pričom pod zovšeobecneným pojmom rozšírenej matice sústavy budeme tentoraz rozumieť maticu $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ typu $n \times 2n$.

Gaussova-Jordanova eliminačná metóda spolu s vetou 3.6 nám dávajú návod ako postupovať pri určení, či je daná štvorcová matica invertovateľná a v prípade, že áno, bude možné ihneď určiť aj inverznú maticu. Vieme totiž na základe vety 3.6, že štvorcová matica $\mathbf{A}$ je invertovateľná práve vtedy, keď je riadkovo ekvivalentná s jednotkovou maticou $\mathbf{I}_n$. Ak pomocou e.r.o. dostaneme z matice $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ typu $n \times 2n$ maticu $[\mathbf{B}|\mathbf{C}]$, kde $\mathbf{B}$ je redukovaná trojuholníková matica, tak sústava

$$\mathbf{BX} = \mathbf{C}$$

je **ekvivalentná** s pôvodnou sústavou $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$ (čiže majú rovnakú množinu riešení). Ak $\mathbf{A}$ je invertovateľná, tak $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ a nová sústava je

$$\mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{C}, \quad \text{odkiaľ} \quad \mathbf{X} = \mathbf{C}.$$

Matica $\mathbf{C}$, ktorú dostaneme v pravej časti matice $[\mathbf{I}_n|\mathbf{C}]$ bude teda hľadaná matica $\mathbf{A}^{-1}$.

Metóda na nájdenie inverznej matice teda pozostáva z nasledovných dvoch krokov:

Krok 1: Rozšírenú maticu $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]_{n,2n}$ sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$ upravíme pomocou e.r.o. na tvar $[\mathbf{B}|\mathbf{C}]$, pričom e.r.o vykonávame na celej matici $n \times 2n$ tak, aby sme v jej ľavej časti dostali z matice $\mathbf{A}$ redukovanú trojuholníkovú maticu $\mathbf{B}$.

Krok 2: (a) Ak pre redukovaný trojuholníkový tvar matice $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{B} \neq \mathbf{I}_n$, tak matica $\mathbf{A}$ nie je invertovateľná a skončíme.

(b) Ak matica $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ pomocou vykonaných e.r.o. prejde na tvar $[\mathbf{I}_n|\mathbf{C}]$, tak matica $\mathbf{A}$ je invertovateľná. V tom prípade sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$ je ekvivalentná so sústavou $\mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{C}$, a preto $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}$.

3.7. Poznámka Je zrejmé, že ak v kroku 1 počas úpravy matice $\mathbf{A}$ na redukovaný trojuholníkový tvar v rámci matice $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ dostaneme v ľavej časti nulový riadok, procedúru môžeme ihneď skončiť s prehlásením, že $\mathbf{A}$ nie je invertovateľná, pretože matica s nulovým riadkom nemôže byť ekvivalentná s jednotkovou maticou $\mathbf{I}_n$.

3.8. Príklad Našou úlohou bude zistiť, či matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ je invertovateľná a ak áno, určiť maticu $\mathbf{A}^{-1}$.

Podľa vyššie uvedenej metódy postupne dostávame

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_2 \to -R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \to R_1 + 2R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3 \\ R_3 \to -R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teda matica $\mathbf{A}$ je invertovateľná a vieme hneď určiť aj inverznú maticu:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

4. DETERMINANTY

Úvodné slovo. V kapitole 2 sme opísali Gaussovu-Jordanovu eliminačnú metódu riešenia sústav lineárnych rovníc a v predchádzajúcej kapitole sme eliminačnú metódu použili na výpočet inverznej matice k danej regulárnej matici. Pri riešení oboch uvedených úloh možno eliminačnú metódu nahradiť použitím determinantov, ktorými sa budeme zaoberať v tejto kapitole. Výhodou pri riešení pomocou determinantov je, že výsledky možno vyjadriť priamo vzorcami a výpočet tak pri nie príliš veľkej vstupnej matici (pozri poznámku 4.19) pomerne jednoducho previesť na počítači. Použitie determinatov je výhodné aj vtedy, keď potrebujeme k dispozícii výrazy vyjadrujúce riešenie kvôli ďalšej manipulácii s nimi. Nevýhodným vo všeobecnosti je takýto postup z hľadiska náročnejšej výpočtovej zložitosti, čím sa budeme zaoberať v závere tejto kapitoly.

Pojem determinantu. Uvažujme o sústave dvoch rovníc s dvoma neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= c_2. \end{aligned}$$

Odčítajme od a_{22}-násobku prvej rovnice a_{12}-násobok druhej rovnice a od a_{11}-násobku druhej rovnice a_{21}-násobok prvej rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= a_{22}c_1 - a_{12}c_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11}c_2 - a_{21}c_1. \end{aligned}$$

Vidíme, že ak $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, tak daná sústava má práve jedno riešenie. Toto riešenie bude možné prehľadne vyjadriť po zavedení nasledujúcej definície.

4.1. Definícia *Determinantom štvorcovej matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

stupňa 2 *nad poľom* $\mathbb{F}$ *nazývame výraz* $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. *Determinant matice* $\mathbf{A}$ *budeme označovať symbolom* $|\mathbf{A}|$.

Teraz vidíme, že ak $|\mathbf{A}| \neq 0$, tak riešenie danej sústavy je

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, \ x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|},$$

kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{pmatrix}.$$

4.2. Príklad Riešme nasledovnú sústavu rovníc nad poľom $\mathbb{Q}$:

$$\frac{2}{3}x_1 + 4x_2 = 8$$
$$\frac{9}{4}x_1 - 6x_2 = -12.$$

Matica $\mathbf{A}$ tejto sústavy a pomocné matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ majú tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 4 \\ \frac{9}{4} & -6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 8 \\ \frac{9}{4} & -12 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $|\mathbf{A}| = -13 \neq 0$, preto daná sústava bude mať jediné riešenie

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = 0, \ x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = 2.$$

■

Pripomeňme si, že pod permutáciou φ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ rozumieme ľubovoľné bijektívne zobrazenie na tejto množine. Nech $\mathcal{S}(n)$ je množina všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ (pripomíname, že vzhľadom na operáciu skladania zobrazení tvorí grupu – tzv. symetrickú grupu rádu n). Ak pre prvky $i < j$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ platí $\varphi(i) > \varphi(j)$, budeme dvojicu $(\varphi(i), \varphi(j))$ nazývať *inverziou permutácie* φ. Nech $I(\varphi)$ je počet všetkých inverzií permutácie φ.

4.3. Príklad Existuje šesť permutácií množiny $\{1, 2, 3\}$: $\varphi_1 = (1)(23), \varphi_2 = (2)(13)$, $\varphi_3 = (3)(12)$, $\varphi_4 = (123)$, $\varphi_5 = (132)$, $\varphi_6 = \mathrm{id}$.

Permutácia φ_2 má zrejme tri inverzie:

$$(\varphi_2(1), \varphi_2(2)) = (3, 2), \ (\varphi_2(1), \varphi_2(3)) = (3, 1), \ (\varphi_2(2), \varphi_2(3)) = (2, 1).$$

Teda $I(\varphi_2) = 3$. Presvedčte sa, že $I(\varphi_1) = 1$, $I(\varphi_3) = 1$, $I(\varphi_4) = 2$, $I(\varphi_5) = 2$, $I(\varphi_6) = 0$. ■

4.4. Definícia *Nech* $\mathbf{A}$ *je štvorcová matica stupňa* n *nad poľom* $\mathbb{F}$. *Determinantom matice* $\mathbf{A}$ *nazývame súčet*

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}(n)} (-1)^{I(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \ldots a_{n\varphi(n)}$$

tvorený cez všetky permutácie φ *množiny* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Definícia 4.4 rozširuje definíciu 4.1 determinantu matice $\mathbf{A}$ stupňa 2. Naozaj, existujú dve permutácie množiny $\{1, 2\}$: $\varphi = \mathrm{id}$ a $\psi = (12)$. Na základe definície 4.4 potom dostávame

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (-1)^{I(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} + (-1)^{I(\psi)} a_{1\psi(1)} a_{2\psi(2)} \\ &= (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

Teraz vypočítajme podľa definície 4.4 determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

stupňa 3. V príklade 4.3 sme ukázali, že existuje šesť permutácií množiny $\{1, 2, 3\}$. Podľa definície 4.4 teda dostávame

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{i=1}^{6} (-1)^{I(\varphi_i)} a_{1\varphi_i(1)} a_{2\varphi_i(2)} a_{3\varphi_i(3)} \\ &= (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} \\ &+ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že pre výpočet determinantu matice tretieho stupňa možno použiť tzv. **Sarusovo pravidlo**. Pripíšme k stĺpcom matice $\mathbf{A}$ sprava ešte raz druhý a tretí stĺpec. Dostaneme

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Vynásobíme všetky trojice prvkov ležiace na plných čiarach a priradíme im "kladné znamienka". Tiež vynásobíme všetky trojice prvkov ležiace na bodkovaných čiarach a priradíme im "záporné znamienka". Ako vidíme, výsledný súčet je práve $|\mathbf{A}|$.

4.5. Príklad Podľa práve prezentovaného Sarusovho pravidla vypočítame determinat matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ \frac{6}{5} & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pripíšeme k stĺpcom matice $\mathbf{A}$ sprava ešte raz druhý a tretí stĺpec.

$$\begin{array}{ccccc} -3 & \frac{1}{2} & 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 5 \\ \frac{6}{5} & -1 & 2 & \frac{6}{5} & -1 \end{array}$$

Sarusovým pravidlom dostaneme

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| = &(-3)\cdot 5\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot\frac{6}{5} + 1\cdot(-2)\cdot(-1) - 1\cdot 5\cdot\frac{6}{5} - (-3)\cdot(-4)\cdot(-1)\\
&- \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot 2 = -30 - \frac{12}{5} + 2 - 6 + 12 + 2 = -20 - \frac{12}{5} = -\frac{112}{5}.
\end{aligned}
$$

■

Vlastnosti determinantov. Ukázali sme, že pre maticu $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stupňa 3 nad poľom $\mathbb{F}$ je jej determinant rovný

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| =& a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\\
&+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že platia nasledujúce rovnosti:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\
&= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\
&= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22}\\ a_{13} & a_{23}\end{vmatrix}\\
&= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\
&= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Čitateľ si z týchto rovností môže odvodiť, že determinant matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stupňa 3 možno pre každé $i = 1, 2, 3$ a $j = 1, 2, 3$ vyjadriť ako

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= (-1)^{i+1}a_{i1}|\mathbf{M}_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|\mathbf{M}_{i2}| + (-1)^{i+3}a_{i3}|\mathbf{M}_{i3}|\\
&= (-1)^{1+j}a_{1j}|\mathbf{M}_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|\mathbf{M}_{2j}| + (-1)^{3+j}a_{3j}|\mathbf{M}_{3j}|
\end{aligned}
$$

kde $\mathbf{M}_{ij}$ je matica typu 2×2, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca. Oba vzorce možno zovšeobecniť pre determinant ľubovoľnej štvorcovej matice stupňa n tak ako to vyjadruje nasledujúca veta. O jej platnosti pre $n = 3$ sme už čitateľa presvedčili, všeobecný dôkaz však vynecháme (možno ho nájsť napr. v [3], veta 2.14.1).

4.6. Veta ***(Laplaceov rozvoj determinantu)*** *Nech* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *je štvorcová matica stupňa* n $(n \geqslant 2)$*. Potom pre každé* $i = 1, \dots, n$ *a* $j = 1, \dots, n$ *platí*

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+1} a_{i1} |\mathbf{M}_{i1}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} |\mathbf{M}_{in}|, \tag{4.1}$$

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{1+j} a_{1j} |\mathbf{M}_{1j}| + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} |\mathbf{M}_{nj}| \tag{4.2}$$

kde $\mathbf{M}_{ij}$ *je matica stupňa* $n-1$*, ktorá vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *vynechaním* i*-teho riadku a* j*-teho stĺpca. Vzorec* (4.1) *sa nazýva Laplaceov*[4] *rozvoj determinantu matice* $\mathbf{A}$ *podľa* i*-teho riadku a vzorec* (4.2) *sa nazýva Laplaceov rozvoj determinantu matice* $\mathbf{A}$ *podľa* j*-teho stĺpca.*

4.7. Príklad Vypočítame determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Laplaceov rozvoj determinantu $|\mathbf{A}|$ podľa tretieho riadku nám dá

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (7 - 58) - 0 - 1 \cdot (-41 + 6) - 1 \cdot (13 - 36) \\ &= -102 + 35 + 23 = -44. \end{aligned}$$

Rovnaký výsledok dostaneme, ak rozvinieme determinant podľa ľubovoľného iného riadku alebo podľa ľubovoľného stĺpca. (Presvedčte sa o tom.) ■

Nech vo vete 4.6 $A_{ij} := (-1)^{i+j} |\mathbf{M}_{ij}|$. Výraz A_{ij} nazývame *algebraickým doplnkom prvku* a_{ij}. Veta 4.6 teda hovorí, že Laplaceov rozvoj determinantu matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_n$ podľa i-teho riadku je

$$|\mathbf{A}| = a_{i1} A_{i1} + \dots + a_{in} A_{in}$$

a podľa j-teho stĺpca je

$$|\mathbf{A}| = a_{1j} A_{1j} + \dots + a_{nj} A_{nj}.$$

[4]Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827) pochádzal z chudobnej francúzskej rodiny a doma navštevoval miestnu vojenskú školu. Napriek tomu sa neskôr vypracoval na pozoruhodnú vedeckú osobnosť a vo vedeckých kruhoch sa tešil značnému rešpektu. V roku 1785 bol zvolený do slávnej *Académie des Sciences*. Bol šesť týždňov aj Napoleonovým ministrom vnútra a neskôr stál na čele Senátu. Bol tiež prezidentom Francúzskej Akadémie. Jadro jeho vedeckej práce spočívalo v aplikáciach matematickej analýzy v mechanike a pravdepodobnosti.

Na základe tohto sa indukciou dá ľahko dokázať nasledujúce tvrdenie.

4.8. Dôsledok *Nech* $\mathbf{A}$ *je štvorcová matica stupňa* n*. Potom*

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|.$$

Determinant štvorcovej matice $\mathbf{A}$ stupňa n môžeme chápať aj ako funkciu $|\mathbf{A}| = |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)|$ riadkov $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ matice $\mathbf{A}$ (pričom riadky chápeme ako matice typu $1 \times n$). Nasledujúca veta hovorí, že determinant matice chápaný ako funkcia riadkov matice sa správa lineárne.

4.9. Veta *Pre determinant ľubovoľnej štvorcovej matice* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *stupňa* n *nad poľom* $\mathbb{F}$ *a pre ľubovoľné* $c \in \mathbb{F}$ *a ľubovoľnú maticu* $\mathbf{B}_i$ *typu* $1 \times n$ *nad* $\mathbb{F}$ *platí:*

(1) $|(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{i-1}, c\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{i+1}, \ldots, \mathbf{A}_n)| = c|(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)|$;

(2) $$\begin{aligned}|(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i, \mathbf{A}_{i+1}, \ldots, \mathbf{A}_n)| &= |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{i+1}, \ldots, \mathbf{A}_n)| \\ &\quad + |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{B}_i, \mathbf{A}_{i+1}, \ldots, \mathbf{A}_n)|;\end{aligned}$$

(3) $|(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{0}, \mathbf{A}_{i+1}, \ldots, \mathbf{A}_n)| = \mathbf{0}$.

Dôkaz Vo všetkých troch prípadoch rozvinieme determinant na ľavej strane rovnosti podľa i-teho riadku. V prípade (1) tak dostaneme

$$\begin{aligned}&|(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{i-1}, c\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{i+1}, \ldots, \mathbf{A}_n)| \\ &\qquad = (-1)^{i+1} \cdot c \cdot a_{i1} \cdot |\mathbf{M}_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n} \cdot c \cdot a_{in} \cdot |\mathbf{M}_{in}| \\ &\qquad = c \cdot [(-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot |\mathbf{M}_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot |\mathbf{M}_{in}|] \\ &\qquad = c \cdot |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{i+1}, \ldots, \mathbf{A}_n)|.\end{aligned}$$

Prípady (2) a (3) prenechávame na čitateľa. □

Čitateľovi doporučujeme sformulovať a dokázať analogický "stĺpcový" variant tejto vety, keď determinant matice $\mathbf{A}$ chápeme ako funkciu $|\mathbf{A}| = |(\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^n)|$ stĺpcov $\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^n$ matice $\mathbf{A}$.

4.10. Veta *Ak má štvorcová matica* $\mathbf{A}$ *stupňa* n $(n \geqslant 2)$ *dva rovnaké riadky alebo stĺpce, tak jej determinant sa rovná nule.*

Dôkaz Dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na stupeň n matice $\mathbf{A}$. Pre $n = 2$ tvrdenie evidentne platí. Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké $n \geqslant 2$ a dokážeme, že potom platí aj pre $n + 1$.

Nech matica $\mathbf{A}$ stupňa $n + 1$ má i-ty riadok totožný s j-tym riadkom (pre dva totožné stĺpce je dôkaz analogický a prenechávame ho ako ľahké cvičenie na čitateľa). Pretože $\mathbf{A}$ má stupeň $n + 1 > 2$, môžeme v nej zvoliť riadok, povedzme k-ty, kde

$k \neq i$ a $k \neq j$ a rozvinúť determinant $|\mathbf{A}|$ podľa k-teho riadku. Dostaneme

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{k+1} a_{k1} |\mathbf{M}_{k1}| + \cdots + (-1)^{k+n} a_{kn} |\mathbf{M}_{kn}|.$$

Pretože pre každé $j = 1, \ldots, n$ je $\mathbf{M}_{kj}$ matica stupňa n, ktorá má opäť dva riadky rovnaké (keďže vznikne z $\mathbf{A}$ vynechaním k-teho riadku a j-teho stĺpca a k je rôzne od i, j), podľa indukčného predpokladu je $|\mathbf{M}_{kj}| = 0$ pre všetky $j = 1, \ldots, n$. Preto $|\mathbf{A}| = 0$, čo bolo treba dokázať. $\square$

Nasledujúca veta hovorí, že ak na matici vykonáme e.r.o. typu (1), jej determinant zmení iba znamienko a pri e.r.o. typu (3) sa nezmení vôbec.

4.11. Veta *Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa n ($n \geqslant 2$) nad poľom $\mathbb{F}$.*

(1) *Ak v matici $\mathbf{A}$ zameníme navzájom i-ty a j-ty riadok, tak jej determinant zmení znamienko.*

(2) *Ak v matici $\mathbf{A}$ pripočítame c-násobok ($c \in \mathbb{F}$) j-teho riadku k i-temu riadku, tak jej determinant sa nezmení.*

Dôkaz

(1) Podľa vety 4.10 a vety 4.9(2) platí

$$\begin{aligned}
0 &= |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_n)| \\
&= |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_n)| + |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_n)| \\
&= |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| + |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_n)| \\
&+ |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| + |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_n)| \\
&= |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| + 0 + 0 + |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_n)|.
\end{aligned}$$

Odtiaľ dostávame požadovanú rovnosť

$$|(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| = -|(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_n)|.$$

(2) Opäť podľa vety 4.9 a vety 4.10 dostávame

$$\begin{aligned}
&|(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i + c\mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| \\
&\qquad = |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| + |(\mathbf{A}_1, \ldots, c\mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| \\
&\qquad = |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| + c|(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| \\
&\qquad = |(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots, \mathbf{A}_j, \ldots, \mathbf{A}_n)| + 0.
\end{aligned}$$

Tým je tvrdenie dokázané. $\square$

Keďže z viet 4.9 a 4.11 vieme ako sa zmení determinant matice pri vykonaní elementárnych riadkových operácií na tejto matici, môže nám to výrazne pomôcť pri výpočte determinantov. Stačí, ak maticu ktorej determinant počítame upravíme pomocou e.r.o. na hornú alebo dolnú trojuholníkovú maticu, pretože jej determinant sa už potom ľahko vypočíta podľa nasledujúceho tvrdenia, ktoré je bezprostredným dôsledkom vety 4.6.

4.12. Dôsledok *Determinant trojuholníkovej matice sa rovná súčinu prvkov na jej diagonále.*

Dôkaz Dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na stupeň n trojuholníkovej matice, ktorej determinant počítame. Je zrejmé, že tvrdenie platí pre $n = 1$. Predpokladajme, že platí pre všetky trojuholníkové matice stupňa n a ukážeme, že platí aj pre všetky trojuholníkové matice stupňa $n + 1$.

Nech $\mathbf{A}$ je trojuholníková matica stupňa $n + 1$, ktorá má na diagonále prvky $a_{11}, \ldots, a_{nn}, a_{n+1,n+1}$ a predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že práve v riadku s prvkom $a_{n+1,n+1}$ sú ostatné prvky nulové. Rozviňme determinant $|\mathbf{A}|$ práve podľa tohto riadku. Na základe vety 4.6 dostaneme

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot a_{n+1,n+1} \cdot |\mathbf{M}_{n+1,n+1}|, \tag{4.3}$$

kde $M_{n+1,n+1}$ je štvorcová matica stupňa n, ktorá vznikne z $\mathbf{A}$ vynechaním jej $(n+1)$-ého riadku a $(n+1)$-ého stĺpca. Je zrejmé, že matica $\mathbf{M}_{n+1,n+1}$ je opäť trojuholníková s prvkami $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ na diagonále, preto sa na ňu vzťahuje indukčný predpoklad. Podľa neho $|\mathbf{M}_{n+1,n+1}| = a_{11} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{nn}$, a preto po dosadení do (4.3) dostaneme požadovaný výsledok

$$|\mathbf{A}| = a_{n+1,n+1} \cdot |\mathbf{M}_{n+1,n+1}| = a_{11} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{nn} \cdot a_{n+1,n+1}.$$

□

4.13. Príklad Vypočítajme ešte raz determinant matice z Príkladu 4.7, tentoraz tak, že maticu upravíme na trojuholníkovú maticu a potom použijeme dôsledok 4.12.

Výpočet je nasledovný, komentár k nemu je pod ním.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 19 & 27 \\ 0 & 0 & -23 & -35 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 19 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-44}{19} \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 19 \cdot \frac{-44}{19} = -44.$$

V prvom kroku sme pripočítali vhodné násobky prvého riadku k ostatným riadkom; išlo teda o e.r.o. typu (3), pri ktorých sa determinant nezmenil. V druhom kroku sme zamenili druhý riadok so štvrtým, čím determinant zmenil znamienko. V treťom kroku sme pripočítali vhodné násobky druhého riadku k tretiemu a štvrtému riadku, determinant sa nezmenil. Vo štvrtom kroku sme $\frac{23}{19}$-násobok tretieho riadku pripočítali k štvrtému riadku, determinant sa opäť nezmenil. Dostali sme (hornú) trojuholníkovú maticu, ktorej determinant sme vypočítali ako súčin prvkov na jej diagonále. ■

4.14. Dôsledok *Štvorcová matica je regulárna práve vtedy, keď jej determinat je rôzny od nuly.*

Dôkaz Upravme danú štvorcovú maticu $\mathbf{A}$ pomocou e.r.o. na redukovanú trojuholníkovú maticu, povedzme $\mathbf{B}$. Pretože pri e.r.o. typu (1) sa mení len znamienko determinantu, pri e.r.o. typu (2) sa determinant vynásobí nenulovým prvkom poľa a pri e.r.o. typu (3) sa nezmení vôbec, je zrejmé, že $|\mathbf{A}| \neq 0$ práve vtedy, keď $|\mathbf{B}| \neq 0$; keďže $|\mathbf{B}|$ je súčinom prvkov na diagonále $\mathbf{B}$, tieto sú všetky nenulové práve vtedy, keď matica $\mathbf{A}$ je regulárna. □

4.15. Príklad Nasledujúce determinanty v (a), (b) a (c) sú tzv. Vandermondove[5] determinanty stupňov $3, 4$ a n:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \qquad (c)\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ukážeme ako sa dá vypočítať Vandermodov determinant stupňa 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} R_2 \to R_2 - aR_1 \\ R_3 \to R_3 - aR_2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} (b-a) & (c-a) \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Prvá rovnosť vyplýva z dôsledku 4.8, pri druhej rovnosti sme použili Laplaceov rozvoj podľa prvého stĺpca.

Prenechávame na čitateľa vypočítať determinant v (b), nájsť všeobecný vzorec pre determinant v (c) a dokázať ho matematickou indukciou. ■

Použitie determinantov. Najprv ukážeme ako možno determinanty použiť na výpočet inverznej matice k danej regulárnej matici.

4.16. Definícia *Nech* $\mathbf{A}$ *je štvorcová matica stupňa* n. *Adjungovanou maticou k matici* $\mathbf{A}$ *sa nazýva matica* $\operatorname{adj} \mathbf{A} = [A_{ji}]$, *ktorej* (ij)*-ty prvok je algebraický doplnok* A_{ji} *prvku* a_{ji}.

---

[5]Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) sa narodil v Paríži. Jeho otec, lekár, ho usmernil na hudobnú kariéru. Bol spoluzakladateľom *Conservatoire des Arts et Métiers*, kde bol dirigentom od roku 1782. V roku 1795 pomohol pri založení kurzov politickej ekonómie. Bol aktívny počas Veľkej francúzskej revolúcie. Bol členom Parížskej komúny a klubu Jakobínov.

Vandermondovo matematické dielo pozostáva zo štyroch článkov, ktoré vyšli počas dvoch rokov. Vo všeobecnosti sa považuje za zakladateľa teórie determinantov.

4.17. Veta *Nech* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *je regulárna matica stupňa* n. *Inverzná matica k* $\mathbf{A}$ *je*

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|\mathbf{A}|} & \frac{A_{21}}{|\mathbf{A}|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{A_{12}}{|\mathbf{A}|} & \frac{A_{22}}{|\mathbf{A}|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|\mathbf{A}|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|\mathbf{A}|} & \frac{A_{2n}}{|\mathbf{A}|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|\mathbf{A}|} \end{pmatrix}.$$

Dôkaz Označme $\mathbf{B}$ maticu uvedenú vyššie, o ktorej tvrdíme, že je inverzná k $\mathbf{A}$. Nech ďalej $\mathbf{C} := \mathbf{AB}$. Vypočítajme (ij)-ty prvok c_{ij} matice $\mathbf{C}$ pre ľubovoľné $1 \leqslant i, j \leqslant n$:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}\frac{A_{j1}}{|\mathbf{A}|} + \dots + a_{in}\frac{A_{jn}}{|\mathbf{A}|} \\ &= a_{i1}\frac{(-1)^{j+1}|\mathbf{M}_{j1}|}{|\mathbf{A}|} + \dots + a_{in}\frac{(-1)^{j+n}|\mathbf{M}_{jn}|}{|\mathbf{A}|}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde pre všetky $s = 1, \dots, n$, $\mathbf{M}_{js}$ je matica stupňa $n-1$, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynechaním j-teho riadku a s-tého stĺpca.

Nech i, j sú ľubovoľné ale pevne zvolené indexy z množiny $\{1, \dots, n\}$. Nahraďme v matici $\mathbf{A}$ jej j-ty riadok i-tym riadkom a maticu, ktorú takto dostaneme označme $\mathbf{D}$. (Načrtnite si $\mathbf{A}$ a $\mathbf{D}$.) Laplaceov rozvoj $|\mathbf{D}|$ podľa j-teho riadku (čo je i-ty riadok matice $\mathbf{A}$) nám dá

$$|\mathbf{D}| = (-1)^{j+1}a_{i1}|\mathbf{M}_{j1}| + \dots + (-1)^{j+n}a_{in}|\mathbf{M}_{jn}|, \tag{4.5}$$

kde pre všetky $s = 1, \dots, n$, $\mathbf{M}_{js}$ je matica stupňa $n-1$, ktorá vznikne z matice $\mathbf{D}$ vynechaním j-teho riadku a s-tého stĺpca; vzhľadom na konštrukciu matice $\mathbf{D}$ z matice $\mathbf{A}$ vidíme, že pre všetky $s = 1, \dots, n$, $\mathbf{M}_{js}$ v (4.4) a $\mathbf{M}_{js}$ v (4.5) je vlastne tá istá matica stupňa $n-1$. Preto môžeme súčet zo (4.5) dosadiť do (4.4) a dostaneme

$$c_{ij} = \frac{|\mathbf{D}|}{|\mathbf{A}|}. \tag{4.6}$$

Ak $i = j$, teda matica $\mathbf{D}$ vznikla z $\mathbf{A}$ "nahradením" jej j-teho riadku opäť tým istým j-tym riadkom, vidíme, že $|\mathbf{D}| = |\mathbf{A}|$, a preto $c_{ii} = 1$ pre ľubovoľné $i = 1, \dots, n$. Nech $i \neq j$. Pretože matica $\mathbf{D}$ má rovnaké riadky, i-ty a j-ty, je podľa vety 4.10 jej determinant $|\mathbf{D}|$ rovný nule. Teda zo (4.6) dostávame $c_{ij} = 0$ pre ľubovoľné $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Čiže $\mathbf{C}$ je jednotková matica $\mathbf{I}_n$, teda $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$. Úplne analogicky platí $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$. Teda $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. □

Ukážeme, že determinanty možno použit' aj na vyjadrenie riešenia sústavy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{4.7}$$

n lineárnych rovníc s n neznámymi nad pol'om $\mathbb{F}$ v prípade, že matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ sústavy má nenulový determinant $|\mathbf{A}| \neq 0$, čiže je regulárna. Toto tvrdenie je známe ako **Cramerovo pravidlo**.[6]

4.18. Veta ***(Cramerovo pravidlo)*** *Ak matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ sústavy (4.7) je regulárna, tak sústava má jediné riešenie*

$$x_1 = \frac{|\mathbf{B}^1|}{|\mathbf{A}|},\ x_2 = \frac{|\mathbf{B}^2|}{|\mathbf{A}|}, \dots,\ x_n = \frac{|\mathbf{B}^n|}{|\mathbf{A}|}$$

kde $\mathbf{B}^j$ je matica, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahradením jej j-teho stĺpca maticou $\mathbf{B} := (b_1 \dots b_n)^T$ typu $1 \times n$, t.j. pravou stranou sústavy (4.7).

Dôkaz Sústavu (4.7) má maticový tvar $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{X} := (x_1 \dots x_n)^T$. Po vynásobení zl'ava maticou $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ a po dosadení za $\mathbf{A}^{-1}$ z vety 4.17 a vynásobení dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{11}}{|\mathbf{A}|} \cdot b_1 + \cdots + \frac{A_{n1}}{|\mathbf{A}|} \cdot b_n = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{s=1}^{n} b_s A_{s1}, \\ x_2 &= \frac{A_{12}}{|\mathbf{A}|} \cdot b_1 + \cdots + \frac{A_{n2}}{|\mathbf{A}|} \cdot b_n = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{s=1}^{n} b_s A_{s2}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= \frac{A_{1n}}{|\mathbf{A}|} \cdot b_1 + \cdots + \frac{A_{nn}}{|\mathbf{A}|} \cdot b_n = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sn}. \end{aligned}$$

Pretože pre $j = 1, \dots, n$ je výraz $\sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj}$, vlastne Laplaceov rozvoj determinantu $|\mathbf{B}^j|$ podl'a j-teho stĺpca, dostávame požadované vzorce

$$x_1 = \frac{|\mathbf{B}^1|}{|\mathbf{A}|},\ x_2 = \frac{|\mathbf{B}^2|}{|\mathbf{A}|}, \dots,\ x_n = \frac{|\mathbf{B}^n|}{|\mathbf{A}|}.$$

□

[6]Gabriel Cramer (1704–1752) sa narodil v Ženeve. Učil na *Académie de Calvin*, vel'a cestoval a aktívne sa angažoval v občianskych záležitostiach.

Jeho pravidlo pre riešenie sústav lineárnych rovníc bolo publikované v roku 1750 v prílohe jeho diela *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*. Niektorí matematici toto pravidlo poznali síce už aj predtým, ale nebolo široko známe a tiež nebolo dostatočne jasne vysvetlené až kým sa neobjavila Cramerova kniha.

4.19. Poznámka (**Výpočtová zložitosť**) Väčšina úloh v technickej praxi pri ktorých sa aplikujú metódy lineárnej algebry, ide najmä o riešenie sústav lineárnych rovníc s pomerne veľkými maticami sústavy, sa rieši s pomocou počítača. Preto je dôležité porovnať tzv. výpočtovú zložitosť pri riešení sústav lineárnych rovníc Gaussovou-Jordanovou eliminačnou metódou resp. Cramerovým pravidlom. Týka sa to rovnako výpočtu inverznej matice, kde sa tiež treba rozhodnúť medzi eliminačnou metódou a použitím determinantov. Pretože väčšina "počítačového času" sa pritom spotrebuje na násobenie, zatiaľčo sčitovanie je "rýchle" a spotrebu času pri ňom možno pri odhade zanedbať, na porovnanie oboch metód sa zvykne použiť len počet potrebných násobení.

Predpokladajme, že máme riešiť sústavu lineárnych rovníc $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa 25. Aby sme vypočítali jej riešenie podľa Cramerovho pravidla, potrebujeme vypočítať determinant matice $\mathbf{A}$. Laplaceov rozvoj podľa prvého riadku nám dá $|\mathbf{A}| = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1,25}A_{1,25}$, kde A_{1j} je algebraický doplnok prvku a_{1j}. Na to potrebujeme 25 násobení, ak poznáme hodnoty algebraických doplnkov A_{1j}. Každý algebraický doplnok A_{1j} je až na znamienko rovný determinantu matice stupňa 24 a jeho rozvoj podľa niektorého riadku si vyžiada ďalších 24 násobení. Vidíme teda, že ak pri každom z prvých 25 násobení použijeme ďalších 24 násobení pri vyjadreniach doplnkov A_{1j}, dopracujeme sa k výrazu obsahujúcemu determinanty matíc stupňa 23. Pritom už použijeme $25 \cdot 24$ násobení. Pokračujúc ďalej vidíme, že na výpočet determinantu štvorcovej matice stupňa 25 potrebujeme

$$25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = 25!$$

násobení. Aj superpočítaču budúcnosti, ktorý by dokázal vykonať 100 miliárd násobení za sekundu, by výpočet determinantu stupňa 25 trval viac ako 4 milióny rokov! Na druhej strane Gaussovou-Jordanovou eliminačnou metódou potrebujeme na vyriešenie sústavy 25 rovníc s 25 neznámymi iba približne 25^3 násobení a riešenie nájdeme na súčasných počítačoch skôr ako za sekundu. Vo všeobecnosti je eliminačná metóda z hľadiska výpočtovej zložitosti výhodná už pri použití štvorcových matíc stupňa väčšieho ako 4. Pri určovaní inverznej matice k regulárnej štvorcovej matici stupňa nanajvýš 4 resp. pri riešení sústav lineárnych rovníc s maticami sústavy menšími ako 4×4 sú obe metódy približne rovnako výpočtovo náročné. Výpočtovej zložitosti pri použití determinantov sa podrobnejšie venuje napríklad článok 2.3 knihy [4].

Poznamenávame, že ďaší dôležitý faktor pri porovnaní oboch metód je, že Cramerovo pravidlo nehovorí nič o riešiteľnosti sústavy (4.7) v prípade, že matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ sústavy nie je regulárna. To sa ale pri použití Cramerovho pravidla dá zistiť až po prevedení náročného výpočtu determinantu $|\mathbf{A}|$. Rovnako pri použití vety 4.17 na výpočet inverznej matice k danej štvorcovej matici, o ktorej predpokladáme, že je invertovateľná, by sme až po náročnom výpočte determinantu $|\mathbf{A}|$ mohli zistiť, že daná matica prípadne invertovateľná nie je. Pri použití eliminačnej metódy na to spravidla prídeme za cenu oveľa menšej výpočtovej náročnosti (pozri poznámku 3.7).

5. VEKTOROVÉ PRIESTORY A PODPRIESTORY

Úvodné slovo. V algebre I sme sa zaoberali grupami, teda množinami s operáciou sčitovania prvkov ktorá mala isté vymedzené vlastnosti. V algebre II sme študovali množiny polynómov nad poľom ktoré s operáciou sčitovania polynómov tvorili opäť grupu, ale naviac bolo možné polynómy násobiť prvkami poľa. Toto násobenie malo tiez určité vymedzené vlastnosti. Podobne sa čitateľ stretol v prvom semestri matematickej analýzy s množinami reálnych funkcií reálnej premennej (t.j. funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$) ktoré s operáciou sčitovania tvorili opäť grupu a bolo ich možné násobiť reálnym číslom, pričom toto násobenie malo tie vlastnosti ako násobenie polynómov. V kapitole 1 tohto textu sme sa zaoberali množinami matíc nad poľom s operáciami sčitovania a násobenia skalárom, pričom vzhľadom na sčitovanie tvorili grupu a násobenie skalárom malo opäť vlastnosti ako vo vyššie spomenutých príkladoch. Je načase uviesť abstraktný pojem vektorového priestoru nad poľom, ktorého príkladmi sú práve množiny polynómov nad poľom, množiny reálnych funkcií i množiny matíc nad poľom.

Vektorové priestory.

5.1. Definícia *Nech $\mathbb{F}$ je pole. Nech V je neprázdna množina s operáciou sčitovania $+$ a nech pre každý prvok $c \in \mathbb{F}$ a každý prvok $\alpha \in V$ je priradený prvok $c \cdot \alpha \in V$, pričom*

(1) $(V, +)$ *je abelovská grupa*

a pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in V$ a $c, d \in \mathbb{F}$ platí

(2) $c \cdot (\alpha + \beta) = c \cdot \alpha + c \cdot \beta$,
(3) $(c + d) \cdot \alpha = c \cdot \alpha + d \cdot \alpha$,
(4) $(cd)\alpha = c \cdot (d\alpha)$,
(5) $1_F \cdot \alpha = \alpha$.

Potom V nazývame vektorovým priestorom nad poľom $\mathbb{F}$ a označujeme ho $V(\mathbb{F})$. Prvky grupy V nazývame vektory *a prvky poľa $\mathbb{F}$* skaláry.

5.2. Poznámka Na rozdiel od okruhov či polí nie je celkom korektné hovoriť v tomto prípade o algebre. Dôvodom je, že násobenie skalárom nie je operáciou na množine V, pretože sa nenásobia prvky množiny V, ale "násobený" je prvok grupy V s prvkom poľa $\mathbb{F}$ (s výsledkom vo V). Vektorové priestory však možno "prerobiť na algebry" $V(\mathbb{F}) = (V, +, (c \cdot -)_{c \in \mathbb{F}})$ tým, že pre každý skalár $c \in \mathbb{F}$ sa definuje unárna operácia $(c \cdot -) : V \to V,\ \alpha \mapsto c \cdot \alpha$. V tomto texte to nebudeme robiť, avšak vedomí si takejto možnosti použijeme niekedy i pre násobenie skalárom termín "operácia".

Nulový prvok grupy $(V, +)$ nazývame *nulovým vektorom* a budeme ho označovať $\mathbf{0}$, aby sme ho odlíšili od nulového skalára 0. Podobne, opačný prvok v aditívnej grupe $(V, +)$ k prvku α budeme nazývať opačným vektorom k α a označovať $-\alpha$.

5.3. Príklad Vo všetkých príkladoch vektorových priestorov uvedených dole sa presvedčte, že skutočne platia vlastnosti (1)-(5) z definície 5.1.

1. $V_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ je vektorový priestor geometricky známy ako priamka (reálna os). Body priamky prislúchajú v bijektívnom zobrazení reálnym číslam, bod prislúchajúci číslu $a \in \mathbb{R}$ môžeme označit' $\mathbf{A} = [a]$. Číslu 0 prislúcha na priamke *nulový bod* $\mathbf{O} = [0]$. Možno definovat' *vzdialenost'* dvoch bodov $\mathbf{A} = [a]$ a $\mathbf{B} = [b]$ priamky ako $|\mathbf{AB}| := |a - b|$, kde posledný výraz znamená absolútnu hodnotu rozdielu čísel a, b; čitateľ to pozná zo školy pod názvom *dĺžka úsečky* $\mathbf{AB}$.

2. $V_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ je vektorový priestor geometricky známy ako rovina, ktorého vektory $\alpha = (a_1, a_2)$ sú znázorňované ako body v rovine majúce v tradičnom pravouhlom súradnicovom systéme s osami x, y súradnice $[a_1, a_2]$. Niekedy sa v stredoškolskej matematike alebo fyzike šípkou smerujúcou od počiatku $[0, 0]$ súradnicového systému k bodu $[a_1, a_2]$ vyznačuje "orientácia" vektora α. Skalárny súčin dvoch vektorov $\alpha = (a_1, a_2)$ a $\beta = (b_1, b_2)$ bol definovaný v stredoškolskej matematike ako $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2$ a dĺžka vektora $\alpha = (a_1, a_2)$ ako $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Platí vzt'ah

$$(\alpha, \beta) = \|\alpha\|\|\beta\| \cos\theta$$

kde $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ je veľkost' uhla (v radiánoch) medzi vektormi α a β. Dva vektory α, β sa nazvali *kolmé*, ak $\cos\theta = 0$, t.j. $\theta = \frac{\pi}{2}$ a používalo sa označenie $\alpha \perp \beta$.

3. $V_n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$ $(n \geqslant 1)$ je vektorový priestor n-tíc prvkov poľa $\mathbb{F}$ ktorého špeciálnymi prípadmi sú pre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ a $n = 1$ a $n = 2$ vyššie uvedená reálna os a rovina. Zložky $a_1, \dots, a_n$ vektora $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ nazývame *súradnicami vektora* α. Operácie prebiehajú po súradniciach. Súčet dvoch vektorov $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ a $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ je definovaný ako $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$, skalárny násobok vektora α skalárom $c \in \mathbb{F}$ je $c \cdot \alpha = (ca_1, \dots, ca_n)$, nulový vektor je $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ a opačný vektor k α je $-\alpha = (-a_1, \dots, -a_n)$. Pre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ sa zvykne definovat' skalárny súčin dvoch vektorov $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ a $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ ako $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$. Nazveme ho *štandardným* skalárnym súčinom. Dva vektory α, β sú potom navzájom kolmé (ortogonálne), ak $(\alpha, \beta) = 0$ a dĺžka vektora α je definovaná predpisom $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.

4. $C(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$ je vektorový priestor komplexných čísel nad poľom reálnych čísel. Sčitovanie vektorov $\alpha = a + bi$ a $\beta = c + di$ je dané predpisom $\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$ a násobenie skalárom $r \in \mathbb{R}$ je $r \cdot \alpha = ra + (rb)i$. Opačný vektor k α je $-\alpha = -a - bi$ a nulový vektor je číslo 0.

5. $P(\mathbb{F})$ je vektorový priestor $\mathbb{F}[X]$ všetkých polynómov v jednej neurčitej nad poľom $\mathbb{F}$ a $P_k(\mathbb{F})$ je priestor $\mathbb{F}_k[X]$ všetkých polynómov v jednej neurčitej stupňa nanajvýš k nad poľom $\mathbb{F}$. Pripomeňme, že súčet dvoch vektorov $p(x_1, \dots, x_n) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ a $q(x_1, \dots, x_m) = b_mx^m + \dots + b_1x + b_0$, kde $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant k$, je

$$p(x_1, \dots, x_n) + q(x_1, \dots, x_m) =$$
$$a_nx^n + \dots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

skalárny násobok vektora $p(x_1, \ldots, x_n)$ skalárom $c \in \mathbb{F}$ je

$$c \cdot p(x_1, \ldots, x_n) = (ca_n)x^n + \cdots + (ca_1)x + ca_0,$$

nulový vektor je polynóm $n(x) = 0$ a opačný vektor k vektoru $p(x_1, \ldots, x_n)$ je $-p(x_1, \ldots, x_n) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0$.

6. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je vektorový priestor reálnych funkcií jednej reálnej premennej. Pripomeňme, že súčet dvoch vektorov f a g je funkcia $f+g$ definovaná ako $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, skalárny násobok vektora f číslom $r \in \mathbb{R}$ je funkcia (rf) definovaná ako $(rf)(x) = rf(x)$, opačný vektor k f je funkcia $(-f)$ definovaná predpisom $(-f)(x) = -f(x)$ a nulový vektor je konštantná funkcia $\mathbb{R} \to \{0\}$. Podobne, pre nejaký uzavretý interval v $\mathbb{R}$, napríklad $[-\pi, \pi]$, môžeme uvažovať o priestore $\mathbb{R}^{[-\pi,\pi]}$ všetkých spojitých funkcií $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Poznamenávame, že pre ľubovoľnú množinu X môžeme definovať vektorový priestor $\mathbb{R}^X = \{f : X \to \mathbb{R}\}$ všetkých funkcií z X do $\mathbb{R}$. V špeciálnom prípade $X = \varnothing$ dostaneme priestor $\mathbb{R}$. (Porozmýšľajte o tom.)

7. $M_{m,n}(\mathbb{F})$ je vektorový priestor matíc typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$. Sčitovaním matíc a násobením matíc skalárom sme sa zaoberali v kapitole 1. Všimnime si, že matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{F}$ sa vzhľadom na sčitovanie a násobenie skalárom správajú ako mn-tice prvkov poľa $\mathbb{F}$ (obe operácie prebiehajú po súradniciach). Preto je zrejmé, že platia všetky vlastnosti vektorového priestoru z definície 5.1. Vektorový priestor $M_{m,n}(\mathbb{F})$ sa vlastne od priestoru $V_{mn}(\mathbb{F})$ líši len tým ako sa zapisujú vektory. V prvom prípade sa zapisujú do obdĺžnikovej tabuľky (takto určite prehľadnejšie "kódujú" sústavy lineárnych rovníc), v druhom do jedného riadku. Prvky vektorových priestorov $M_{1,n}(\mathbb{F})$ a $V_n(\mathbb{F})$ v tomto texte často stotožňujeme.

8. $F(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$ je vektorový priestor tvorený prvkami samotného poľa $\mathbb{F}$. Sčitovanie vektorov a násobenie skalárom je dané sčitovaním resp. násobením prvkov v samotnom poli $\mathbb{F}$, rovnako opačný vektor k prvku $c \in \mathbb{F}$ je opačný prvok $-c$ k prvku c v poli $\mathbb{F}$ a nulový vektor je nulový prvok $0_{\mathbb{F}}$ poľa $\mathbb{F}$.

9. $T(\mathbb{F}) = \{0_{\mathbb{F}}\}$ je triviálny vektorový priestor, pretože všetko funguje triviálne: $0_{\mathbb{F}} + 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$, $0_{\mathbb{F}} \cdot 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$, opačný vektor k $0_{\mathbb{F}}$ je opäť $0_{\mathbb{F}}$ a $0_{\mathbb{F}}$ je pochopiteľne i nulový vektor. ■

Teraz dokážeme niektoré elementárne vlastnosti vektorových priestorov.

5.4. Lema *Vo vektorovom priestore $V(\mathbb{F})$ platí*

(1) $0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$ *pre všetky vektory* $\alpha \in V(\mathbb{F})$;
(2) $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ *pre všetky skaláry* $c \in \mathbb{F}$;
(3) $c \cdot \alpha = \mathbf{0}$ *práve vtedy, keď* $c = 0$ *alebo* $\alpha = \mathbf{0}$ *pre všetky* $c \in \mathbb{F}$ *a* $\alpha \in V(\mathbb{F})$;
(4) $(-c) \cdot \alpha = -c \cdot \alpha$ *pre všetky* $c \in \mathbb{F}$ *a* $\alpha \in V(\mathbb{F})$.

Dôkaz Použijeme vlastnosti z definície 5.1. Pre ľubovoľný vektor $\alpha \in V(\mathbb{F})$ platí $0 \cdot \alpha = (0+0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha$, odkiaľ po pripočítaní opačného vektora k vektoru $0 \cdot \alpha$ k obom stranám predchádzajúcej rovnosti dostaneme $\mathbf{0} = 0 \cdot \alpha$, čím je (1) dokázané. Vlastnosť (2) sa dokazuje podobne a prenechávame ju na čitateľa.

Ak $c = 0$ alebo $\alpha = \mathbf{0}$, tak podľa (1) a (2) platí aj $c \cdot \alpha = \mathbf{0}$. Pre dôkaz obrátenej implikácie v (3) predpokladajme, že $c \cdot \alpha = \mathbf{0}$ a $c \neq 0$. Potom existuje inverzný prvok k c v poli $\mathbb{F}$. Ak ním vynásobíme uvažovanú rovnosť, dostaneme $c^{-1} \cdot c \cdot \alpha = c^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ podľa (2), odkiaľ $\alpha = \mathbf{0}$.

V (4) potrebujeme ukázať, že vektor $(-c) \cdot \alpha$ je opačný k vektoru $c \cdot \alpha$. Ale $(-c) \cdot \alpha + c \cdot \alpha = (-c + c) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$ a komutatívnosť sčítania zaručuje, že aj $c \cdot \alpha + (-c) \cdot \alpha = \mathbf{0}$. □

5.5. Poznámka Riešenie $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ sústavy lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$, ktorá má maticový tvar $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (kde $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $\mathbf{X} \in M_{n,1}(\mathbb{F})$ a $\mathbf{B} \in M_{m,1}(\mathbb{F})$) budeme podľa potreby stotožňovať s maticou $\mathbf{X}^T \in M_{1,n}(\mathbb{F})$ ako aj s vektorom z $V_n(\mathbb{F})$.

Podpriestory. Túto časť začneme niekoľkými motivujúcimi príkladmi.

5.6. Príklad **1.** Nech $c, d \in \mathbb{R}$. Uvažujme o vektorovom priestore $V_2(\mathbb{R})$ a jeho podmnožine

$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in V_2(\mathbb{R}) \mid cx_1 = dx_2\}.$$

Pre ľubovoľné vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in U_1$ platí $cx_1 = dx_2$ a $cy_1 = dy_2$, a teda aj $c(x_1 + y_1) = d(x_2 + y_2)$, čiže súčet $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U_1$. Podobne, pre každý skalár $r \in \mathbb{R}$ máme $r \cdot \mathbf{x} \in U_1$, pretože $crx_1 = drx_2$.

2. Uvažujme o vektorovom priestore $M_n(\mathbb{F})$ štvorcových matíc stupňa n nad poľom $\mathbb{F}$ a jeho podmnožine

$$U_2 = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{F}) \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}.$$

Prenechávame na čitateľa preveriť, že podmnožina U_2 priestoru $M_n(\mathbb{F})$ je uzavretá vzhľadom na sčitovanie vektorov a násobenie ľubovoľným skalárom.

3. Nech $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$. Nech U_3 je podmnožina vektorového priestoru $V_n(\mathbb{F})$ tvorená riešeniami $(x_1, \ldots, x_n)$ homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{0} \in M_{m,1}(\mathbb{F})$ a maticu $\mathbf{X}^T \in M_{1,n}(\mathbb{F})$ stotožňujeme s vektorom $(x_1, \ldots, x_n) \in V_n(\mathbb{F})$.

Nech $\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}^T \in U_3$, t.j. $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{AY} = \mathbf{0}$. Potom podľa lemy 1.11 $\mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, čiže súčet $\mathbf{X}^T + \mathbf{Y}^T = (\mathbf{X} + \mathbf{Y})^T$ patrí do U_3. Podľa tej istej lemy pre ľubovoľné $c \in \mathbb{F}$ platí $\mathbf{A}(c\mathbf{X}) = c(\mathbf{AX}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$, t.j. $c\mathbf{X}^T = (c\mathbf{X})^T$ patrí do U_3. (Používali sme pritom rovnosti z (1.2).) Teda aj podmnožina U_3 priestoru $V_n(\mathbb{F})$ je uzavretá vzhľadom na sčitovanie vektorov a násobenie skalárom z poľa $\mathbb{F}$. ■

Podmnožiny U_1, U_2, U_3 daných vektorových priestorov nazývame ich podpriestormi v zmysle definície 5.7, ktorá nasleduje. Podpriestor z príkladu 5.6 budeme pritom nazývať *podpriestorom* (alebo *priestorom*) *riešení homogénnej sústavy* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Je to jeden z najdôležitejších príkladov podpriestorov. Podrobnejšie sa k nemu vrátime v kapitole 7.

5.7. Definícia *Neprázdnu podmnožinu U vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ nad poľom $\mathbb{F}$ nazývame podpriestorom priestoru $V(\mathbb{F})$, ak platí*

(1) $(\forall \alpha, \beta \in U)\ \alpha + \beta \in U$;
(2) $(\forall c \in \mathbb{F})\ (\forall \alpha \in U)\ c \cdot \alpha \in U$.

Každý vektorový priestor $V(\mathbb{F})$ má minimálne dva podpriestory: *nulový* priestor $\{\mathbf{0}\}$ tvorený iba nulovým vektorom a samotný priestor $V(\mathbb{F})$. Niekedy sa im hovorí aj *nevlastné podpriestory.* Poznamenávame, že nulový podpriestor $\{0_{\mathbb{F}}\}$ vektorového priestoru $F(\mathbb{F})$ sme nazvali triviálnym priestorom.

5.8. Lema *Neprázdna podmnožina U vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ nad poľom $\mathbb{F}$ je jeho podpriestorom práve vtedy, keď*

$$(\forall c, d \in \mathbb{F})\ (\forall \alpha, \beta \in U)\ c \cdot \alpha + d \cdot \beta \in U. \tag{5.1}$$

Dôkaz Z definície 5.7 je zrejmé, že podmienka (5.1) je nutnou podmienkou, aby množina U bola podpriestorom $V(\mathbb{F})$. Aby sme ukázali, že je postačujúca, uvažujme o ľubovoľných vektoroch $\alpha, \beta \in V(\mathbb{F})$. Ak položíme $c = d = 1_{\mathbb{F}}$, z podmienky (5.1) dostaneme $\alpha + \beta \in V(\mathbb{F})$ a ak položíme $d = 0_{\mathbb{F}}$, dostaneme z (5.1) $c \cdot \alpha \in V(\mathbb{F})$, čiže $V(\mathbb{F})$ spĺňa (1) a (2) z definície 5.7. □

V nasledujúcej časti dáme odpoveď na prirodzenú otázku, či prienik a zjednotenie dvoch podpriestorov daného vektorového priestoru sú jeho podpriestormi.

5.9. Veta *Prienik dvoch podpriestorov U a U' vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ je opäť podpriestorom $V(\mathbb{F})$.*

Dôkaz Využijeme lemu 5.8. Nech $\alpha, \beta \in U \cap U'$ a $c, d \in \mathbb{F}$. Pretože U, U' sú podpriestormi vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$, podľa lemy 5.8 platí $c \cdot \alpha + d \cdot \beta \in U$ a $c \cdot \alpha + d \cdot \beta \in U'$, čiže aj $c \cdot \alpha + d \cdot \beta \in U \cap U'$. □

5.10. Veta *Zjednotenie dvoch podpriestorov U, U' vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ je podpriestorom $V(\mathbb{F})$ práve vtedy, keď $U \subseteq U'$ alebo $U' \subseteq U$.*

Dôkaz Triviálne platí, že ak $U \subseteq U'$ alebo $U' \subseteq U$, tak $U \cup U'$ je podpriestorom $V(\mathbb{F})$. Obrátene, nech $U \cup U'$ je podpriestorom $V(\mathbb{F})$. Predpokladajme, že $U \nsubseteq U'$ a $U' \nsubseteq U$. Potom existujú $u \in U \setminus U'$ a $v \in U' \setminus U$. Keďže $U \cup U'$ je podpriestorom, $u + v \in U \cup U'$, odkiaľ vyplýva, že musí platiť $u + v \in U$ alebo $u + v \in U'$. V prvom prípade sú u a $u + v$ vektory v U, a pretože U je podpriestorom $V(\mathbb{F})$, platí aj $(u + v) + (-u) \in U$, čiže $v \in U$, čo je v spore s tým, že $u \in U \setminus U'$. Druhý prípad je analogický a jeho dokončenie prenechávame na čitateľa. □

Podpriestory generované množinami vektorov. Vo vete 5.9 sme ukázali, že prienik dvoch podpriestorov vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ je opäť podpriestorom priestoru $V(\mathbb{F})$. Z dôkazu tejto vety je zremé, že tvrdenie platí nielen pre dva, ale pre ľubovoľný (i nekonečný) počet podpriestorov $V(\mathbb{F})$.

To nám umožňuje nájsť pre ľubovoľnú podmnožinu S vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ najmenší podpriestor priestoru $V(\mathbb{F})$ obsahujúci S. Skutočne, nech

$$\mathcal{S} = \{P \subseteq V(\mathbb{F}) \mid S \subseteq P \text{ a } P \text{ je podpriestor } V(\mathbb{F})\}$$

je množina všetkých podpriestorov priestoru $V(\mathbb{F})$ obsahujúcich S. Pretože $V(\mathbb{F}) \in \mathcal{S}$, je $\mathcal{S} \neq \varnothing$. Keďže prienik $\cap\mathcal{S}$ množiny $\mathcal{S}$ (prienik všetkých podpriestorov P patriacich do $\mathcal{S}$) je podpriestorom priestoru $V(\mathbb{F})$, je to najmenší podpriestor $V(\mathbb{F})$ obsahujúci S.

Najmenší podpriestor priestoru $V(\mathbb{F})$ obsahujúci jeho danú podmnožinu S nazývame *podpriestorom priestoru $V(\mathbb{F})$ generovaným množinou S* a označujeme ho $[S]$. Podpriestory ktoré možno generovať nejakou konečnou množinou S nazývame *konečnorozmerné.* Podpriestory pre ktoré neexistuje žiadna konečná množina generátorov sa nazývajú *nekonečno-rozmerné.* Neskôr ukážeme, že napríklad priestor $V_n(\mathbb{R})$ všetkých n-tíc reálnych čísel (čo je nekonečná množina) a priestor $M_{m,n}(\mathbb{F})$ matíc typu $m \times n$ nad ľubovoľným poľom $\mathbb{F}$ sú konečnorozmerné priestory. Naopak, je ľahko vidieť, že priestor $P(\mathbb{F})$ polynómov nad poľom $\mathbb{F}$ je nekonečno-rozmerný. Podobne, priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ reálnych funkcií jednej reálnej premennej je nekonečno-rozmerný. Podpriestor priestoru $V(\mathbb{F})$ generovaný prázdnou množinou je $[\varnothing] = \{\mathbf{0}\}$.

5.11. Príklad Hľadajme podpriestor priestoru $V_3(\mathbb{R})$ generovaný množinou $S = \{(1,0,0), (-1,2,0)\}$.

Podľa lemy 5.8 musí $[S]$ obsahovať s vektormi $\alpha = (1,0,0), \beta = (-1,2,0)$ aj vektory $c\cdot\alpha + d\cdot\beta = (c,0,0) + (-d,2d,0) = (c-d,2d,0)$ pre všetky $c,d \in \mathbb{R}$. Pretože pre ľubovoľné $d \in \mathbb{R}$ možno každú hodnotu $c - d \in \mathbb{R}$ dosiahnuť vhodným zvolením c, musí $[S]$ obsahovať množinu $\{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Je ľahké presvedčiť sa, že táto množina je už podpriestorom $V_3(\mathbb{R})$, odkiaľ vyplýva $[S] = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. ■

5.12. Definícia *Nech $V(\mathbb{F})$ je vektorový priestor a nech $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in V(\mathbb{F})$. Vektor α nazývame lineárnou kombináciou vektorov $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, ak platí*

$$\alpha = c_1\cdot\alpha_1 + \cdots + c_n\cdot\alpha_n$$

pre nejaké skaláry $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$.

Pomocou pojmu lineárnej kombinácie vektorov môžeme charakterizovať podpriestor $[S]$ priestoru $V(\mathbb{F})$ generovaný množinou S, čo je obsahom nasledujúcej vety. Ak množina S je konečná, $S = \{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$, tak namiesto $[\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}]$ píšeme len $[\beta_1,\ldots,\beta_n]$.

5.13. Veta *Nech $V(\mathbb{F})$ je vektorový priestor a nech $S \subseteq V(\mathbb{F})$. Potom podpriestor priestoru $V(\mathbb{F})$ generovaný množinou S je množina*

$$[S] = \{c_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + c_n \cdot \alpha_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F},\ n \geqslant 1\} \tag{5.2}$$

všetkých lineárnych kombinácií konečných systémov $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vektorov množiny S. V prípade konečnej množiny $S = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ platí

$$[\beta_1, \ldots, \beta_n] = \{c_1 \cdot \beta_1 + \cdots + c_n \cdot \beta_n \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}\}.$$

Dôkaz V prvom rade nechávame čitateľa preveriť na základe lemy 5.8 , že množina v (5.2) je podpriestorom priestoru $V(\mathbb{F})$. Pre každý vektor $\alpha \in S$ obsahuje táto množina podľa jej zadania vektor $1_{\mathbb{F}} \cdot \alpha$ (pri voľbe $n = 1$ a $c_1 = 1_F$), čiže obsahuje S. Teda množina v (5.2) je podpriestor priestoru $V(\mathbb{F})$ obsahujúci S, a keďže $[S]$ je podľa svojej definície najmenší podpriestor priestoru $V(\mathbb{F})$ obsahujúci S, dostávame

$$[S] \subseteq \{c_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + c_n \cdot \alpha_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F},\ n \geqslant 1\}.$$

Ostáva ukázať obrátenú inklúziu, teda, že

$$(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S)\ (\forall c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F})\ c_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + c_n \cdot \alpha_n \in [S]. \tag{5.3}$$

Použijeme indukciu vzhľadom na n. Pre $n \leqslant 2$ platí (5.3) podľa lemy 5.8. Predpokladajme, že (5.3) platí pre nejaké číslo $n \geqslant 2$ a ukážeme, že potom platí aj pre číslo $n+1$. Nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in S$, $c_1, \ldots, c_n, c_{n+1} \in \mathbb{F}$. Podľa indukčného predpokladu máme $\alpha := c_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + c_n \cdot \alpha_n \in [S]$, a keďže $[S]$ ako podpriestor obsahuje s vektormi α a α_{n+1} podľa lemy 5.8 aj ich lineárnu kombináciu $1_F \cdot \alpha + c_{n+1} \cdot \alpha_{n+1}$, dostávame požadované tvrdenie $c_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + c_n \cdot \alpha_n + c_{n+1} \cdot \alpha_{n+1} \in [S]$. □

5.14. Príklad (1) Nájdeme podpriestor priestoru $M_2(\mathbb{R})$ štvorcových matíc stupňa 2 nad poľom $\mathbb{R}$ generovaný množinou

$$S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Podľa vety 5.13 je $[S]$ množinou všetkých lineárnych kombinácií tvaru

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

kde a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla. Vidíme, že $[S]$ je množinou všetkých symetrických matíc typu 2×2 nad $\mathbb{R}$.

(2) Našou úlohou bude nájsť množinu vektorov, ktoré generujú v priestore $M_3(\mathbb{R})$ štvorcových matíc stupňa 3 nad poľom $\mathbb{R}$ podpriestor $\boldsymbol{\mathcal{AS}}_3 = \{\mathbf{A} \in M_3(\mathbb{R}) \mid \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T\}$ všetkých antisymetrických matíc typu 3×3 nad $\mathbb{R}$.

Začneme s ľubovoľným nenulovým vektorom z $\mathcal{AS}_3$. Napríklad matica

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{generuje podpriestor} \quad [\mathbf{A}_1] = \{ \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\},$$

čo ešte nie je celý priestor $\mathcal{AS}_3$. Preto zvolíme ďalší vektor z $\mathcal{AS}_3 \setminus [\mathbf{A}_1]$, napríklad maticu

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{generujúcu s } \mathbf{A}_1 \quad [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \{ \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

čo opäť nie je celý priestor $\mathcal{AS}_3$. Preto zvolíme vektor z $\mathcal{AS}_3 \setminus [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, napríklad maticu

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{generujúcu s } \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \quad \{ \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

čo je, ako ľahko vidieť, celý priestor $\mathcal{AS}_3$. Teda $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ sú generátory $\mathcal{AS}_3$. ■

Podpriestory prislúchajúce maticiam.

5.15. Definícia *Podpriestorom prislúchajúcim matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$ nazývame podpriestor vektorového priestoru $V_n(\mathbb{F})$ generovaný riadkami matice $\mathbf{A}$ chápanými ako vektory z $V_n(\mathbb{F})$. Budeme ho označovať $V(\mathbf{A})$.*

5.16. Veta *Riadkovo ekvivalentným maticiam typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$ prislúcha rovnaký podpriestor vektorového priestoru $V_n(\mathbb{F})$.*

Dôkaz Nech $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$ s riadkami $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ chápanými ako vektory z $V_n(\mathbb{F})$. Podľa definície 5.15 prislúcha matici $\mathbf{A}$ podpriestor $V(\mathbf{A}) = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ priestoru $V_n(\mathbb{F})$. Stačí ukázať, že sa priestor $V(\mathbf{A})$ nezmení vykonaním ľubovoľnej e.r.o. na matici $\mathbf{A}$. Prenechávame to na čitateľa. □

5.17. Príklad Uvažujme o vektoroch $\alpha = (3, 0, 2, 0, 4, -5), \beta = (-1, 0, 0, -2, -2, 3), \gamma = (1, 0, 2, 2, 0, -1), \delta = (2, 0, 0, -2, 4, -4)$ z $V_6(\mathbb{R})$. Našou úlohou bude zistiť, či vektory $\sigma = (2, 0, 2, 0, 2, -\frac{8}{3}), \varepsilon = (0, 2, 0, 2, 0, -\frac{8}{3})$ patria do podpriestoru $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$.

Nech $\mathbf{A}'$ je matica typu 4×6 z príkladu 2.8, ktorej riadkami sú vektory $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Potom podpriestor $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ je akurát podpriestor $V(\mathbf{A}')$ prislúchajúci matici $\mathbf{A}'$. V danom príklade sme maticu $\mathbf{A}'$ upravili pomocou e.r.o. na ekvivalentnú redukovanú trojuholníkovú maticu s riadkami $\alpha' = (1, 0, 0, 0, 2, -\frac{7}{3}), \beta' = (0, 0, 1, 0, -1, 1), \gamma' = (0, 0, 0, 1, 0, -\frac{1}{3}), \delta' = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Podľa vety 5.16 platí $V(\mathbf{A}') = [\alpha', \beta', \gamma', \delta']$. To nám umožňuje vyjadriť podpriestor prislúchajúci matici $\mathbf{A}'$ v tvare $V(\mathbf{A}') = \{(a, 0, b, c, 2a - b, -\frac{7}{3}a + b - \frac{1}{3}c) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, z ktorého už vieme ľahko určiť, že vektor $\sigma = (2, 0, 2, 0, 2, -\frac{8}{3}) \in V(\mathbf{A}')$, zatiaľčo $\varepsilon = (0, 2, 0, 2, 0, -\frac{8}{3}) \notin V(\mathbf{A}')$. ■

6. KONEČNOROZMERNÉ PRIESTORY. LINEÁRNA NEZÁVISLOSŤ, BÁZA, DIMENZIA

Úvodné slovo. V kapitole 5 sme videli, že mnohé vektorové priestory $V(\mathbb{F})$ možno vhodne prezentovať zadaním ich generujúcej množiny. Zobrať za generujúcu celú množinu $V(\mathbb{F})$ sa nezdá nijako užitočné. Naším cieľom bude nájsť, pokiaľ je to možné, nejakú konečnú a čo možno najmenšiu množinu generátorov študovaného priestoru. Nie všetky priestory možno generovať konečnou množinou vektorov, napríklad v kapitole 5 sme spomenuli, že priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ reálnych funkcií jednej reálnej premennej nie je konečne generovaný, a teda je nekonečno-rozmerný. V tejto kapitole sa budeme zaoberať problematikou nájdenia čo možno najmenších generujúcich množín konečnorozmerných priestorov.

Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov. Až doposiaľ sme násobenie vektora α skalárom c označovali $c \cdot \alpha$. Odteraz ho kvôli jednoduchosti (i šetreniu miestom) budeme označovať $c\alpha$, t.j. symbol $\cdot$ budeme vynechávať.

6.1. Definícia *Nech $V(\mathbb{F})$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{F}$. Hovoríme, že vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V(\mathbb{F})$ sú lineárne závislé (alebo, že množina vektorov $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ je lineárne závislá), ak existujú skaláry $c_1, \dots, c_n$ z poľa $\mathbb{F}$ z ktorých aspoň jeden je rôzny od $0_{\mathbb{F}}$ tak, že*

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = \mathbf{0}. \tag{6.1}$$

Vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V(\mathbb{F})$ nazývame lineárne nezávislé (alebo hovoríme, že množina $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ je lineárne nezávislá), ak $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nie sú lineárne závislé, t.j. ak z rovnosti

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = \mathbf{0} \tag{6.2}$$

pre ľubovoľné skaláry $c_1, \dots, c_n$ vyplýva, že $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0_{\mathbb{F}}$.

Množina $\{\alpha\}$ je zrejme lineárne závislá práve vtedy, keď $\alpha = \mathbf{0}$.

6.2. Lema *Dva vektory sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden je skalárnym násobkom druhého.*

Dôkaz Ak vektory $\alpha_1, \alpha_2 \in V(\mathbb{F})$ sú lineárne závislé, tak podľa definície 6.1 existujú skaláry $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ z ktorých aspoň jeden je rôzny od $0_{\mathbb{F}}$ tak, že

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \mathbf{0}. \tag{6.3}$$

Predpokladajme, že $c_1 \neq 0_{\mathbb{F}}$. Potom existuje v $\mathbb{F}$ inverzný prvok c_1^{-1} a ak ním vynásobíme (6.3), dostaneme $\alpha_1 + c_1^{-1}c_2\alpha_2 = \mathbf{0}$, odkiaľ máme $\alpha_1 = -c_1^{-1}c_2\alpha_2$.

Obrátene, ak $\alpha_1 = c\alpha_2$ pre nejaký skalár $c \in \mathbb{F}$, tak dostaneme $1_{\mathbb{F}}\alpha_1 - c\alpha_2 = \mathbf{0}$, čiže α_1, α_2 sú lineárne závislé. □

Dôkaz nasledujúcej lemy prenechávame ako ľahké cvičenie na čitateľa.

6.3. Lema (1) *Ak nejaké vektory* $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V(\mathbb{F})$ *sú lineárne závislé, tak aj vektory* $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in V(\mathbb{F})$ *sú lineárne závislé pre ľubovoľné vektory* $\beta_1, \dots, \beta_n \in V(\mathbb{F})$.

(2) *Ak vektory* $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots, \alpha_n \in V(\mathbb{F})$ *sú lineárne nezávislé, tak pre ľubovoľné* $1 \leqslant m \leqslant n$ *vektory* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *sú tiež lineárne nezávislé.*

6.4. Príklad Ktoré z podmnožín nasledujúcej množiny S sú lineárne závislé?

$$S = \{(0,1,2,1), (0,1,-2,1), (0,-1,0,-1), (0,2,0,2)\} \subseteq V_4(\mathbb{R})$$

V prvom rade vidíme, že vektory $(0,-1,0,-1), (0,2,0,2)$ sú podľa lemy 6.2 lineárne závislé. Z toho dôvodu (využijúc (1) z lemy 6.3) sú lineárne závislé aj dve trojice vektorov obsahujúce vektory $(0,-1,0,-1), (0,2,0,2)$ a tiež celá štvorica vektorov. (V každom z týchto prípadov nájdite príslušné vyjadrenie v tvare (6.1).) Žiadne iné dva vektory nie sú podľa lemy 6.2 lineárne závislé. Vidíme, že

$$(0,1,2,1) + (0,1,-2,1) - (0,2,0,2) = (0,0,0,0).$$

Teda zvyšné dve trojice $(0,1,2,1), (0,1,-2,1), (0,-1,0,-1)$ a $(0,1,2,1), (0,1,-2,1), (0,2,0,2)$ tvoria tiež lineárne závislé podmnožiny S. ■

Nech $V(\mathbb{F})$ je vektorový priestor. Nasledujúca veta uvádza **kritérium lineárnej závislosti vektorov** $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V(\mathbb{F})$.

6.5. Veta *Nech* $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V(\mathbb{F})$. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(1) *Vektory* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *sú lineárne závislé.*

(2) *Rovnica*

$$x_1\alpha_1 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

má riešenie v poli $\mathbb{F}$, *pričom* $x_i \neq 0_{\mathbb{F}}$ *pre nejaké* $1 \leqslant i \leqslant m$.

(3) *Pre nejaké* $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_m] = [\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m].$$

(4) *Pre nejaké* $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$\alpha_i \in [\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m].$$

(5) *Vektor* α_i *je lineárnou kombináciou vektorov* $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m$ *pre nejaké* $1 \leqslant i \leqslant m$.

Naviac, v podmienkach (2)–(5) možno zvoliť rovnaký index $1 \leqslant i \leqslant m$.

Dôkaz Nech $S := \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. To, že v podmienkach (2)–(5) možno zvoliť rovnaký index $1 \leqslant i \leqslant m$ uvidíme priamo z dôkazu.

Implikácia (1) $\Longrightarrow$ (2) vyplýva priamo z definície 6.1.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Ak $(c_1, \dots, c_m)$ je riešenie rovnice $x_1\alpha_1 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ v poli $\mathbb{F}$, pričom $c_i \neq 0_{\mathbb{F}}$ pre nejaké $1 \leqslant i \leqslant m$, tak existuje $c_i^{-1} \in \mathbb{F}$ a dostávame vyjadrenie

$$\alpha_i = -c_i^{-1}(c_1\alpha_1 + \dots + c_{i-1}\alpha_{i-1} + c_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + c_m\alpha_m),$$

odkiaľ máme $\alpha_i \in [S \setminus \{\alpha_i\}]$, čiže

$$[S] = [(S \setminus \{\alpha_i\}) \cup \{\alpha_i\}] = [S \setminus \{\alpha_i\}].$$

Implikácia (3) $\Longrightarrow$ (4) je triviálna.
Implikácia (4) $\Longrightarrow$ (5) vyplýva priamo z vety 5.13.
(5) $\Longrightarrow$ (1). Ak platí (5), tak platí

$$\alpha_i = c_1\alpha_1 + \cdots + c_{i-1}\alpha_{i-1} + c_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + c_m\alpha_m$$

pre nejaké $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_m \in \mathbb{F}$, odkiaľ

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_{i-1}\alpha_{i-1} - 1_F\alpha_i + c_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + c_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

čiže vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sú lineárne závislé. □

6.6. Dôsledok *Predpokladajme, že vektorový priestor $V(\mathbb{F})$ z predchádzajúcej vety je priestorom $V_n(\mathbb{F})$ všetkých n-tíc prvkov poľa $\mathbb{F}$. Nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in V(\mathbb{F})$. Nech $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ je matica typu $m \times n$ s riadkami $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.*

Potom tvrdenia (1) – (5) vety 6.5 sú naviac ekvivalentné s nasledovnými tvrdeniami:

(6) *Maticu $\mathbf{A}$ možno pomocou konečného počtu elementárnych riadkových operácií upraviť na maticu s nulovým riadkom.*
(7) *Podpriestor priestoru $V_n(\mathbb{F})$ prislúchajúci matici $\mathbf{A}$ je*

$$V(\mathbf{A}) = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m]$$

pre nejaké $1 \leqslant i \leqslant m$.

Dôkaz Najprv ukážeme, že (2) $\Longleftrightarrow$ (6). Predpokladajme, že platí (2), teda rovnica $x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ má riešenie $(c_1, \ldots, c_n)$ v $\mathbb{F}$, pričom $c_i \neq 0_{\mathbb{F}}$ pre nejaké $1 \leqslant i \leqslant m$. Vynásobme v matici $\mathbf{A}$ i-ty riadok nenulovým skalárom c_i (je to e.r.o. typu (2)), a potom pripočítajme postupne pre $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$, c_j-násobok j-teho riadku k i-temu riadku (čo je e.r.o. typu (3)). Tým sa i-ty riadok matice $\mathbf{A}$ chápaný ako vektor z $V_n(\mathbb{F})$ zmení z α_i na vektor

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_{i-1}\alpha_{i-1} + c_i\alpha_i + c_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + c_m\alpha_m = \mathbf{0}. \tag{6.4}$$

Teda platí (6). Obrátene, nech platí (6) a nech použitím konečného počtu e.r.o. možno v i-tom riadku matice $\mathbf{A}$ zmeniť pôvodný vektor α_i na nulový vektor. Predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že sa to dosiahlo vynásobením i-teho riadku nenulovým skalárom c_i (prípad $c_i = 1_F$ vyjadruje, že i-ty riadok sme v skutočnosti nenásobili) a postupným pripočítaním c_j-násobku j-teho riadku k i-temu riadku pre $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$. Potom platí (6.4), čiže platí podmienka (2) z vety 6.5.

Pretože podpriestor prislúchajúci matici $\mathbf{A}$ je $V(\mathbf{A}) = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$, ihneď vidieť, že podmienka (7) je ekvivalentná s podmienkou (3) z vety 6.5. □

Predchádzajúce tvrdenia nám dávajú návod ako postupovať pri zisťovaní, či nejaké vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V_n(\mathbb{F})$ sú lineárne závislé. Ako kritérium ich lineárnej závislosti sa pri testovaní v praxi javí najvýhodnejším použiť podmienku (6) z dôsledku 6.6. Budeme sa teda snažiť maticu $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ s riadkami $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ upraviť pomocou elementárnych riadkových operácií na maticu s nulovým riadkom. V momente, keď sa nám to podarí môžeme skončiť a prehlásiť, že vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sú lineárne závislé. Najneskôr po konečnej úprave matice $\mathbf{A}$ na redukovanú trojuholníkovú maticu (čo je vždy možné podľa vety 2.9) to musíme byť schopní zistiť; vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď redukovaná trojuholníková matica má (aspoň jeden) nulový riadok.

6.7. Príklad Zoberme opäť vektory $\alpha = (3, 0, 2, 0, 4, -5), \beta = (-1, 0, 0, -2, -2, 3)$, $\gamma = (1, 0, 2, 2, 0, -1), \delta = (2, 0, 0, -2, 4, -4)$ z $V_6(\mathbb{R})$ tak ako v príklade 5.17. Ak máme len zistiť, či tieto vektory sú lineárne závislé, budeme sa snažiť maticu $\mathbf{A}'$ typu 4×6 s riadkami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ upraviť pomocou e.r.o. na maticu s nulovým riadkom. V príklade 2.8 sme to dosiahli po treťom kroku, ale už po druhom kroku sme videli, že maticu $\mathbf{A}'$ možno pomocou e.r.o. upraviť na maticu s nulovým riadkom. Teda už po druhom kroku môžeme skončiť a prehlásiť, že vektory $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sú lineárne závislé. ■

Teraz uvedieme jednu z najznámejších viet lineárnej algebry – **Steinitzovu vetu**.

6.8. Veta ***(Steinitzova veta)*** *Nech vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ generujú vektorový priestor $V(\mathbb{F})$ a nech vektory $\beta_1, \dots, \beta_k \in V(\mathbb{F})$ sú lineárne nezávislé. Potom $k \leqslant n$ a existuje $n - k$ vektorov α_i, ktoré spolu s vektormi $\beta_1, \dots, \beta_k$ generujú priestor $V(\mathbb{F})$.*

Dôkaz Nech $A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ a $B := \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$. Pre $p = 1, \dots, k$ dokážeme existenciu n-prvkovej množiny A_p vektorov z $V(\mathbb{F})$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

(i) A_p obsahuje p vektorov $\beta_1, \dots, \beta_p$ lineárne nezávislej množiny B;
(ii) A_p obsahuje $n - p$ vektorov α_i z generujúcej množiny A;
(iii) A_p generuje priestor $V(\mathbb{F})$.

Zároveň pritom ukážeme nerovnosť $p \leqslant n$.

Nech $p = 1$. Nerovnosť $p \leqslant n$ je zrejmá. Našou úlohou je zostrojiť z generujúcej množiny $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ množinu A_1 obsahujúcu vektor β_1, ktorá bude opäť generovať priestor $V(\mathbb{F})$. Ak $\beta_1 \in A$, tak nemáme čo robiť, pretože stačí definovať $A_1 := A$. Ak $\beta_1 \notin A$, tak využijeme, že $\beta_1 = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n$ pre nejaké skaláry $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$, pretože $V(\mathbb{F}) = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Aspoň jeden zo skalárov $c_1, \dots, c_n$ musí byť nenulový; v opačnom prípade by bolo $\beta_1 = \mathbf{0}$, čo je v spore s tým, že $\beta_1, \dots, \beta_k$ sú lineárne nezávislé (využijúc (2) z lemy 6.3). Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že skalár $c_n \neq 0_{\mathbb{F}}$. Potom

$$\alpha_n = c_n^{-1}(\beta_1 - c_1\alpha_1 - \dots - c_{n-1}\alpha_{n-1}),$$

odkiaľ podľa vety 6.5 dostaneme

$$V(\mathbb{F}) = [\beta_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n] = [\beta_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}].$$

Teda hľadaná množina A_1 je $A_1 = \{\beta_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$. Ak $k = 1$, tak dôkaz vety je skončený. (Premyslite si to.)

Predpokladajme, že $k > 1$ a nech $1 \leqslant p < k$. Ďalej predpokladajme, že máme zostrojenú n-prvkovú množinu A_p vektorov z $V(\mathbb{F})$ generujúcu priestor $V(\mathbb{F})$ a obsahujúcu p vektorov $\beta_1, \dots, \beta_p$ lineárne nezávislej množiny B a $n - p$ vektorov (pre jednoduchosť označovania nech sú to $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}$) pôvodnej generujúcej množiny A. Ukážeme, že $p + 1 \leqslant n$ a zostrojíme n-prvkovú množinu A_{p+1} vektorov z $V(\mathbb{F})$ generujúcu priestor $V(\mathbb{F})$ a obsahujúcu $p + 1$ vektorov $\beta_1, \dots, \beta_p, \beta_{p+1}$ lineárne nezávislej množiny B a $n - p - 1$ vektorov α_i pôvodnej generujúcej množiny A.

Pretože $V(\mathbb{F}) = [\beta_1, \dots, \beta_p, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}]$ podľa nášho indukčného predpokladu, môžeme vektor β_{p+1} vyjadriť ako

$$\beta_{p+1} = b_1\beta_1 + \dots + b_p\beta_p + a_1\alpha_1 + \dots + a_{n-p}\alpha_{n-p}$$

pre nejaké skaláry $b_1, \dots, b_p, a_1, \dots, a_{n-p} \in \mathbb{F}$. Tvrdíme, že $n - p \geqslant 1$ a aspoň jeden zo skalárov $a_1, \dots, a_{n-p}$ musí byť nenulový; skutočne, v opačnom prípade by bolo $\beta_{p+1} = b_1\beta_1 + \dots + b_p\beta_p$, čo je v spore s tým, že $\beta_1, \dots, \beta_{p+1}$ sú lineárne nezávislé (tu opäť využívame (2) z lemy 6.3). Bez ujmy na všeobecnosti teda predpokladajme, že skalár $a_{n-p} \neq 0_{\mathbb{F}}$. Potom

$$\alpha_{n-p} = a_{n-p}^{-1}(\beta_{p+1} - b_1\beta_1 - \dots - b_p\beta_p - a_1\alpha_1 - \dots - a_{n-p-1}\alpha_{n-p-1}),$$

odkiaľ vyplýva opäť podľa vety 6.5

$$\begin{aligned} V(\mathbb{F}) =& [\beta_1, \dots, \beta_p, \beta_{p+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}] \\ =& [\beta_1, \dots, \beta_p, \beta_{p+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-p-1}]. \end{aligned}$$

Vidíme, že hľadaná množina A_{p+1} je $A_{p+1} = \{\beta_1, \dots, \beta_p, \beta_{p+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-p-1}\}$. Zároveň sme ukázali, že $n - p \geqslant 1$, čiže $p + 1 \leqslant n$.

Ukázali sme teda, že uvedeným induktívnym spôsobom je možné zostrojiť množinu

$$A_k = \{\beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}\},$$

obsahujúcu $n - k$ vektorov α_i, ktoré spolu s vektormi $\beta_1, \dots, \beta_k$ generujú priestor $V(\mathbb{F})$. Zároveň sme pritom dokázali nerovnosť $k \leqslant n$. □

Báza a dimenzia konečnorozmerných vektorových priestorov.

6.9. Definícia *Systém vektorov $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ konečnorozmerného vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ nazývame jeho bázou, ak platia nasledujúce podmienky:*

(1) $V(\mathbb{F}) = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$;
(2) *vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú lineárne nezávislé.*

Ak $V(\mathbb{F}) = \{\mathbf{0}\}$, tak priestor $V(\mathbb{F})$ nemá bázu (nulový vektor tvorí lineárne závislý systém). Ak $V(\mathbb{F})$ je konečnorozmerný a $V(\mathbb{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$, tak $V(\mathbb{F})$ musí mať bázu podľa nasledujúcej vety. Jej dôkaz urobíme (podobne ako predchádzajúci dôkaz Steinitzovej vety) konštruktívne a to opísaním algoritmu (konečnej procedúry) na zostrojenie bázy priestoru $V(\mathbb{F})$.

6.10. Veta *Každý konečnorozmerný vektorový priestor $V(\mathbb{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$ má bázu.*

Dôkaz Nech $V(\mathbb{F})$ je konečnorozmerný vektorový priestor a nech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú generátory $V(\mathbb{F})$. Ak $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú lineárne nezávislé, tak už tvoria bázu $V(\mathbb{F})$. Nech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú lineárne závislé. Podľa vety 6.5 pre nejaké $1 \leqslant i \leqslant m$ platí

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = [\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n].$$

V prvom kroku teda vynecháme zo systému $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vektor α_i. Ak zostávajúce vektory $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n\}$ sú lineárne nezávislé, tak už tvoria bázu $V(\mathbb{F})$ a skončíme. V opačnom prípade môžeme v druhom kroku vynechať ďalší z vektorov $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$. V tejto procedúre, pri ktorej zakaždým vynechávame vektor ktorý je lineárnou kombináciou ostatných vektorov, možno pokračovať až kým nedostaneme bázu $V(\mathbb{F})$. V prvom rade je jasné, že uvedená procedúra sa musí zastaviť po konečnom počte krokov (teda je algoritmom), pretože máme len konečný počet generátorov $V(\mathbb{F})$. Ďalej, prípadné nulové vektory spomedzi generátorov budú všetky vynechané, pretože nulový vektor je vždy lineárnou kombináciou ostatných vektorov. Napokon, všetky vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nemohli byť nulové, pretože $V(\mathbb{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$. □

6.11. Príklad Nájdime všetky bázy priestoru

$$T = [(0,1,2,1), (0,1,-2,1), (0,-1,0,-1), (0,2,0,2)] \subseteq V_4(\mathbb{R}).$$

V príklade 6.4 sme skúmali, ktoré z daných vektorov tvoria lineárne závislé systémy. Zistili sme, že vektor $(0,2,0,2)$ je lineárnou kombináciou ostatných vektorov. V prvom kroku ho preto vynecháme z daného systému a na základe vety 6.5 máme $T = [(0,1,2,1), (0,1,-2,1), (0,-1,0,-1)]$. Pretože ďalej $(0,1,2,1) + (0,1,-2,1) = (-2) \cdot (0,-1,0,-1)$, v druhom kroku vynecháme vektor $(0,-1,0,-1)$ a dostaneme $T = [(0,1,2,1), (0,1,-2,1)]$. Vektory $(0,1,2,1), (0,1,-2,1)$ sú lineárne nezávislé (jeden nie je násobkom druhého), preto už tvoria bázu T.

Podobne možno ukázať, že dvojice vektorov $(0,1,2,1), (0,-1,0,-1)$ a $(0,1,-2,1), (0,-1,0,-1)$ a $(0,1,2,1), (0,2,0,2)$ a $(0,1,-2,1), (0,2,0,2)$ tvoria lineárne nezávislé systémy generujúce T, čiže bázy T. Pretože ktorákoľvek trojica vektorov tvorí lineárne závislý systém a na druhej strane, jediný vektor nestačí na generovanie T, iné bázy T nemá. ■

V príklade 6.11 sme ukázali, že všetky bázy daného konečnorozmerného priestoru mali rovnaký počet prvkov. Nasledujúca veta, ktorá je dôsledkom Steinitzovej vety, hovorí, že to nebola náhoda.

6.12. Veta *Všetky bázy konečnorozmerného vektorového priestoru majú rovnaký počet prvkov.*

Dôkaz Predpokladajme, že vektorový priestor $V(\mathbb{F})$ má bázy $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a $\beta_1, \dots, \beta_m$. Potom vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ generujú $V(\mathbb{F})$ a vektory $\beta_1, \dots, \beta_m$ sú lineárne nezávislé, preto podľa Steinitzovej vety 6.8 platí $m \leqslant n$. Ale pretože aj vektory $\beta_1, \dots, \beta_m$ generujú $V(\mathbb{F})$ a vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú lineárne nezávislé, podľa Steinitzovej vety 6.8 platí aj $n \leqslant m$. Teda $n = m$ a dôkaz je skončený. □

6.13. Definícia *Počet prvkov bázy konečnorozmerného vektorového priestoru* $V(\mathbb{F})$ *nazývame dimenziou priestoru* $V(\mathbb{F})$ *a označujeme* $\dim V(\mathbb{F})$.

Poznamenávame, že dimenziu nulového vektorového priestoru $V(\mathbb{F}) = \{\mathbf{0}\}$, ktorý nemá bázu, označujeme zvyčajne $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$ a dimenziu nekonečnorozmerného vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ označujeme $\dim V(\mathbb{F}) = \infty$.

Klasickou bázou vektorového priestoru $V_n(\mathbb{F})$ je systém *jednotkových vektorov*

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0),\ \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1).$$

(Poznamenávame, že pod 0 resp. 1 máme vždy na mysli nulu resp. jednotku poľa $\mathbb{F}$.) Tieto vektory generujú priestor $V_n(\mathbb{F})$, pretože každý vektor $(a_1, \dots, a_n) \in V_n(\mathbb{F})$ sa dá vyjadriť ako ich lineárna kombinácia

$$(a_1, \dots, a_n) = a_1(1, 0, \dots, 0) + \cdots + a_n(0, \dots, 0, 1) = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n.$$

Je ľahké ukázať, že vektory $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sú lineárne nezávislé. Teda $\dim V_n(\mathbb{F}) = n$ a bázu $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ nazývame *jednotkovou bázou* priestoru $V_n(\mathbb{F})$.

6.14. Príklad Našou úlohou bude zistiť dimenziu priestoru riešení nasledujúcej homogénnej sústavy štyroch lineárnych rovníc so štyrmi neznámymi s parametrami a, b, c nad poľom $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + ax_4 &= 0 \\ 2x_1 + bx_2 + 4x_3 + cx_4 &= 0. \end{aligned}$$

Matica tejto sústavy je matica $\mathbf{A}'$ z príkladu 2.12, kde sme ju už upravili na redukovanú trojuholníkovú maticu:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 2 & b & 4 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & b+2 & c+3b+2 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}.$$

Teda daná sústava je ekvivalentná so sústavou

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 4x_4 &= 0\\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0\\ (b+2)x_3 + (c+3b+2)x_4 &= 0\\ (a+2)x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ďalej budeme pracovať už len s touto sústavou, pretože má vo $V_4(\mathbb{Z}_5)$ ten istý podpriestor riešení, označme ho S, ako pôvodná sústava. Aby sme určili tento podpriestor a zistili akú má dimenziu, musíme rozlíšiť niekoľko prípadov.

1. Nech $a \neq 3$. Z poslednej rovnice sústavy vidíme, že $x_4 = 0$.

(i) Ak $b \neq 3$, tak z tretej rovnice sústavy dostaneme $x_3 = 0$, a a potom z prvých dvoch rovníc vyplýva, že aj $x_1 = x_2 = 0$. V tomto prípade teda $S = \{(0,0,0,0)\}$ je nulový podpriestor $V_4(\mathbb{Z}_5)$ a má teda dimenziu 0.

(ii) Ak $b = 3$, tak môžeme zvoliť ľubovoľné $x_3 \in \mathbb{Z}_5$ a z prvých dvoch rovníc vypočítame $x_1 = 4x_3$, $x_2 = x_3$. Teda priestor riešení je v tomto prípade $S = [(4,1,1,0)]$ a má dimenziu 1.

2. Nech $a = 3$ a $b = 3$. Riešením poslednej rovnice sústavy je ľubovoľné $x_4 \in \mathbb{Z}_5$ a tretia rovnica sústavy prejde do tvaru $(c+1)x_4 = 0$, kde rozlíšime opäť dva prípady.

(i) Nech $c \neq 4$. Potom $x_4 = 0$ a dostávame rovnaký prípad ako v 1(ii).

(ii) Ak $c = 4$, tak môžeme zvoliť ľubovoľné $x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_5$ a z prvých dvoch rovníc vypočítame $x_1 = 4x_3 + x_4$, $x_2 = x_3 + 3x_4$. Potom $S = [(4,1,1,0),(1,3,0,1)]$ a $\dim S = 2$.

3. Nech $a = 3$ a $b \neq 3$. Tretia rovnica prejde do tvaru $(b+2)x_3 + (c+3b+2)x_4 = 0$. Môžeme zvoliť ľubovoľné $x_4 \in \mathbb{Z}_5$ a z tretej rovnice vypočítame $x_3 = \frac{4c+2b+3}{b+2}x_4$. Z prvých dvoch rovníc potom máme $x_1 = 4x_3 + x_4 = \frac{c+4b+4}{b+2}x_4$, $x_2 = x_3 + 3x_4 = \frac{4c+4}{b+2}x_4$. Teda priestor riešení je $S = [(\frac{c+4b+4}{b+2}, \frac{4c+4}{b+2}, \frac{4c+2b+3}{b+2}, 1)]$ a má dimenziu 1. ■

6.15. Lema *Nech vektorový priestor $V(\mathbb{F})$ má dimenziu n. Ak vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ generujú $V(\mathbb{F})$, tak tvoria bázu priestoru $V(\mathbb{F})$.*

Dôkaz Nech vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ generujú $V(\mathbb{F})$. Stačí ukázať, že $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sú lineárne nezávislé. Keby ale $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ boli lineárne závislé, tak by podľa implikácie (1) $\Longrightarrow$ (3) z vety 6.5 existovalo $1 \leqslant i \leqslant n$ také, že $V(\mathbb{F}) = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n]$ a postupom ako v dôkaze vety 6.10 by bolo možné nájsť bázu s menej ako n vektormi. To je v spore s tým, že dimenzia $V(\mathbb{F})$ je n. □

6.16. Dôsledok *Nech $V(\mathbb{F})$ je konečnorozmerný vektorový priestor dimenzie n a nech vektory $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sú lineárne nezávislé. Potom vektory $\beta_1, \ldots, \beta_k$ možno doplniť na bázu priestoru $V(\mathbb{F})$. Ak $k = n$, tak vektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ už tvoria bázu priestoru $V(\mathbb{F})$.*

Dôkaz Nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je nejaká báza priestoru $V(\mathbb{F})$. Keďže vektory $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sú lineárne nezávislé a vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ generujú $V(\mathbb{F})$, podľa Steinitzovej vety 6.8 $k \leqslant n$ a existuje $n-k$ vektorov α_i, ktoré spolu s vektormi $\beta_1, \ldots, \beta_k$ generujú priestor $V(\mathbb{F})$. Podľa lemy 6.15 tým dostaneme bázu priestoru $V(\mathbb{F})$. □

Nasledujúci príklad je ilustráciou predchádzajúcich dvoch tvrdení.

6.17. Príklad Je ľahké vidieť, že bázou priestoru $P_n(\mathbb{R})$ všetkých polynómov stupňa nanajvýš n nad poľom $\mathbb{R}$ sú vektory $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Teda $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$. Teraz ukážeme ako možno zistiť, či priestor $P_3(\mathbb{R})$ má okrem bázy $1, x, x^2, x^3$ aj nejakú bázu obsahujúcu napríklad vektory $x^2 - 1, -2x + 3$. Pridajme k týmto dvom vektorom bázové vektory $1, x, x^2, x^3$. Dostaneme

$$P_3(\mathbb{R}) = [x^2 - 1, -2x + 3, 1, x, x^2, x^3] = [x^2 - 1, -2x + 3, 1, x, x^3],$$

lebo $x^2 = (x^2 - 1) + 1$, t.j. vektor x^2 je lineárnou kombináciou ostatných vektorov. Ďalej, pretože vektor x je lineárnou kombináciou $x = -\frac{1}{2} \cdot (-2x + 3) + \frac{3}{2} \cdot 1$ vektorov $-2x + 3$ a 1, dostaneme

$$P_3(\mathbb{R}) = [x^2 - 1, -2x + 3, 1, x^3].$$

Čiže vektory $x^2-1, -2x+3, 1, x^3$ generujú priestor $P_3(\mathbb{R})$ dimenzie 4 a podľa lemy 6.15 teda tvoria jeho hľadanú bázu.

Iná možnosť by bola doplniť vektory $x^2 - 1, -2x + 3$ iba vektormi 1 a x^3, ukázať, že tieto štyri vektory sú lineárne nezávislé a použiť dôsledok 6.16. ■

6.18. Veta *Nech $V(\mathbb{F})$ je vektorový priestor dimenzie n. Vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V(\mathbb{F})$ tvoria bázu priestoru $V(\mathbb{F})$ práve vtedy, keď každý vektor $\beta \in V(\mathbb{F})$ možno jediným spôsobom vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie*

$$\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \tag{6.5}$$

pre nejaké skaláry $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$.

Dôkaz Predpokladajme, že vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tvoria bázu priestoru $V(\mathbb{F})$. Priamo z definície bázy a vety 6.5 potom vyplýva, že každý vektor $\beta \in V(\mathbb{F})$ možno vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie (6.5). Aby sme ukázali jednoznačnosť takého vyjadrenia, predpokladajme, že β má dve vyjadrenia v tvare (6.5) pre skaláry $c_1, \ldots, c_n$ resp. $d_1, \ldots, d_n$ z $\mathbb{F}$. Potom jednoduchou úpravou dostaneme

$$\mathbf{0} = (c_1 - d_1)\alpha_1 + (c_2 - d_2)\alpha_2 + \cdots + (c_n - d_n)\alpha_n,$$

a pretože vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sú lineárne nezávislé, dostávame $c_i = d_i$ pre všetky i, čiže obe vyjadrenia sú totožné.

Obrátená implikácia bezprostredne vyplýva z lemy 6.15. □

Usporiadanú n-ticu skalárov $(c_1, \ldots, c_n)$ vo vyjadrení (6.5) nazývame *súradnicami* vektora β vzhľadom na bázu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

7. PRIESTORY PRISLÚCHAJÚCE MATICIAM A PRIESTORY RIEŠENÍ HOMOGÉNNYCH SÚSTAV

Úvodné slovo. Podpriestory prislúchajúce maticiam sme definovali v kapitole 5. V tejto kapitole definujeme hodnosť matice ako dimenziu podpriestoru prislúchajúceho matici a prezentujeme niekoľko užitočných tvrdení týkajúcich sa hodností matíc. Potom dokážeme, že redukovaný trojuholníkový tvar matice ktorým sme sa zaoberali v kapitole 2 je jednoznačný. Napokon sa vrátime k homogénnym a nehomogénnym sústavám lineárnych rovníc. Ukážeme ako možno vyjadriť priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$ ako podpriestor priestoru $V_n(\mathbb{F})$. Ukážeme, že aj obrátene, každý podpriestor priestoru $V_n(\mathbb{F})$ je priestorom riešení nejakej homogénnej sústavy lineárnych rovníc s n neznámymi nad $\mathbb{F}$. Napokon prezentujeme Frobeniovu vetu ako kritérium riešiteľnosti nehomogénnej sústavy lineárnych rovníc a ukážeme ako možno vyjadriť množinu riešení nehomogénnej sústavy.

Hodnosť matice. Vieme podľa vety 5.16, že riadkovo ekvivalentným maticiam prislúcha rovnaký podpriestor. Nasledujúca veta hovorí, čo bude jeho bázou.

7.1. Veta *Nech matica* $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *nad poľom* $\mathbb{F}$ *má redukovaný trojuholníkový tvar* $\mathbf{B}$. *Potom nenulové riadky matice* $\mathbf{B}$ *chápané ako vektory z* $V_n(\mathbb{F})$ *tvoria bázu vektorového podpriestoru prislúchajúceho matici* $\mathbf{A}$.

Dôkaz Nech $\beta_1 = (b_{11}, \ldots, b_{1n}), \ldots, \beta_k = (b_{k1}, \ldots, b_{kn})$ sú nenulové riadky matice $\mathbf{B}$ chápané ako vektory z $V_n(\mathbb{F})$, pričom $k \leqslant m$. Nech $\mathbf{C}$ je matica typu $k \times n$ s riadkami $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Z dôsledku 6.6 vyplýva, že vektory $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď maticu $\mathbf{C}$ možno pomocou konečného počtu elementárnych riadkových operácií upraviť na maticu s nulovým riadkom, teda keď možno pomocou e.r.o. prevádzaných na matici $\mathbf{B}$ zvýšiť aspoň o jeden počet nulových riadkov matice $\mathbf{B}$. Pretože ale matica $\mathbf{B}$ je redukovaná trojuholníková matica, toto samozrejme nie je možné, a teda vektory $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sú lineárne nezávislé.

Pdpriestor priestoru $V_n(\mathbb{F})$ prislúchajúci matici $\mathbf{A}$ je na základe vety 5.16 rovnaký ako podpriestor prislúchajúci matici $\mathbf{B}$, a teda je generovaný vektormi $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Pretože tieto sú lineárne nezávislé, tvoria jeho bázu. □

Pretože dimenzia vektorového priestoru prislúchajúceho matici je invariantom matice, je vhodné dať tomuto invariantu pomenovanie.

7.2. Definícia *Hodnosťou matice* $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *nad poľom* $\mathbb{F}$ *nazývame dimenziu podpriestoru* $V(\mathbf{A})$ *priestoru* $V_n(\mathbb{F})$ *prislúchajúceho matici* $\mathbf{A}$. *Označujeme ju symbolom* $h(\mathbf{A})$.

Bezprostredným dôsledkom vety 5.16 je nasledujúce tvrdenie.

7.3. Dôsledok *Riadkovo ekvivalentné matice majú rovnakú hodnosť.*

Podobne, dôsledkom vety 7.1 je nasledujúce tvrdenie.

7.4. Dôsledok *Hodnosť redukovanej trojuholníkovej matice sa rovná počtu jej nenulových riadkov.*

Môžeme tiež uviesť ďalšie kritérium invertovateľnosti štvorcovej matice stupňa n (pozri spätne vetu 3.6).

7.5. Veta *Nech štvorcová matica* $\mathbf{A}$ *stupňa* n *nad poľom* $\mathbb{F}$ *má stĺpce (chápané ako vektory z* $V_n(\mathbb{F})$*)* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(1) *matica* $\mathbf{A}$ *je invertovateľná;*
(2) *stĺpce* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *matice* $\mathbf{A}$ *(riadky matice* $\mathbf{A}^T$*) tvoria bázu* $V_n(\mathbb{F})$*;*
(3) $h(\mathbf{A}^T) = n$.

Dôkaz (1) $\Longrightarrow$ (2). Nech $\mathbf{A}$ je invertovateľná. Podľa vety 3.6 má sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ iba triviálne riešenie. Všimnime si, že sústavu $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ možno prepísať v tvare jedinej rovnice

$$x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}. \tag{7.1}$$

Pretože jej riešením je iba n-tica $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$, podľa vety 6.5, (1) $\Longleftrightarrow$ (2), sú vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ lineárne nezávislé. Podľa dôsledku 6.16 vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tvoria bázu $V_n(\mathbb{F})$.

Pretože $h(\mathbf{A}^T) = \dim V(\mathbf{A}^T) = \dim[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, dostávame ihneď (2) $\Longrightarrow$ (3).

(3) $\Longrightarrow$ (1). Ak $h(\mathbf{A}^T) = \dim V(\mathbf{A}^T) = n$, tak riadky $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ matice $\mathbf{A}^T$ musia byť lineárne nezávislé; v opačnom prípade by podľa dôsledku 6.6

$$\dim V(\mathbf{A}^T) = \dim[\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n] \leqslant n - 1$$

pre nejaké $1 \leqslant i \leqslant n$, spor. Teda rovnica (7.1) má iba triviálne riešenie $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$, čiže aj sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ má iba triviálne riešenie. Podľa vety 3.6 je teda matica $\mathbf{A}$ je invertovateľná. $\square$

V súvislosti s tvrdením (3) v predchádzajúcej vete poznamenávame, že neskôr vo vete 7.11 ukážeme, že $h(\mathbf{A}^T) = h(\mathbf{A})$.

Jednoznačnosť redukovanej trojuholníkovej matice. Vo vete 2.9 sme ukázali, že každá matica je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou. Teraz už máme vybudovaný aparát na to, aby sme ukázali, že každá matica je riadkovo ekvivalentná s práve jednou redukovanou trojuholníkovou maticou (teda, že redukovaný trojuholníkový tvar matice je vzhľadom na riadkovú ekvivalentnosť jej *kanonický tvar*).

Dôkaz nasledujúcej vety je pomerne náročný (doporučujeme čitateľovi, aby strávil nad ním určitý čas s ceruzkou a papierom).

7.6. Veta *Nech* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sú redukované trojuholníkové matice typu* $m \times n$ *nad poľom* $\mathbb{F}$*, ktorým prislúcha ten istý vektorový podpriestor priestoru* $V_n(\mathbb{F})$*. Potom* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$*.*

Dôkaz Predpokladajme, že vektorový podpriestor P priestoru $V_n(\mathbb{F})$ prislúchajúci maticiam $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ má dimenziu k. Pretože podľa vety 7.1 nenulové riadky matíc $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ chápané ako vektory z $V_n(\mathbb{F})$ tvoria bázy vektorového podpriestoru P, musí mať matica $\mathbf{A}$ i matica $\mathbf{B}$ práve k nenulových riadkov. Nech tieto riadky v $\mathbf{A}$ sú vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a nech v $\mathbf{B}$ sú to $\beta_1, \dots, \beta_k$. Ukážeme, že $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$.

Nech vedúce prvky (jednotky) riadkov $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sú v stĺpcoch $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ a nech vedúce prvky riadkov $\beta_1, \dots, \beta_k$ sú v stĺpcoch $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$. V prvej časti dôkazu ukážeme, že $s_1 = t_1, \dots, s_k = t_k$, t.j., že nenulové riadky matice $\mathbf{A}$ majú vedúce prvky v tých istých stĺpcoch ako nenulové riadky matice $\mathbf{B}$.

Nech $i \in \{1, \dots, k\}$ je ľubovoľný index. Pretože $\alpha_i \in P$ a P má bázu $\beta_1, \dots, \beta_k$, možno podľa vety 6.18 vektor α_i jediným spôsobom vyjadriť v tvare

$$\alpha_i = c_1\beta_1 + \cdots + c_k\beta_k \tag{7.2}$$

pre nejaké skaláry $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}$. Pretože riadok α_i má vedúci prvok v stĺpci s_i, vektor α_i má prvých $(s_i - 1)$ súradníc nulových, a teda z rovnosti (7.2) vyplýva, že tie riadky β_j ktorých vedúce prvky (jednotky) sú v stĺpcoch $t_j < s_i$ musia ako vektory v (7.2) vystupovať s koeficientom 0. Riadky β_j ktorých vedúce prvky sú v stĺpcoch $t_j > s_i$ majú v stĺpci s_i nuly (lebo $\mathbf{B}$ je v redukovanom trojuholníkovom tvare), preto sa v rovnosti (7.2) tiež nemôžu podieľať na jednotkovej s_i-tej súradnice vektora α_i. (Premyslite si to dôkladne.) Preto musí existovať riadok β_j ktorý má vedúci prvok presne v stĺpci $t_j = s_i$. Pretože k ľubovoľnému indexu s_i, $i = 1, \dots, k$ možno takto priradiť nejaký index $t_j = s_i$ a indexy s_i a t_j sú usporiadané podľa veľkosti a je ich rovnaký počet, nutne musí byť $s_1 = t_1, \dots, s_k = t_k$.

Rovnosť (7.2) prejde teda do tvaru

$$\alpha_i = c_i\beta_i + \cdots + c_k\beta_k. \tag{7.3}$$

Pretože matica $\mathbf{A}$ je v redukovanom trojuholníkovom tvare, riadok α_i má v stĺpci $s_i = t_i$ jednotku a v stĺpcoch $s_{i+1} = t_{i+1}, \dots, s_k = t_k$ samé nuly. Vektor na pravej strane rovnosti (7.3) má v týchto stĺpcoch prvky $c_i, c_{i+1}, \dots, c_k$. Preto $c_i = 1$, $c_{i+1} = \dots = c_k = 0$, čiže (7.3) nám dá $\alpha_i = \beta_i$. Pretože index i bol ľubovoľný z množiny $\{1, \dots, k\}$, dostávame požadované rovnosti $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$. Teda $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. □

7.7. Dôsledok *Každá matica je riadkovo ekvivalentná práve s jednou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

Dôkaz Vo vete 2.9 sme dokázali, že každá matica $\mathbf{A}$ je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou. Predpokladajme teraz, že $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ sú redukované trojuholníkové matice riadkovo ekvivalentné s $\mathbf{A}$. Potom aj $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ sú navzájom riadkovo ekvivalentné (pozri lemu 2.5), a preto podľa vety 5.16 im prislúcha rovnaký vektorový podpriestor. Teda podľa vety 7.6, $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. □

7.8. Dôsledok *Matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *typu* $m \times n$ *nad poľom* $\mathbb{F}$ *sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď im prislúcha ten istý vektorový podpriestor priestoru* $V_n(\mathbb{F})$, *t.j.* $V(\mathbf{A}) = V(\mathbf{B})$.

Dôkaz Jedna časť vyplýva priamo z vety 5.16. Nech teraz maticiam $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ typu $m \times n$ prislúcha ten istý vektorový podpriestor P priestoru $V_n(\mathbb{F})$. Nech $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$ a $\mathbf{B} \sim \mathbf{B}'$, pričom $\mathbf{A}', \mathbf{B}'$ sú v redukovanom trojuholníkovom tvare. Potom aj maticiam $\mathbf{A}', \mathbf{B}'$ na základe vety 5.16 prislúcha vektorový podpriestor P. Podľa vety 7.6 teda $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$. Čiže $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. □

Priestory riešení homogénnych sústav. Ako sme uviedli v kapitole 5, medzi najdôležitejšie príklady podpriestorov vektorových priestorov patria priestory riešení homogénnych sústav lineárnych rovníc.

Homogénna sústava $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ s maticou sústavy $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ je špeciálnym prípadom sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{B}$ je matica typu $m \times 1$. Gaussovu-Jordanovu eliminačnú metódu riešenia tejto sústavy sme uviedli v kapitole 2. Teraz sa vrátime ku kroku 2(b) (pozri stranu 20) pri riešení homogénnej sústavy, t.j. keď $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Nech redukovaný trojuholníkový tvar matice $\mathbf{A}$ (vďaka vete 7.7 vieme, že je jednoznačný) má $k < n$ nenulových riadkov, ktoré tvoria maticu $\mathbf{D}$; teda $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{D}) = k$. Predpokladajme, že vedúce prvky (jednotky) týchto nenulových riadkov sú v stĺpcoch $j_1 = 1,\ j_2 = 2,\ \dots,\ j_k = k$ odpovedajúcich premenným $x_1, \dots, x_k$. (Toto sa vždy dá dosiahnuť poprehadzovaním stĺpcov, čo odpovedá preznačeniu premenných. Po vyriešení sústavy možno premenné spätne preznačiť a dostať tak riešenie pôvodnej sústavy. K preznačeniu premenných však siahame iba pre jednoduchosť zápisu dôkazu, pri praktickom riešení homogénnych sústav to robiť nebudeme.)

Za hodnoty premenných $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ podľa Gaussovej-Jordanovej eliminačnej metódy volíme parametre $t_1, \dots, t_{n-k}$ ($t_1, \dots, t_{n-k} \in \mathbb{F}$). Hodnoty ostatných premenných možno potom vyjadriť v tvare (pozri (2.3) na strane 20):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -d_{1,k+1}t_1 - d_{1,k+2}t_2 - \cdots - d_{1n}t_{n-k} \\
x_2 &= -d_{2,k+1}t_1 - d_{2,k+2}t_2 - \cdots - d_{2n}t_{n-k} \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
x_k &= -d_{k,k+1}t_1 - d_{k,k+2}t_2 - \cdots - d_{kn}t_{n-k}.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

Je zrejmé, že $(n-k)$-tice parametrov $(t_1, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{F}^{n-k}$ tvoria vektorový priestor $V_{n-k}(\mathbb{F})$. Preto každú $(n-k)$-ticu $(x_{k+1}, \dots, x_n) = (t_1, \dots, t_{n-k})$ vieme vyjadriť jednoznačne v tvare lineárnej kombinácie jednotkovej bázy priestoru $V_{n-k}(\mathbb{F})$

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_{n-k} = (0, \ldots, 0, 1).$$

(Pripomíname, že pod 0 resp. 1 máme vždy na mysli nulu resp. jednotku poľa $\mathbb{F}$.) Ak zvolíme za $(n-k)$-tice premenných $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ postupne bázové vektory $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-k}$ priestoru $V_{n-k}(\mathbb{F})$, dostaneme ako n-tice riešení danej homogénnej sústavy nasledovné vektory z priestoru $V_n(\mathbb{F})$:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= (-d_{1,k+1}, -d_{2,k+1}, \ldots, -d_{k,k+1}, 1, 0, \ldots, 0) \\ \alpha_{k+2} &= (-d_{1,k+2}, -d_{2,k+2}, \ldots, -d_{k,k+2}, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \alpha_n &= (-d_{1n}, -d_{2n}, \ldots, -d_{kn}, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{7.5}$$

7.9. Veta (1) *Vektory* $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n \in V_n(\mathbb{F})$ *tvoria bázu priestoru riešení homogénnej sústavy* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.
(2) *Priestor riešení homogénnej sústavy* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *má dimenziu* $n - h(\mathbf{A})$.

Dôkaz Je vidieť, že vektory $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ sú lineárne nezávislé (vyplýva to z toho ako vyzerá ich posledných $(n-k)$ súradníc). Aby sme ukázali, že generujú priestor riešení sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, zoberme ľubovoľné riešenie $(x_1, \ldots, x_k, t_1, \ldots, t_{n-k}) = \mathbf{X}^T$ sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ chápané ako vektor z $V_n(\mathbb{F})$, kde $(t_1, \ldots, t_{n-k}) \in \mathbb{F}^{n-k}$ a $x_1, \ldots, x_k$ majú tvar (7.4). Dá sa ľahko preveriť dosadením zo (7.4) a (7.5), že platí rovnosť

$$\mathbf{X}^T = t_1\alpha_{k+1} + \cdots + t_{n-k}\alpha_n.$$

Teda vektory $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ generujú priestor riešení homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, čím je dokázané (1). Tvrdenie (2) je dôsledkom (1) a toho, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{D}) = k$. $\square$

7.10. Príklad Máme riešiť nasledovnú homogénnu sústavu štyroch rovníc so šiestimi neznámymi nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_3 \phantom{{}- 2x_4} + 4x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -x_1 \phantom{{}+ 2x_3} - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 \phantom{{}+ 4x_5} - x_6 &= 0 \\ 2x_1 \phantom{{}+ 2x_3} - 2x_4 + 4x_5 - 4x_6 &= 0. \end{aligned}$$

Matica sústavy je matica $\mathbf{A}'$ z príkladu 2.8. Jej úpravou na redukovanú trojuholníkovú maticu sme dostali maticu

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ktorá má tri nenulové riadky s vedúcimi prvkami v prvom, treťom a štvrtom stĺpci. Pretože v druhom, piatom a šiestom stĺpci nie sú vedúce prvky žiadneho riadku, zvolíme za trojice premenných (x_2, x_5, x_6) postupne bázové vektory $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$ priestoru $V_3(\mathbb{R})$. Podľa vety 7.9 bázu priestoru riešení danej homogénnej sústavy tvoria potom vektory

$$\alpha_2 = (?,1,?,?,0,0),\ \alpha_5 = (?,0,?,?,1,0),\ \alpha_6 = (?,0,?,?,0,1),$$

kde neznáme hodnoty premenných x_1, x_3, x_4 ľahko vypočítame zo sústavy

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 2x_5 - \frac{7}{3}x_6 &= 0\\ x_3 \qquad - x_5 \ + x_6 &= 0\\ x_4 \qquad - \frac{1}{3}x_6 &= 0 \end{aligned}$$

kódovanej maticou $\mathbf{B}'$. Dostaneme, že priestor riešení danej homogénnej sústavy je

$$[\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6] = [(0,1,0,0,0,0), (-2,0,1,0,1,0), (\frac{7}{3}, 0, -1, \frac{1}{3}, 0, 1)].$$

■

7.11. Veta *Nech* $\mathbf{B}$ *je ľubovoľná matica typu* $m \times n$ *nad poľom* $\mathbb{F}$. *Potom*

$$h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{B}^T).$$

Dôkaz Nech $h(\mathbf{B}) = k$. Nech $\beta_1, \dots, \beta_n$ sú stĺpce matice $\mathbf{B}$ (riadky matice $\mathbf{B}^T$) chápané ako vektory z $V_m(\mathbb{F})$. Hodnosť matice $\mathbf{B}^T$ je podľa definície dimenzia podpriestoru $V(\mathbf{B}^T) = [\beta_1, \dots, \beta_n]$ priestoru $V_m(\mathbb{F})$. Ukážeme, že $\dim[\beta_1, \dots, \beta_n] \leqslant k$.

Matica $\mathbf{B}$ má hodnosť k, teda jej redukovaný trojuholníkový tvar má práve k nenulových riadkov na základe dôsledkov 7.3 a 7.4. Vedúce prvky (jednotky) týchto k nenulových riadkov nemusia byť v prvých k stĺpcoch odpovedajúcich premenným $x_1, \dots, x_k$. Aby sme opäť zjednodušili zápis dôkazu, nech $\mathbf{D}$ je matica so stĺpcami $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_n}$ ktorú dostaneme z $\mathbf{B}$ poprehadzovaním stĺpcov tak, aby v jej redukovanom trojuholníkovom tvare boli vedúce prvky (jednotky) jej k nenulových riadkov v prvých k stĺpcoch odpovedajúcich premenným $x_1, \dots, x_k$. Potom homogénna sústava $\mathbf{DX} = \mathbf{0}$ má podľa vety 7.9 priestor riešení s bázou $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n$ vyjadrenou v (7.5). Pretože $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_n}$ sú stĺpce matice $\mathbf{D}$, sústavu $\mathbf{DX} = \mathbf{0}$ možno prepísať v tvare

$$\beta_{j_1}x_1 + \dots + \beta_{j_n}x_n = \mathbf{0}. \tag{7.6}$$

Ak bázový vektor priestoru riešení $\alpha_n = (-d_{1n}, -d_{2n}, \dots, -d_{kn}, 0, 0, \dots, 1)$ dosadíme do (7.6) za $(x_1, \dots, x_n)$, dostaneme

$$-d_{1n}\beta_{j_1} - d_{2n}\beta_{j_2} - \dots - d_{kn}\beta_{j_k} + 0\beta_{j_{k+1}} + \dots + 0\beta_{j_{n-1}} + 1\beta_{j_n} = \mathbf{0}.$$

Teda vektor β_{j_n} je lineárnou kombináciou vektorov $\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_k}$. Analogicky sa ukazuje, že každý z vektorov $\beta_{j_{k+1}},\dots,\beta_{j_{n-1}}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_k}$. Teda podľa vety 6.5 $[\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_n}] = [\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_k}]$.Odtiaľ dostaneme požadovanú nerovnosť $\dim[\beta_1,\dots,\beta_n] \leqslant k$.

Ukázali sme, že pre ľubovoľnú maticu $\mathbf{B}$ platí nerovnosť $h(\mathbf{B}^T) \leqslant h(\mathbf{B})$. Ak do tejto nerovnosti teraz dosadíme za $\mathbf{B}$ maticu $\mathbf{B}^T$, dostaneme $h((\mathbf{B}^T)^T) \leqslant h(\mathbf{B}^T)$, t.j. $h(\mathbf{B}) \leqslant h(\mathbf{B}^T)$, odkiaľ už vyplýva požadované tvrdenie $h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{B}^T)$. □

Dôsledkom predchádzajúcej vety a vety 7.5 je nasledujúce tvrdenie.

7.12. Dôsledok *Nech matica $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{F})$ má riadky $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(1) *matica $\mathbf{A}$ je invertovateľná;*
(2) *$h(\mathbf{A}) = n$;*
(3) *riadky $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ matice $\mathbf{A}$ tvoria bázu $V_n(\mathbb{F})$.*

Vieme, že všetky riešenia homogénnej sústavy m lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$ tvoria vektorový podpriestor priestoru $V_n(\mathbb{F})$. Teraz si položme opačnú otázku: **Je každý podpriestor priestoru $V_n(\mathbb{F})$ priestorom riešení nejakej homogénnej sústavy lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$?**

7.13. Veta *Každý podpriestor priestoru $V_n(\mathbb{F})$ je priestorom riešení nejakej homogénnej sústavy lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$.*

Dôkaz Nech $S = [\beta_1,\dots,\beta_k]$ je daný podpriestor priestoru $V_n(\mathbb{F})$ s dimenziou $k > 0$. Hľadaná sústava lineárnych rovníc s priestorom riešení S sa nájde nasledovne:

Krok 1: Utvoríme maticu $\mathbf{B}$ typu $k \times n$ s riadkami $\beta_1,\dots,\beta_k$. (Jej hodnosť je $h(\mathbf{B}) = \dim S = k$.)

Krok 2: Nájdeme bázu riešení sústavy $\mathbf{BX} = \mathbf{0}$ pozostávajúcu z $n-k$ vektorov $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\dots,\alpha_n$. (Hovorí o nej veta 7.9.)

Krok 3: Utvoríme maticu $\mathbf{A}$ typu $(n-k)\times n$ s riadkami $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\dots,\alpha_n$. (Teda $h(\mathbf{A}) = n-k$.)

Tvrdíme, že že S je priestorom riešení homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ $n-k$ lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$.

Pretože $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\dots,\alpha_n$ sú riešenia sústavy $\mathbf{BX} = \mathbf{0}$, platí $\mathbf{B}\alpha_j^T = \mathbf{0}$, pre všetky $j = k+1,\dots,n$, kde vektor α_j^T chápeme ako maticu z $M_{n,1}(\mathbb{F})$ a $\mathbf{0} \in M_{k,1}(\mathbb{F})$. Z toho vyplýva, že platí aj $\mathbf{BA}^T = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{0} \in M_{k,n-k}(\mathbb{F})$. (Preverte to.) Transponovaním dostaneme rovnosť $\mathbf{AB}^T = \mathbf{0}^T$, odkiaľ máme $\mathbf{A}\beta_i^T = \mathbf{0}$ pre $i = 1,\dots,k$, kde $\mathbf{0} \in M_{n-k,1}(\mathbb{F})$. Teda vektory $\beta_1,\dots,\beta_k$ sú riešeniami sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, čiže máme ukázanú inklúziu $S \subseteq T$, kde $T \subseteq V_n(\mathbb{F})$ je priestor všetkých riešení homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Keďže $h(\mathbf{A}) = n-k$, podľa vety 7.9 platí $\dim T = n - h(\mathbf{A}) = n-(n-k) = k = \dim S$, odkiaľ vyplýva, že $S = T$, čo bolo treba dokázať. V prípade, že $S = \{\mathbf{0}\}$, stačí zobrať sústavu $\mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{0}$, ktorá má iba triviálne riešenie. □

7.14. Príklad Zoberme podpriestor

$$S = [\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6] = [(0,1,0,0,0,0), (-2,0,1,0,1,0), (\frac{7}{3}, 0, -1, \frac{1}{3}, 0, 1)]$$

priestoru $V_6(\mathbb{R})$ z príkladu 7.10 a vytvorme podľa algoritmu v dôkaze vety 7.13 spätne sústavu lineárnych rovníc s priestorom riešení S.

V prvom kroku utvoríme maticu $\mathbf{B}$ typu 3×6 s riadkami $\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6$. V druhom kroku nájdeme bázu priestoru riešení homogénnej sústavy $\mathbf{BX} = \mathbf{0}$, čiže sústavy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_6)^T = \mathbf{0}$$

so šiestimi neznámymi, kde vektor $(x_1, \dots, x_6)$ stotožňujeme s maticou $\mathbf{X}^T \in M_{1,6}(\mathbb{R})$ a $\mathbf{0} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Maticu $\mathbf{B}$ upravíme na redukovaný trojuholníkový tvar. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že báza priestoru riešení homogénnej sústavy $\mathbf{BX} = \mathbf{0}$ je tvorená vektormi

$$(-1, 0, -2, 1, 0, 0), \ (-3, 0, -7, 0, 1, 0), \ (-3, 0, -6, 0, 0, 1).$$

V treťom kroku teda utvoríme hľadanú sústavu ktorej priestorom riešení je S ako sústavu troch rovníc so šiestimi neznámymi z koeficientov vyššie uvedených vektorov:

$$\begin{aligned} -\ x_1 - 2x_3 + x_4 \qquad\quad &= 0 \\ -\ 3x_1 - 7x_3 \quad + x_5 \quad &= 0 \\ -\ 3x_1 - 6x_3 \qquad\quad + x_6 &= 0. \end{aligned}$$

■

Môžeme teda zhrnúť:

7.15. Dôsledok *Nech $\mathbb{F}$ je ľubovoľné pole a m, n sú ľubovoľné prirodzené čísla. Existuje jedno-jednoznačná korešpondencia medzi*

(i) *maticami typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$,*
(ii) *homogénnymi sústavami m lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$,*
(iii) *(nehomogénnymi) sústavami m lineárnych rovníc s $n - 1$ neznámymi nad $\mathbb{F}$,*
(iv) *podpriestormi priestoru $V_n(\mathbb{F})$ prislúchajúcimi maticiam typu $m \times n$ nad $\mathbb{F}$,*
(v) *podpriestormi priestoru $V_n(\mathbb{F})$ ako priestormi riešení homogénnych sústav m lineárnych rovníc s n neznámymi nad poľom $\mathbb{F}$.*

Zvoľme maticu $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ nad $\mathbb{F}$. Potom v (ii) matici $\mathbf{A}$ odpovedá homogénna sústava lineárnych rovníc $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ s maticou sústavy $\mathbf{A}$, v (iii) jej odpovedá (nehomogénna) sústava lineárnych rovníc s rozšírenou maticou sústavy $\mathbf{A}$, v (iv) jej odpovedá podpriestor $V(\mathbf{A})$ priestoru $V_n(\mathbb{F})$ generovaný riadkami matice $\mathbf{A}$ a vo (v) priestor riešení S homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, ktorý je podpriestorom $V_n(\mathbb{F})$. Platí $\dim V(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$ a $\dim S = n - h(\mathbf{A})$.

Teraz sa vrátime k nehomogénnej sústave lineárnych rovníc $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ nad poľom $\mathbb{F}$, kde matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{B}$ sú postupne typov $m \times n$, $n \times 1$, $m \times 1$. Rozšírenou maticou tejto sústavy sme nazvali maticu $\mathbf{A}' = [\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ typu $m \times (n+1)$. Nasledujúca veta poskytuje **kritérium riešiteľnosti sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.**

7.16. Veta ***(Frobeniova veta)*** *Sústava*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{7.7}$$

má aspoň jedno riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.

Dôkaz Nech matica $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ má stĺpce $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Nech vektor $\beta \in V_m(\mathbb{F})$ je utvorený z koeficientov pravých strán sústavy (7.7). Nech $S := [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ a $T := [\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta]$ sú podpriestory $V_m(\mathbb{F})$. Sústava (7.7) je ekvivalentná rovnici

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta. \tag{7.8}$$

Predpokladajme, že $h(\mathbf{A}) = h([\mathbf{A}|\mathbf{B}])$. Potom aj $h(\mathbf{A}^T) = h([\mathbf{A}|\mathbf{B}]^T)$ t.j.

$$\dim[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \dim[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta]. \tag{7.9}$$

Pretože $S \subseteq T$ a $\dim S = \dim T$, musí byť $S = T$. Teda $\beta \in S$, čiže podľa vety 6.5

$$\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \quad \text{pre nejaké } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}.$$

Potom však n-tica $(c_1, \dots, c_n)$ je riešením (7.8), a teda aj sústavy (7.7).

Obrátene, nech n-tica $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$ je riešením sústavy (7.7), čiže je riešením (7.8). Potom $\beta \in S$, odkiaľ vyplýva, že platí $S = T$, teda platí (7.9). To ale hovorí, že $h(\mathbf{A}^T) = h([\mathbf{A}|\mathbf{B}]^T)$, odkiaľ podľa vety 7.11 dostaneme $h(\mathbf{A}) = h([\mathbf{A}|\mathbf{B}])$. $\square$

7.17. Veta *Priestor T všetkých riešení nehomogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ možno vyjadriť v tvare*

$$T = \beta + S = \{\beta + \alpha \mid \alpha \in S\},$$

kde S je priestor všetkých riešení homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ a β je ľubovoľné pevne zvolené riešenie sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Dôkaz Pretože vektor β je riešením sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, platí $\mathbf{A}\beta^T = \mathbf{B}$. Nech teraz $\gamma \in T$, t.j. platí $\mathbf{A}\gamma^T = \mathbf{B}$. Treba ukázať, že $\gamma = \beta + \alpha$ pre nejaké riešenie α homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Označme $\alpha := \gamma - \beta$. Potom

$$\mathbf{A}\alpha^T = \mathbf{A}(\gamma - \beta)^T = \mathbf{A}\gamma^T - \mathbf{A}\beta^T = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{0},$$

teda α je hľadaným riešením homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

Obrátene, nech α je ľubovoľné riešenie homogénnej sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Treba ukázať, že $\beta + \alpha$ je riešením sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. To ale preveríme výpočtom:

$$\mathbf{A}(\beta + \alpha)^T = \mathbf{A}\beta^T + \mathbf{A}\alpha^T = \mathbf{B} + \mathbf{0} = \mathbf{B}.$$

Tvrdenie je dokázané. $\square$

8. LINEÁRNE A DIREKTNÉ SÚČTY PODPRIESTOROV

Úvodné slovo. Táto kapitola bude po predchádzajúcich náročnejších pre čitateľa trochu oddychovou. Budeme sa zaoberať najmenším podpriestorom vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ obsahujúcim dva dané podpriestory $S, T \subseteq V(\mathbb{F})$ a tiež určením jeho dimenzie v prípade, že $V(\mathbb{F})$ je konečnorozmerný. Osobitne budeme študovať prípad, keď podpriestory S, T sú disjunktné.

Lineárny súčet podpriestorov. Vo vete 5.10 sme ukázali, že zjednotenie dvoch podpriestorov S, T vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ je podpriestorom $V(\mathbb{F})$ vtedy a len vtedy, keď $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$. Ak napríklad vo $V_3(\mathbb{R})$ zvolíme $S = [(1,0,0)]$ a $T = [(0,1,0)]$, tak $S \cup T = \{(a,0,0),(0,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ nebude podpriestorom $V_3(\mathbb{F})$; skutočne, vektory $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$ patria do $S \cup T$, ale napríklad už ich súčet $(1,0,0)+(0,1,0) = (1,1,0)$ nepatrí do $S \cup T$.

Najmenší podpriestor vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ obsahujúci zjednotenie $S \cup T$ dvoch podpriestorov S, T bude $[S \cup T]$. V danom príklade platí

$$[S \cup T] = [(1,0,0),(0,1,0)] = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(a,0,0)+(0,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Toto je motiváciou k nasledujúcej vete.

8.1. Veta *Nech S a T sú podpriestory vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$. Potom najmenší podpriestor vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$ obsahujúci podpriestory S, T má tvar*

$$[S \cup T] = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in S,\ \beta \in T\}. \tag{8.1}$$

Dôkaz Keďže $\alpha \in S, \beta \in T$ implikuje $\alpha \in [S \cup T], \beta \in [S \cup T]$, je jasné, že aj $\alpha+\beta \in [S \cup T]$, čo ukazuje inklúziu $\supseteq$ v (8.1). Pre obrátenú inklúziu stačí ukázať, že $P := \{\alpha+\beta \mid \alpha \in S, \beta \in T\}$ je podpriestorom priestoru $V(\mathbb{F})$ obsahujúcim S a T. Ak $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2 \in P$ a $c, d \in \mathbb{F}$, tak $c(\alpha_1+\beta_1)+d(\alpha_2+\beta_2) = (c\alpha_1+d\alpha_2)+(c\beta_1+d\beta_2) \in P$, pretože podľa lemy 5.8 $c\alpha_1 + d\alpha_2 \in S$ a $c\beta_1 + d\beta_2 \in T$. Čiže opäť podľa lemy 5.8, P je podpriestorom priestoru $V(\mathbb{F})$. Pretože pre všetky $\alpha \in S, \beta \in T$ platí $\alpha = \alpha + \mathbf{0}$, $\beta = \mathbf{0} + \beta$ a $\mathbf{0} \in S \cap T$, dostávame $S, T \subseteq P$. Tvrdenie je dokázané. $\square$

8.2. Definícia *Nech S a T sú podpriestory vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$. Podpriestor*

$$\{\alpha + \beta \mid \alpha \in S,\ \beta \in T\}$$

sa nazýva lineárnym súčtom podpriestorov S a T a označuje sa $S + T$.

8.3. Príklad Zoberme vektory $\alpha = (3,0,2,0,4,-5)$, $\beta = (-1,0,0,-2,-2,3)$, $\gamma = (1,0,2,2,0,-1)$, $\delta = (2,0,0,-2,4,-4)$ a vektory $\sigma = (2,0,2,0,2,-\frac{8}{3})$, $\varepsilon = (0,2,0,2,0,-\frac{8}{3})$ z $V_6(\mathbb{R})$ použité v príklade 5.17. Nech

$$S := [\alpha,\beta,\gamma,\delta], \quad T := [\sigma,\varepsilon].$$

Našou úlohou bude vyjadriť $S+T$ a $S\cap T$ a zistiť dimenzie podpriestorov S, T, $S\cap T$ a $S+T$.

V príklade 5.17 sme vyjadrili podpriestor S v tvare

$$S = [\alpha', \beta', \gamma'],$$

kde $\alpha' = (1, 0, 0, 0, 2, -\frac{7}{3}), \beta' = (0, 0, 1, 0, -1, 1), \gamma' = (0, 0, 0, 1, 0, -\frac{1}{3})$, na základe čoho sme určili, že $\sigma \in S$ a $\varepsilon \notin S$. Teda $\dim S = 3$ a podľa viet 8.1 a 6.5

$$S + T = [S \cup T] = [\alpha', \beta', \gamma', \varepsilon].$$

To nám dáva požadované vyjadrenie $S+T$ a vidíme, že platí $\dim(S+T) = 4$. Pretože $\sigma \in S$ a $\varepsilon \notin S$, vidíme ďalej, že $S \cap T = [\sigma]$ a $\dim(S \cap T) = 1$. Je zrejmé, že vektory σ, ε nemôžu byť lineárne závislé. Teda $\dim T = 2$. Vidíme, že

$$\dim S + \dim T = 5 = \dim(S + T) + \dim(S \cap T). \tag{8.2}$$

■

Rovnosť (8.2) ktorú sme ukázali v predchádzajúcom príklade dokážeme teraz pre ľubovoľné podpriestory S, T konečnorozmerného vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$.

8.4. Veta *Nech S a T sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$. Potom*

$$\dim S + \dim T = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

Dôkaz Tvrdenie vety je zrejmé, ak $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$. Predpokladajme teda, že to neplatí. Ak $S\cap T \neq \{\mathbf{0}\}$, nech $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ je báza podpriestoru $S\cap T$ a doplňme ju na základe vety 6.16 vektormi $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ na bázu priestoru S a vektormi $\beta_1, \dots, \beta_n$ na bázu priestoru T. Ak $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, podpriestor $S \cap T$ nemá bázu a tak zvolíme rovno vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ za bázu priestoru S a vektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ za bázu priestoru T. V oboch prípadoch dostávame

$$S + T = [S \cup T] = [\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n] \tag{8.3}$$

pričom v 2. prípade je $k = 0$. Ukážeme, že vektory $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ sú lineárne nezávislé a tvoria teda bázu priestoru $S + T$. Predpokladajme, že sú lineárne závislé a ukážeme, že to vedie k sporu.

Ak sú lineárne závislé, tak podľa vety 6.5 je niektorý z nich lineárnou kombináciou ostatných. Predpokladajme najprv, že je to vektor α_i pre nejaké $1 \leqslant i \leqslant m$ (ak je to niektorý z vektorov β_i, postupuje sa analogicky a prenechávame to na čitateľa).

Dostávame teda

$$\begin{aligned}\alpha_i = {} & c_1\gamma_1 + \cdots + c_k\gamma_k + a_1\alpha_1 + \cdots + a_{i-1}\alpha_{i-1} \\ & + a_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + a_m\alpha_m + b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n\end{aligned}$$

pre nejaké skaláry $c_1, \dots, c_k, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$. Odtiaľ vyplýva, že vektor

$$\begin{aligned} \alpha &:= \alpha_i - a_1\alpha_1 - \dots - a_{i-1}\alpha_{i-1} - a_{i+1}\alpha_{i+1} - \dots - a_m\alpha_m \\ &= c_1\gamma_1 + \dots + c_k\gamma_k + b_1\beta_1 + \dots + b_n\beta_n, \end{aligned} \tag{8.4}$$

ktorý patrí do podpriestoru S patrí aj do podpriestoru T. Keďže $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \beta_1, \dots, \beta_n$ je báza T, je podľa vety 6.18 vyjadrenie (8.4) pomocou tejto bázy jednoznačné. Ďalej, pretože vektor α patrí do podpriestoru $S \cap T$ s bázou $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, opäť z vety 6.18 vyplýva, že ho možno jediným spôsobom vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie vektorov $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Ak by teda v (8.4) bol nejaký zo skalárov $b_1, \dots, b_n$ nenulový, bolo by vyjadrenie vektora α v tvare lineárnej kombinácie vektorov $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \beta_1, \dots, \beta_n$ rôzne od jeho vyjadrenia iba pomocou $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, čo je v spore s tým, že vyjadrenie vektora α pomocou bázy T je jednoznačné. (Premyslite si to.) Preto v (8.4) musia byť všetky zo skalárov $b_1, \dots, b_n$ nulové, a teda

$$\alpha = \alpha_i - a_1\alpha_1 - \dots - a_{i-1}\alpha_{i-1} - a_{i+1}\alpha_{i+1} - \dots - a_m\alpha_m = c_1\gamma_1 + \dots + c_k\gamma_k.$$

To ale znamená, že vektory $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ sú lineárne závislé, čo je v spore s tým, že tvoria bázu S.

Ak vektor γ_i je lineárnou kombináciou ostatných vektorov pre nejaké $1 \leqslant i \leqslant k$, tak analogickým postupom ako v prechádzajúcom prípade dostaneme, že vektor

$$\begin{aligned} \gamma &:= \gamma_i - c_1\gamma_1 - \dots - c_{i-1}\gamma_{i-1} - c_{i+1}\gamma_{i+1} - \dots - c_k\gamma_k \\ &\quad - a_1\alpha_1 - \dots - a_m\alpha_m = b_1\beta_1 + \dots + b_n\beta_n, \end{aligned}$$

kde skaláry $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_k, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$, patrí do podpriestoru $S \cap T$. Postupom ako v prechádzajúcom prípade možno ukázať, že to vedie k sporu. (Prenechávame to ako cvičenie na čitateľa.)

Ukázali sme teda, že vektory $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ vo vyjadrení (8.3) sú lineárne nezávislé a tvoria teda bázu priestoru $S + T$. Čiže sme ukázali, že ak $\dim(S \cap T) = k$, $\dim S = k + m$, $\dim T = k + n$, tak $\dim(S + T) = k + m + n$. Z toho vyplýva

$$\dim S + \dim T = (k + m) + (k + n) = (k + m + n) + k = \dim(S + T) + \dim(S \cap T),$$

čo bolo treba dokázať. □

Direktný súčet podpriestorov.

8.5. Definícia *Nech S a T sú podpriestory vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$. Lineárny súčet $S + T$ podpriestorov S, T nazývame direktným súčtom podpriestorov S, T, ak platí $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$. Označujeme ho $S \oplus T$.*

Ako dôsledok vety 8.4 dostávame pre direktné súčty nasledovné tvrdenie.

8.6. Veta *Nech S, T a P sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru $V(\mathbb{F})$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(1) $P = S \oplus T$;
(2) $P = S + T$ a $\dim P = \dim S + \dim T$;
(3) *ak $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ je báza priestoru S a $\beta_1, \dots, \beta_n$ je báza priestoru T, tak $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ je báza priestoru P;*
(4) *$P = S + T$ a každý vektor $\gamma \in P$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare $\gamma = \alpha + \beta$, kde $\alpha \in S$ a $\beta \in T$.*

Dôkaz Implikácia (1) $\Longrightarrow$ (2) vyplýva priamo z vety 8.4, keďže $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Nech platí (2) a nech $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ je báza priestoru S a $\beta_1, \dots, \beta_n$ je báza priestoru T. Potom

$$P = S + T = [S \cup T] = [\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n],$$

teda $m + n$ vektorov $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ generuje priestor P. Pretože $\dim P = \dim S + \dim T = m + n$, podľa lemy 6.15 vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ tvoria bázu priestoru P.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Nech platí (3). Potom

$$S + T = [S \cup T] = [\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n] = P.$$

Pretože $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ je báza priestoru P, podľa vety 6.18 sa každý vektor $\gamma \in P$ dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \dots + a_m\alpha_m + b_1\beta_1 + \dots b_n\beta_n$$

pre nejaké skaláry $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$. Z toho vyplýva aj jednoznačnosť vyjadrenia vektora γ v tvare $\gamma = \alpha + \beta$, kde $\alpha \in S$ a $\beta \in T$. (Premyslite si to.)

(4) $\Longrightarrow$ (1). Nech platí (4) a predpokladajme, že $\gamma \in S \cap T$. Potom dve vyjadrenia $\gamma = \gamma + \mathbf{0}$ ($\gamma \in S$, $\mathbf{0} \in T$) a $\gamma = \mathbf{0} + \gamma$ ($\mathbf{0} \in S$, $\gamma \in T$) vektora $\gamma \in P$ v tvare $\gamma = \alpha + \beta$, kde $\alpha \in S$ a $\beta \in T$ sa podľa predpokladu (4) musia rovnať, a teda $\gamma = \mathbf{0}$. Pretože $\gamma \in S \cap T$ bol ľubovoľný, ukázali sme, že $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, čiže $P = S \oplus T$. $\square$

8.7. Príklad Našou úlohou bude nájsť k vektorovému priestoru S v príklade 8.3 vektorový priestor T tak aby $S \oplus T = V_6(\mathbb{R})$.

V príklade 8.3 sme vyjadrili podpriestor S v tvare

$$S = [\alpha', \beta', \gamma']$$

kde $\alpha' = (1, 0, 0, 0, 2, -\frac{7}{3}), \beta' = (0, 0, 1, 0, -1, 1), \gamma' = (0, 0, 0, 1, 0, -\frac{1}{3})$. Je vidieť, že $\dim S = 3$ a vektory α', β', γ' tvoria bázu S. Veta 8.6 nám hovorí, že hľadaný vektorový priestor T má mať dimenziu 3 a že jeho bázové vektory majú dopĺňať vektory α', β', γ' na bázu $V_6(\mathbb{R})$. Také vektory však nie je problémom nájsť: stačí napríklad zobrať vektory $(0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Teda hľadaný vektorový priestor je $T = [(0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)]$. $\blacksquare$

9. LINEÁRNE ZOBRAZENIA

Úvodné slovo. Lineárne zobrazenia vektorových priestorov, ktorými sa budeme zaoberať v tejto kapitole, sú zobrazenia zachovávajúce štruktúru vektorových priestorov, teda sčitovanie vektorov a ich násobenie skalárom. Sú dôležitým nástrojom v mnohých oblastiach matematiky i v jej aplikáciach.

V kapitole 7 (dôsledok 7.15) sme ukázali, že existuje jedno-jednoznačná korešpondencia medzi maticami typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$, sústavami lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{F}$ a podpriestormi priestoru $V_n(\mathbb{F})$. V tejto kapitole túto korešpondenciu rozšírime o lineárne zobrazenia medzi vhodnými vektorovými priestormi. Ukážeme, že každá matica typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$ určuje jednoznačne lineárne zobrazenie priestoru $V_m(\mathbb{F})$ do priestoru $V_n(\mathbb{F})$ a obrátene, každému takému lineárnemu zobrazeniu prislúcha práve jedna matica typu $m \times n$ nad $\mathbb{F}$. Ukážeme súvislosti medzi vlastnosťami lineárnych zobrazení a im prislúchajúcich matíc, napríklad, že bijektívnym lineárnym zobrazeniam (izomorfizmom vektorových priestorov) prislúchajú akurát invertovateľné matice. Budeme sa zaoberať výpočtom inverznej matice k matici bijektívneho lineárneho zobrazenia. Napokon ukážeme, že jadrom lineárneho zobrazenia je práve priestor riešení homogénnej sústavy, ktorej maticou sústavy je matica lineárneho zobrazenia, a že obrazom lineárneho zobrazenia je práve podpriestor prislúchajúci matici lineárneho zobrazenia.

Lineárne zobrazenia.

9.1. Definícia *Nech $V(\mathbb{F})$ a $V'(\mathbb{F})$ sú vektorové priestory nad poľom $\mathbb{F}$. Zobrazenie $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ nazývame lineárnym zobrazením priestoru $V(\mathbb{F})$ do priestoru $V'(\mathbb{F})$, ak zachováva sčitovanie vektorov a ich násobenie skalárom, t.j. ak platí:*

(1) $(\forall \alpha, \beta \in V(\mathbb{F}))\ \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$;
(2) $(\forall \alpha \in V(\mathbb{F}))(\forall c \in \mathbb{F})\ \varphi(c\alpha) = c\varphi(\alpha)$.

Prenechávame na čitateľa presvedčiť sa, že zobrazenia v nasledujúcom príklade sú skutočne lineárne.

9.2. Príklad **1.** Nech $V(\mathbb{F})$ je ľubovoľný vektorový priestor. Identické zobrazenie $\mathrm{id} : \alpha \mapsto \alpha$ a nulové zobrazenie $\underline{0} : \alpha \mapsto \mathbf{0}$ sú lineárne zobrazenia $V(\mathbb{F}) \to V(\mathbb{F})$.

2. Zobrazenie $p_{xy} : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ s predpisom $p_{xy}(x, y, z) = (x, y, 0)$, ktoré geometricky môžeme interpretovať ako priemet do roviny xy v trojrozmernom priestore s tradičným pravouhlým súradnicovým systémom, je lineárne zobrazenie.

3. Zobrazenie $\varphi : V_2(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ dané predpisom $\varphi(x, y) = (y, x)$, ktoré geometricky môžeme interpretovať ako preklopenie roviny okolo priamky $y = x$, je lineárne zobrazenie.

4. Evaluačné zobrazenie $\mathrm{ev}(r) : P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $p(x) \mapsto p(r)$, $(r \in \mathbb{R})$, kde $P(\mathbb{R})$ je priestor všetkých polynómov v jednej neurčitej nad poľom $\mathbb{R}$, priraďuje každému polynómu $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_i \in \mathbb{R})$ reálne číslo $p(r)$ získané dosadením čísla r do $p(x)$ za neurčitú x a je lineárne zobrazenie.

5. Zobrazenie der : $P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$, $p(x) \mapsto p'(x)$ priestoru $P(\mathbb{R})$ do $P(\mathbb{R})$ priraďujúce každému polynómu $p(x)$ jeho deriváciu je lineárne zobrazenie.

Polynóm $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ v neurčitej x v príkladoch **4, 5** môžeme chápať aj ako polynomickú funkciu $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $(a_i \in \mathbb{R})$.
■

Dôkaz nasledujúcej lemy prenechávame na čitateľa.

9.3. Lema

(1) *Zobrazenie $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ je lineárnym zobrazením priestoru $V(\mathbb{F})$ do priestoru $V'(\mathbb{F})$ práve vtedy, keď zobrazuje lineárne kombinácie na lineárne kombinácie, t.j. keď pre všetky $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V(\mathbb{F})$ a pre všetky $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ platí*

$$\varphi(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n) = c_1\varphi(\alpha_1) + \cdots + c_n\varphi(\alpha_n).$$

(2) *Pre každé lineárne zobrazenie $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ platí $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Teraz už ľahko dokážeme tzv. Základnú vetu o lineárnych zobrazeniach.

9.4. Veta ***(Základná veta o lineárnych zobrazeniach)*** *Nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ je báza konečnorozmerného priestoru $V(\mathbb{F})$ a nech $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sú ľubovoľné vektory priestoru $V'(\mathbb{F})$. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ ktoré zobrazí vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ postupne na $\beta_1, \ldots, \beta_m$ a je dané predpisom*

$$\varphi(c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m) = c_1\beta_1 + \cdots + c_m\beta_m. \tag{9.1}$$

Dôkaz Pretože $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tvoria bázu priestoru $V(\mathbb{F})$, podľa vety 6.18 možno každý vektor $\alpha \in V(\mathbb{F})$ jednoznačným spôsobom vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m$. Preto predpis (9.1) jednoznačne určuje zobrazenie priestoru $V(\mathbb{F})$ do priestoru $V'(\mathbb{F})$. Nech $\alpha \in V(\mathbb{F})$ a $c \in \mathbb{F}$. Dostávame

$$\begin{aligned} \varphi(c\alpha) = \varphi(cc_1\alpha_1 + \cdots + cc_m\alpha_m) &= (cc_1)\beta_1 + \cdots + (cc_m)\beta_m \\ &= c(c_1\beta_1 + \cdots + c_m\beta_m) = c\varphi(\alpha), \end{aligned} \tag{9.2}$$

čím je ukázané, že φ spĺňa podmienku (2) z definície 9.1. Ostáva podobne preveriť podmienku (1) z definície 9.1 a to prenechávame na čitateľa. Teda predpis (9.1) jednoznačne určuje lineárne zobrazenie a pri voľbe koeficientov $c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0_{\mathbb{F}}$, $c_i = 1_F$, $c_{i+1} = \cdots = c_m = 0_{\mathbb{F}}$ dostaneme z (9.1) rovnosť $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$. □

Nech $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je matica typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$. *Zobrazením prislúchajúcim matici* $\mathbf{A}$ nazveme zobrazenie $\varphi_{\mathbf{A}} : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ definované predpisom

$$\varphi_{\mathbf{A}}((x_1, \ldots, x_m)) = (x_1, \ldots, x_m)\mathbf{A}, \tag{9.3}$$

kde pri násobení stotožňujeme vektor $(x_1, \ldots, x_m) \in V_m(\mathbb{F})$ s maticou z $M_{1,m}(\mathbb{F})$. Takéto stotožňovanie budeme používať aj naďalej.

Nech $\alpha := (x_1, \dots, x_m)$, $\beta := (y_1, \dots, y_m)$. Pretože podľa lemy 1.11 platí

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{A}}(c\alpha + d\beta) &= (c(x_1, \dots, x_m) + d(y_1, \dots, y_m))\mathbf{A} \\ &= c((x_1, \dots, x_m)\mathbf{A}) + d((y_1, \dots, y_m)(\mathbf{A})) = c\varphi_{\mathbf{A}}(\alpha) + d\varphi_{\mathbf{A}}(\beta),\end{aligned}$$

podľa lemy 9.3(1) je zobrazenie $\varphi_{\mathbf{A}}$ lineárne.

9.5. Definícia *Maticou lineárneho zobrazenia $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ nazývame maticu $\mathbf{A}_\varphi$ typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$ ktorej riadkami sú obrazy*

$$\varphi(\varepsilon_1), \dots, \varphi(\varepsilon_m)$$

jednotkových vektorov $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in V_m(\mathbb{F})$ v zobrazení φ.

Každej matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{F}$ teda prislúcha lineárne zobrazenie $\varphi_{\mathbf{A}} : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ a každému lineárnemu zobrazeniu $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ prislúcha matica $\mathbf{A}_\varphi$ typu $m \times n$ nad $\mathbb{F}$. Prenechávame na čitateľa ukázať, že ak prejdeme od matice $\mathbf{A}$ k lineárnemu zobrazeniu $\varphi_{\mathbf{A}}$ a naspäť k matici $\mathbf{A}_{\varphi_{\mathbf{A}}}$, dostaneme tú istú maticu $\mathbf{A}$ z ktorej sme začínali, čiže $\mathbf{A}_{\varphi_{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$. Teraz ukážeme, že ak začneme s lineárnym zobrazením $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$, prejdeme k jeho matici $\mathbf{A}_\varphi$ a potom opäť k lineárnemu zobrazeniu $\varphi_{\mathbf{A}_\varphi}$, dostaneme lineárne zobrazenie φ, s ktorým sme začínali.

9.6. Lema *Nech matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ nad poľom $\mathbb{F}$ je maticou lineárneho zobrazenia $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ a nech $\varphi_{\mathbf{A}} : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ je lineárne zobrazenie prislúchajúce k $\mathbf{A}$ podľa predpisu* (9.3). *Potom $\varphi_{\mathbf{A}} = \varphi$.*

Dôkaz Podľa vety 9.4 stačí ukázať, že zobrazenie $\varphi_{\mathbf{A}}$ zobrazuje jednotkové vektory $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ postupne na vektory $\varphi(\varepsilon_1), \dots, \varphi(\varepsilon_m)$. (Premyslite si to.) Pretože $\varphi_{\mathbf{A}}$ je dané predpisom (9.3), je obraz jednotkového vektora $\varepsilon_1 \in V_m(\mathbb{F})$

$$\varphi_{\mathbf{A}}((1, 0, \dots, 0)) = (1, 0, \dots, 0)\mathbf{A} = (a_{11}, a_{12} \dots, a_{1n}),$$

čo je prvý riadok matice $\mathbf{A}$, a teda $\varphi(\varepsilon_1)$. Analogicky platí $\varphi_{\mathbf{A}}(\varepsilon_i) = \varphi(\varepsilon_i)$ aj pre $i = 2, \dots, n$. □

9.7. Dôsledok *Nech $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ je lineárne zobrazenie a nech $\mathbf{A}$ je jeho matica. Potom obraz ľubovoľného vektora $(x_1, \dots, x_m) \in V_m(\mathbb{F})$ v zobrazení φ sa vypočíta podľa predpisu*

$$\varphi((x_1, \dots, x_m)) = \mathbf{X}\mathbf{A},$$

t.j. ako súčin matíc $\mathbf{X}$ a $\mathbf{A}$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m)$ je daný vektor z $V_m(\mathbb{F})$ chápaný ako matica typu $1 \times m$.

Podľa vety 9.4 existuje práve jedno lineárne zobrazenie $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ ktoré zobrazí zvolenú bázu $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vektorového priestoru $V_m(\mathbb{F})$ na ľubovoľné zadané vektory $\beta_1, \dots, \beta_m \in V_n(\mathbb{F})$. Ukážeme ako vypočítať maticu tohto lineárneho zobrazenia.

Nech bázové vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tvoria riadky štvorcovej matice $\mathbf{A} \in M_m(\mathbb{F})$ a vektory $\beta_1, \dots, \beta_m \in V_n(\mathbb{F})$ riadky matice $\mathbf{B} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Uvažujme o rozšírenej matici

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} \alpha_1|\beta_1 \\ \dots\dots \\ \alpha_m|\beta_m \end{pmatrix}, \tag{9.4}$$

typu $m \times (m+n)$ nad $\mathbb{F}$, ktorá má vlastnosť, že vektory v ľavej časti sa zobrazia v zobrazení φ na vektory v pravej časti. Ukážeme, že vykonaním ľubovoľnej elementárnej riadkovej operácie na matici $\mathbf{C}$ sa táto jej vlastnosť nezmení. Je to zrejmé pri zámene dvoch riadkov matice $\mathbf{C}$. Pri vykonaní e.r.o. typu (2), t.j. vynásobení i - teho riadku matice $\mathbf{C}$ skalárom $c \in \mathbb{F}$, treba preveriť, či $\varphi(c\alpha_i) = c\beta_i$. To ale vyplýva z toho, že $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$ a φ je lineárne. Ak pripočítame c-násobok j-teho riadku matice $\mathbf{C}$ k i-temu riadku ($i \neq j$), máme preveriť, že $\varphi(\alpha_i + c\alpha_j) = \beta_i + c\beta_j$. To ale opäť ihneď vyplýva z toho, že $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$, $\varphi(\alpha_j) = \beta_j$ a φ je lineárne.

Pretože vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ v ľavej časti matice $\mathbf{C}$ tvoria bázu priestoru $V_m(\mathbb{F})$, podľa dôsledku 7.12 a vety 3.6 možno maticu $\mathbf{A}$ v ľavej časti $\mathbf{C}$ upraviť pomocou e.r.o. na jednotkovú maticu. Urobíme to, ale s tým, že e.r.o. vykonávame na celej matici $\mathbf{C}$. Nech úpravami pomocou e.r.o. z matice $\mathbf{C}$ dostaneme maticu $\mathbf{C}' = [\mathbf{I}_m|\mathbf{B}']$. Práve sme vyššie ukázali, že aj po aplikácii e.r.o. sa naďalej vektory v ľavej časti zobrazia v zobrazení φ na vektory v pravej časti. Preto riadkami matice $\mathbf{B}'$ budú vektory $\varphi(\varepsilon_1), \dots, \varphi(\varepsilon_m) \in V_n(\mathbb{F})$, a teda $\mathbf{B}'$ bude požadovanou maticou lineárneho zobrazenia φ.

Predchádzajúci postup ilustrujeme na príklade.

9.8. Príklad Určme maticu lineárneho zobrazenia $\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ ktoré zobrazí vektory $(1,0,2), (2,-1,3), (4,1,8)$ postupne na jednotkové vektory $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in V_3(\mathbb{R})$.

Zostavíme rozšírenú maticu v ktorej vektory v ľavej časti sa majú zobraziť v zobrazení φ na vektory v pravej časti. Je to prvá z nasledujúcich dvoch matíc.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Ide o maticu $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_3]$ z príkladu 3.8, o ktorej sme ukázali, že je riadkovo ekvivalentná s druhou maticou uvedenou v (9.5). Teda platí

$$\varphi(\varepsilon_1) = (-11, 2, 2),\ \varphi(\varepsilon_2) = (-4, 0, 1),\ \varphi(\varepsilon_3) = (6, -1, -1)$$

a v pravej časti druhej matice v (9.5) je požadovaná matica lineárneho zobrazenia φ. ■

9.9. Poznámka Poznamenávame, že ak nevieme dopredu, či vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tvoria bázu $V_m(\mathbb{F})$ a maticu $\mathbf{A}$ v ľavej časti matice $\mathbf{C}$ uvedenej v (9.4) nemožno upraviť pomocou e.r.o. na jednotkovú maticu (t.j. pri úprave dostaneme v ľavej časti nulový riadok), znamená to podľa dôsledku 7.12 a vety 3.6, že vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ netvoria bázu $V_m(\mathbb{F})$, a teda zobrazenie $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ nie je korektne určené.

Niektoré vlastnosti lineárnych zobrazení. Dôkaz nasledujúceho tvrdenia prenechávame na čitateľa.

9.10. Lema *Nech $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ a $\psi : V'(\mathbb{F}) \to V''(\mathbb{F})$ sú lineárne zobrazenia. Potom aj zložené zobrazenie*

$$\psi \circ \varphi : V(\mathbb{F}) \to V''(\mathbb{F}),\ (\psi \circ \varphi)(\alpha) = \psi(\varphi(\alpha))$$

je lineárne.

Predpokladajme, že lineárne zobrazenia $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ a $\psi : V_n(\mathbb{F}) \to V_p(\mathbb{F})$ ktoré skladáme majú matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ resp. $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,p}$. Zaujíma nás či sa dá z týchto matíc vypočítať matica $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m,p}$ zloženého lineárneho zobrazenia $\psi \circ \varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_p(\mathbb{F})$.

Označme i-ty jednotkový vektor vo $V_m(\mathbb{F})$ resp. $V_n(\mathbb{F})$ symbolom ε_i^m resp. ε_i^n. Vieme, že i-ty riadok matice lineárneho zobrazenia $\psi \circ \varphi$ je

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(\varepsilon_i^m) &= \psi(\varphi(\varepsilon_i^m)) = \psi((a_{i1}, \ldots, a_{in})) = \\ &= \psi(a_{i1}\varepsilon_1^n + \cdots + a_{in}\varepsilon_n^n) = a_{i1}\psi(\varepsilon_1^n) + \cdots + a_{in}\psi(\varepsilon_n^n) = \\ &= a_{i1}(b_{11}, \ldots, b_{1p}) + \cdots + a_{in}(b_{n1}, \ldots, b_{np}).\end{aligned}$$

Teda pre prvok c_{ij} matice $\mathbf{C}$ dostávame vyjadrenie

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

čo znamená podľa definície 1.8, že

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}.$$

Dokázali sme teda nasledujúce tvrdenie. (Časť (2) vyplýva z (1) podľa dôsledku 9.7.)

9.11. Veta *(1) Ak lineárne zobrazenia $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ a $\psi : V_n(\mathbb{F}) \to V_p(\mathbb{F})$ majú matice $\mathbf{A}_\varphi$ resp. $\mathbf{A}_\psi$, tak zložené zobrazenie $\psi \circ \varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_p(\mathbb{F})$ má maticu*

$$\mathbf{A}_{\psi\circ\varphi} = \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\psi.$$

(2) Obraz ľubovoľného vektora $(x_1, \ldots, x_m) \in V_m(\mathbb{F})$ v zobrazení $\psi \circ \varphi$ sa vypočíta podľa predpisu

$$(\psi \circ \varphi)((x_1, \ldots, x_m)) = \mathbf{X}\mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\psi$$

t.j. ako súčin matíc $\mathbf{X}, \mathbf{A}_\varphi$ a $\mathbf{A}_\psi$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ je daný vektor z $V_m(\mathbb{F})$ chápaný ako matica typu $1 \times m$.

9.12. Poznámka Veta 9.11 nám umožňuje využívať pri skúmaní vlastností zložených lineárnych zobrazení vlastnosti súčinu matíc a obrátene. Napríklad v dôkaze lemy 1.11 sme sa dosť "narobili" kým sme ukázali asociatívnosť súčinu matíc. S využitím vety 9.11 je tento dôkaz veľmi jednoduchý, pretože bezprostredne vyplýva z asociatívnosti skladania prislúchajúcich lineárnych zobrazení.

9.13. Lema *Inverzné zobrazenie k bijektívnemu lineárnemu zobrazeniu je lineárne.*

Dôkaz Predpokladajme, že $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ je bijektívne lineárne zobrazenie a $\varphi^{-1} : V'(\mathbb{F}) \to V(\mathbb{F})$ je k nemu inverzné zobrazenie. Nech $c \in \mathbb{F}$ a $\alpha', \beta' \in V'(\mathbb{F})$, čiže existujú $\alpha, \beta \in V(\mathbb{F})$, že $\varphi(\alpha) = \alpha'$ a $\varphi(\beta) = \beta'$. Potom

$$\varphi^{-1}(\alpha' + \beta') = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha + \beta)) = \alpha + \beta = \varphi^{-1}(\alpha') + \varphi^{-1}(\beta')$$

$$\varphi^{-1}(c\alpha') = \varphi^{-1}(c(\varphi(\alpha))) = \varphi^{-1}(\varphi(c\alpha)) = c\alpha = c\varphi^{-1}(\alpha').$$

Teda na základe definície 9.1 je zobrazenie φ^{-1} lineárne. □

Lema 9.13 vedie k prirodzenej otázke ako vyzerá matica inverzného lineárneho zobrazenia φ^{-1} k danému bijektívnemu lineárnemu zobrazeniu $\varphi : V_n(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$. Odpoveď je priamym dôsledkom vety 9.11.

9.14. Dôsledok *Nech $\varphi : V_n(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ je bijektívne lineárne zobrazenie s maticou $\mathbf{A}$. Potom matica $\mathbf{A}$ je invertovateľná a matica $\mathbf{A}^{-1}$ je maticou inverzného lineárneho zobrazenia φ^{-1}.*

Dôkaz Nech $\mathrm{id}_{V_n(\mathbb{F})}$ označuje identické zobrazenie priestoru $V_n(\mathbb{F})$ do seba. Platí

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{V_n(\mathbb{F})} \quad \text{a} \quad \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_{V_n(\mathbb{F})}\,. \tag{9.6}$$

Nech $\mathbf{A}'$ je maticou inverzného lineárneho zobrazenia φ^{-1}. Na základe vety 9.11 nám (9.6) dá

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}_n \quad \text{a} \quad \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Teda matica $\mathbf{A}$ je invertovateľná a matica $\mathbf{A}'$ inverzného lineárneho zobrazenia φ^{-1} je inverznou maticou $\mathbf{A}^{-1}$. □

9.15. Príklad Matica lineárneho zobrazenia $\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ v príklade 9.8 je inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ z príkladu 3.8. Maticou inverzného zobrazenia φ^{-1} bude podľa dôsledku 9.14 inverzná matica k matici $\mathbf{A}^{-1}$, teda matica $\mathbf{A}$. Čiže

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

■

9.16. Veta ***(Kritérium injektívnosti, surjektívnosti a bijektívnosti lineárneho zobrazenia)*** *Nech $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ je lineárne zobrazenie a nech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ je báza priestoru $V(\mathbb{F})$. Potom*

(i) *φ je injektívne práve vtedy, keď vektory $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ sú lineárne nezávislé;*

(ii) *φ je surjektívne práve vtedy, keď*

$$V'(\mathbb{F}) = [\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)];$$

(iii) *φ je bijektívne práve vtedy, keď vektory $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ tvoria bázu $V'(\mathbb{F})$.*

Dôkaz (i) Predpokladajme, že $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ sú lineárne závislé, t.j.

$$c_1\varphi(\alpha_1) + \cdots + c_n\varphi(\alpha_n) = \mathbf{0} \tag{9.7}$$

pre nejaké skaláry $c_1 \dots, c_n \in \mathbb{F}$ z ktorých aspoň jeden je nenulový. Pretože φ je lineárne, možno (9.7) písať v tvare

$$\varphi(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n) = \mathbf{0}.$$

Označme $\alpha := c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$. Rovnosť $\alpha = \mathbf{0}$ by viedla k $c_1 = \cdots = c_n = 0_{\mathbb{F}}$, pretože $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ je báza priestoru $V(\mathbb{F})$. Pretože aspoň jeden skalár c_i je nenulový, musí byť $\alpha \neq \mathbf{0}$. Teda $\varphi(\alpha) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ využijúc lemu 9.3(2), čiže φ nie je injektívne.

Obrátene, nech vektory $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ sú lineárne nezávislé. Predpokladajme, že $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = \gamma$ pre nejaké vektory $\alpha, \beta \in V(\mathbb{F})$ a $\gamma \in V'(\mathbb{F})$. Potom

$$\mathbf{0} = \varphi(\alpha) - \varphi(\beta) = \varphi(\alpha - \beta). \tag{9.8}$$

Pretože $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ je báza $V(\mathbb{F})$, možno α, β (jediným spôsobom) vyjadriť v tvare

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n,$$
$$\beta = d_1\alpha_1 + \cdots + d_n\alpha_n$$

pre nejaké skaláry $c_1, d_1, \dots, c_n, d_n \in \mathbb{F}$. Teda (9.8) prejde do tvaru

$$\mathbf{0} = \varphi((c_1 - d_1)\alpha_1 + \cdots + (c_n - d_n)\alpha_n) = (c_1 - d_1)\varphi(\alpha_1) + \cdots + (c_n - d_n)\varphi(\alpha_n).$$

Pretože $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ sú lineárne nezávislé, dostávame z toho rovnosti $c_1 - d_1 = 0$, $\dots, c_n - d_n = 0$. Teda $c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$, odkiaľ $\alpha = \beta$, čiže φ je injektívne.

(ii) Predpokladajme, že platí $V'(\mathbb{F}) = [\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)]$. Teda každý vektor $\gamma \in V'(\mathbb{F})$ sa dá vyjadriť v tvare $\gamma = c_1\varphi(\alpha_1) + \cdots + c_n\varphi(\alpha_n)$ pre nejaké skaláry $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$. Pretože φ je lineárne, platí $\gamma = \varphi(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n)$, čiže $\alpha := c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$ je vzor ku γ v zobrazení φ. Teda φ je surjektívne.

Obrátene, nech φ je surjektívne. Ukážeme inklúziu $V'(\mathbb{F}) \subseteq [\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)]$, ktorá stačí. Nech $\gamma \in V'(\mathbb{F})$. Pretože φ je surjektívne, existuje $\alpha \in V(\mathbb{F})$ tak, že $\varphi(\alpha) = \gamma$. Pretože $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ je báza priestoru $V(\mathbb{F})$, možno α vyjadriť v tvare $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$ pre nejaké skaláry $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$. Potom

$$\gamma = \varphi(\alpha) = c_1\varphi(\alpha_1) + \cdots + c_n\varphi(\alpha_n),$$

čiže $\gamma \in [\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)]$ ako sme potrebovali ukázať.

Tvrdenie (iii) vyplýva priamo z (i) a (ii) a definície bázy. □

9.17. Definícia *Nech $V(\mathbb{F})$ a $V'(\mathbb{F})$ sú vektorové priestory. Bijektívne lineárne zobrazenie $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ nazývame izomorfizmom priestorov $V(\mathbb{F})$ a $V'(\mathbb{F})$.*

Pretože inverzné zobrazenie $\varphi^{-1} : V'(\mathbb{F}) \to V(\mathbb{F})$ k izomorfizmu $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ je bijektívne a podľa lemy 9.13 je lineárne, je tiež izomorfizmom priestorov $V(\mathbb{F})$ a $V'(\mathbb{F})$. V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať tým ako určiť jeho maticu v prípade, že $V(\mathbb{F}) = V'(\mathbb{F}) = V_n(\mathbb{F})$.

Ak $\varphi : V_n(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ je izomorfizmus, ktorý zobrazuje nejakú (nie nutne jednotkovú) bázu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ priestoru $V_n(\mathbb{F})$ na inú bázu $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V_n(\mathbb{F})$ a máme vypočítať maticu izomorfizmu φ^{-1}, tak jedna možnosť je v prvom kroku postupom vysvetleným pred príkladom 9.8 a ilustrovanom v príklade 9.8 vypočítať maticu lineárneho zobrazenia φ a v druhom kroku postupom ako v kapitole 3 vypočítať k nej inverznú maticu. Táto podľa dôsledku 9.14 bude hľadanou maticou zobrazenia φ^{-1}. Tento postup teda v praxi znamená v prvom kroku upraviť pomocou e.r.o. rozšírenú maticu $\mathbf{C} = [\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ zobrazenia φ vyjadrenú v (9.4) tak, aby matica $\mathbf{A}$ v ľavej časti prešla na maticu $\mathbf{I}_n$, čím matica $\mathbf{C}$ prejde na maticu $\mathbf{C}' = [\mathbf{I}_n|\mathbf{B}']$. Matica $\mathbf{B}'$ v pravej časti je potom maticou zobrazenia φ. Druhý krok znamená utvoriť maticu $[\mathbf{B}'|\mathbf{I}_n]$ a pomocou e.r.o. ju upraviť tak, aby matica $\mathbf{B}'$ v ľavej časti prešla na maticu $\mathbf{I}_n$, čím matica $\mathbf{I}_n$ v pravej časti prejde na maticu $(\mathbf{B}')^{-1}$, čo je hľadaná matica zobrazenia φ^{-1}. Tento postup však možno skrátiť zhruba na polovicu nasledovnou úvahou.

Zostavíme ako predtým rozšírenú maticu $\mathbf{C} = [\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ zobrazenia φ vyjadrenú v (9.4) v ktorej vektory v ľavej časti sa zobrazia vo φ na vektory v pravej časti. Tentokrát ale upravujeme $\mathbf{C}$ pomocou e.r.o. tak, aby sme **v pravej časti** dostali jednotkovú maticu $\mathbf{I}_n$. Pretože riadky $\beta_1, \ldots, \beta_n$ matice $\mathbf{B}$ tvoria bázu $V_n(\mathbb{F})$, podľa dôsledku 7.12 je $\mathbf{B}$ invertovateľná, a teda podľa vety 3.6 je možné upraviť ju na jednotkovú maticu. Úpravou dostaneme teda nejakú maticu

$$\mathbf{C}' = [\mathbf{A}'|\mathbf{I}_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1'|\varepsilon_1 \\ \ldots\ldots \\ \alpha_n'|\varepsilon_n \end{pmatrix},$$

z ktorej vyplýva, že $\varphi^{-1}(\varepsilon_1) = \alpha_1', \ldots, \varphi^{-1}(\varepsilon_n) = \alpha_n'$. Teda matica $\mathbf{A}'$ s riadkami $\alpha_1', \ldots, \alpha_n'$ je hľadanou maticou zobrazenia φ^{-1}! Je zároveň inverznou maticou k matici zobrazenia φ, ovšem maticu zobrazenia φ týmto postupom nezistíme.

9.18. Príklad Vráťme sa k určeniu matice zobrazenia φ^{-1}, kde $\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ je izomorfizmus v príklade 9.8. Teraz ilustrujeme kratší jednokrokový postup opísaný vyššie.

Zostavíme rozšírenú maticu

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}|\mathbf{I}_n] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v ktorej vektory v ľavej časti sa zobrazia vo φ na vektory v pravej časti. Maticu $\mathbf{C}$ dokonca ani nemusíme upravovať, pretože v jej pravej časti je už matica $\mathbf{I}_n$. Teda matica $\mathbf{A}$ v ľavej časti je hľadanou maticou zobrazenia φ^{-1}. (Je zároveň inverznou maticou k matici zobrazenia φ, ktorú sme ovšem týmto postupom nezistili.) ■

9.19. Poznámka Predstavme si situáciu, kedy nevieme, či zadané lineárne zobrazenie $\varphi : V_n(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ ktoré zobrazuje bázu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ priestoru $V_n(\mathbb{F})$ na nejaké vektory $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V_n(\mathbb{F})$ je bijektívne, t.j. izomorfizmus. Máme za úlohu to zistiť a zároveň určiť maticu φ^{-1} v prípade, že φ je izomorfizmus.

Najlepšou metódou je "tváriť' sa" akoby φ bolo bijektívne a použiť vyššie uvedený jednokrokový postup na určenie matice zobrazenia φ^{-1} (akoby φ^{-1} existovalo). Úprava matice $\mathbf{C}$ v (9.4) pomocou e.r.o. na tvar kedy v pravej časti dostaneme jednotkovú maticu $\mathbf{I}_n$ je podľa vety 3.6 a dôsledku 7.12 možná práve vtedy, keď vektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tvoria bázu $V_n(\mathbb{F})$, čo je podľa vety 9.16(iii) práve vtedy, keď φ je bijektívne.

Ak sa matica $\mathbf{C}$ v (9.4) nedá pomocou e.r.o. upraviť na tvar kedy v pravej časti dostaneme jednotkovú maticu, čiže v pravej časti pri úpravách dostaneme nulový riadok, môžeme prehlásiť, že φ nie je izomorfizmom. V opačnom prípade φ je izomorfizmom a v ľavej časti dostaneme ihneď hľadanú maticu izomorfizmu φ^{-1}.

Jadro a obraz lineárneho zobrazenia.

9.20. Definícia *Nech $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ je lineárne zobrazenie. Jeho jadrom nazývame množinu*

$$\mathrm{J}_\varphi := \{\alpha \in V(\mathbb{F}) \mid \varphi(\alpha) = \mathbf{0}\}$$

a obrazom množinu

$$\mathrm{O}_\varphi := \{\alpha' \in V'(\mathbb{F}) \mid (\exists \alpha \in V(\mathbb{F}))\ \varphi(\alpha) = \alpha'\}.$$

Dôkaz nasledujúceho tvrdenia prenechávame na čitateľa.

9.21. Lema *Nech $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ je lineárne zobrazenie. Potom jadro J_φ je podpriestorom priestoru $V(\mathbb{F})$ a obraz O_φ je podpriestorom priestoru $V'(\mathbb{F})$.*

Nasledujúca veta charakterizuje jadro a obraz lineárneho zobrazenia.

9.22. Veta *Nech $\varphi : V_m(\mathbb{F}) \to V_n(\mathbb{F})$ je lineárne zobrazenie s maticou $\mathbf{A}_\varphi$. Potom jadro J_φ je práve podpriestorom všetkých riešení homogénnej sústavy $\mathbf{A}_\varphi^T\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (kde $\mathbf{A}_\varphi^T \in M_{n,m}(\mathbb{F})$, $\mathbf{X} \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, $\mathbf{0} \in M_{n,1}(\mathbb{F})$) s m neznámymi a obraz O_φ je práve podpriestor $V(\mathbf{A}_\varphi)$ prislúchajúci matici $\mathbf{A}_\varphi$.*

Dôkaz Prvá časť vyplýva bezprostredne z dôsledku 9.7. Podľa definícií 5.15 a 9.5, $V(\mathbf{A}_\varphi) = [\varphi(\varepsilon_1), \ldots, \varphi(\varepsilon_m)]$. Nech $\alpha' \in \mathrm{O}_\varphi$ a $\alpha = (c_1, \ldots, c_m)$ je vzorom k α'

v zobrazení φ. Potom

$$\begin{aligned}\alpha' = \varphi(\alpha) &= \varphi(c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_m\varepsilon_m)\\ &= c_1\varphi(\varepsilon_1) + \cdots + c_m\varphi(\varepsilon_m),\end{aligned}$$

čiže $\mathrm{O}_\varphi \subseteq V(\mathbf{A}_\varphi)$. Obrátenú inklúziu prenechávame na čitateľa. $\square$

9.23. Príklad Určme jadro a obraz lineárneho zobrazenia $\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ z príkladu 9.8.

Podľa vety 9.22, obraz O_φ je podpriestorom $V(\mathbf{A}_\varphi)$ priestoru $V_3(\mathbb{R})$ generovaným riadkami matice $\mathbf{A}_\varphi$. Teda $\mathrm{O}_\varphi = [(-11, 2, 2), (-4, 0, 1), (6, -1, -1)]$. Jadro J_φ je podľa vety 9.22 podpriestorom všetkých riešení homogénnej sústavy $\mathbf{A}_\varphi^T\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Pretože vieme (pozri príklad 9.15), že matica $\mathbf{A}_\varphi$ je invertovateľná, platí podľa vety 7.5 a dôsledku 7.12, že aj matica $\mathbf{A}_\varphi^T$ je invertovateľná, a teda sústava $\mathbf{A}_\varphi^T\mathbf{X} = \mathbf{0}$ má podľa vety 3.6 iba triviálne riešenie. Teda $\mathrm{J}_\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

Jednoduchší argument ukazujúci, že $\mathrm{J}_\varphi = \{\mathbf{0}\}$ využíva fakt, že lineárne zobrazenie φ je bijektívne, t.j. izomorfizmus. Teda $\mathbf{0}$ je jediný vektor, ktorý zobrazenie φ zobrazuje do $\mathbf{0}$. $\blacksquare$

9.24. Veta *Nech $\varphi : V(\mathbb{F}) \to V'(\mathbb{F})$ je lineárne zobrazenie a nech priestor $V(\mathbb{F})$ má dimenziu n. Potom*

$$\dim(\mathrm{J}_\varphi) + \dim(\mathrm{O}_\varphi) = n.$$

Dôkaz Nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ je báza podpriestoru J_φ. Ak $m = n$, tak $\mathrm{O}_\varphi = \{\mathbf{0}\}$, t.j. tvrdenie platí. Ak $m < n$, možno vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ doplniť $n - m$ vektormi $\beta_1, \ldots, \beta_{n-m} \in V(\mathbb{F})$ na bázu priestoru $V(\mathbb{F})$. Pre každý vektor $\alpha' \in \mathrm{O}_\varphi$ platí

$$\alpha' = \varphi(c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m + c_{m+1}\beta_1 + \cdots + c_n\beta_{n-m})$$

pre nejaké skaláry $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, odkiaľ vzhľadom na lineárnosť φ a fakt, že $\varphi(\alpha_i) = \mathbf{0}$ pre $i = 1, \ldots, m$ dostávame $\alpha' \in [\varphi(\beta_1), \ldots, \varphi(\beta_{n-m})]$. Teda vektory $\varphi(\beta_1), \ldots, \varphi(\beta_{n-m})$ generujú O_φ. Ostáva ukázať, že sú lineárne nezávislé. Predpokladajme, že pre nejaké skaláry $d_1, \ldots, d_{n-m} \in \mathbb{F}$ platí

$$d_1\varphi(\beta_1) + \cdots + d_{n-m}\varphi(\beta_{n-m}) = \mathbf{0}.$$

Teda vektor $d_1\beta_1 + \cdots + d_{n-m}\beta_{n-m} \in \mathrm{J}_\varphi$, čo je ale možné iba ak je nulový (pretože $\beta_1, \ldots, \beta_{n-m}$ je doplnenie bázy J_φ na bázu $V(\mathbb{F})$). Pretože $\beta_1, \ldots, \beta_{n-m}$ sú lineárne nezávislé, dostávame $d_1 = \cdots = d_{n-m} = 0_\mathbb{F}$, čiže vektory $\varphi(\beta_1), \ldots, \varphi(\beta_{n-m})$ sú lineárne nezávislé. $\square$

10. EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PRIESTORY

Úvodné slovo. V kapitole 5 sme si pripomenuli ako bol v stredoškolskej matematike definovaný v priestore $V_2(\mathbb{R})$ (rovine) skalárny súčin vektorov a na jeho základe kolmosť vektorov a dĺžka vektora. V tejto kapitole budeme definovať euklidovské priestory ako ľubovoľné vektorové priestory nad $\mathbb{R}$ v ktorých existuje skalárny súčin a následne budeme študovať v nich pojmy kolmosti (ortogonality) vektorov i dĺžky (normy) vektora. Ukážeme, že každý n-rozmerný euklidovský vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ má bázu n navzájom kolmých vektorov dĺžky 1 presne tak ako priestor $V_n(\mathbb{R})$. Napokon ukážeme, že n-rozmerný euklidovský vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ je izomorfný s priestorom $V_n(\mathbb{R})$, t.j. z algebraického hľadiska sú "nerozlíšiteľné".

Skalárny súčin.

10.1. Definícia *Euklidovským vektorovým priestorom nazývame každý vektorový priestor $V(\mathbb{R})$ nad $\mathbb{R}$ pre ktorý existuje zobrazenie $s : V(\mathbb{R}) \times V(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ s nasledujúcimi vlastnosťami pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in V(\mathbb{R})$ a $c \in \mathbb{R}$:*

(1) $s(\alpha, \beta) = s(\beta, \alpha)$;
(2) $s(\alpha + \beta, \gamma) = s(\alpha, \gamma) + s(\beta, \gamma)$;
(3) $s(c\alpha, \beta) = c\, s(\alpha, \beta)$;
(4) $\alpha \neq \mathbf{0} \implies s(\alpha, \alpha) > 0$.

Zobrazenie s sa nazýva skalárnym súčinom. Euklidovský vektorový priestor $V(\mathbb{R})$ so skalárnym súčinom s budeme označovať $(V(\mathbb{R}), s)$.

10.2. Príklad V kapitole 5, príklade 5.3, sme definovali skalárny súčin vektorov $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3) \in V_3(\mathbb{R})$ ako $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Prenechávame na čitateľa preveriť, že zobrazenie

$$s(\alpha, \beta) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3)^T = a_1b_1 + 3a_2b_2 - a_2b_3 - a_3b_2 + a_3b_3$$

má vlastnosti (1)–(3) z definície 10.1. Všimnime si, že spĺňa aj vlastnosť (4). Ak $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$, tak $s(\alpha, \alpha) = a_1^2 + 2a_2^2 + (a_2 - a_3)^2 > 0$, čiže s je skalárnym súčinom. ■

V priestore $V_n(\mathbb{R})$ vo všeobecnosti platí, že pre vektory $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ a maticu $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$ zobrazenie

$$s(\alpha, \beta) = (a_1, \ldots, a_n)\mathbf{A}(b_1, \ldots, b_n)^T$$

spĺňa vlastnosť (1) z definície 10.1 práve vtedy, keď matica $\mathbf{A}$ je symetrická. Ďalej, na základe (4) a (1) z lemy 1.11 vždy spĺňa vlastnosti (2) a (3) z definície 10.1. Symetrická matica $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{R}$ pre ktorú zobrazenie $s(\alpha, \beta) = \alpha\mathbf{A}\beta^T$ spĺňa vlastnosť (4) z definície 10.1, a teda je skalárnym súčinom, sa nazýva *kladne definitná.* Jednotková matica $\mathbf{I}_n$ je kladne definitná a dostávame pre ňu štandardný skalárny súčin $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$.

10.3. Príklad V príklade 5.3 sme spomenuli vektorový priestor $\mathbb{R}^{[-\pi,\pi]}$ všetkých spojitých funkcií $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Presvedčte sa, že skalárny súčin možno v ňom definovať predpisom

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

■

Nech $(V(\mathbb{R}), s)$ je ľubovoľný euklidovský vektorový priestor. *Dĺžka* (*norma*) vektora sa vo $V(\mathbb{R})$ definuje analogicky ako v priestore $V_n(\mathbb{R})$:

$$\|\alpha\| = \sqrt{s(\alpha, \alpha)}.$$

Analogicky sa definuje aj veľkosť uhla medzi vektormi $\alpha, \beta \in V(\mathbb{R})$:

$$\cos\theta = \begin{cases} \frac{s(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\ \|\beta\|}, & \text{ak } \alpha \neq \mathbf{0} \text{ a } \beta \neq \mathbf{0} \\ 0, & \text{ak } \alpha = \mathbf{0} \text{ alebo } \beta = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Vektory $\alpha, \beta \in V(\mathbb{R})$ sa nazývajú *ortogonálne* (*kolmé*), ak $\cos\theta = 0$, t.j. $s(\alpha, \beta) = 0$. Používame tradičné označenie $\alpha \perp \beta$.

Nasledujúca veta hovorí, že mnohé vlastnosti, ktoré poznáme z priestoru $V_2(\mathbb{R})$ platia v ľubovoľnom euklidovskom vektorovom priestore.

10.4. Veta *V každom euklidovskom priestore $(V(\mathbb{R}), s)$ platí:*

(1) $\|c\alpha\| = |c|\ \|\alpha\|$;
(2) $\|\alpha\| > 0$ *pre* $\alpha \neq \mathbf{0}$;
(3) $s(\alpha, \beta) = 0 \implies \|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ ***(Pytagorova veta)***;
(4) $\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$ ***(rovnobežníkové pravidlo)***;
(5) $|s(\alpha, \beta)| \leqslant \|\alpha\|\|\beta\|$ ***(Schwarzova[7] nerovnosť)***;
(6) $\|\alpha + \beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|$ ***(trojuholníková nerovnosť)***.

Dôkaz Overenie (1) je ľahké:

$$\|c\alpha\| = \sqrt{s(c\alpha, c\alpha)} = \sqrt{c^2 s(\alpha, \alpha)} = |c|\ \|\alpha\|.$$

[7] Hermann Amadeus Schwarz (1843–1921) sa narodil v Poľsku, ale bol vychovávaný a vzdelanie získal v Nemecku. Bol nasledovníkom Karla Weierstrassa a Ernsta Eduarda Kummera, ktorého dcéru si vzal za manželku. Jeho hlavným záujmom boli geometrické aspekty analýzy. Ukázal, že s diferenciálnymi rovnicami súvisia určité čísla, ktoré sa neskôr stali známymi ako vlastné hodnoty matíc resp. lineárnych zobrazení. Spomínaná nerovnosť bola objavená práve v súvislosti s vlastnými hodnotami.

Vlastnosť (2) je bezprostredným dôsledkom vlastnosti (4) z definície 10.1. Dôkaz Pytagorovej vety je tiež jednoduchý s využitím vlastností (1)–(3) z definície 10.1:

$$\|\alpha+\beta\|^2 = s(\alpha+\beta,\alpha+\beta) = s(\alpha,\alpha)+2s(\alpha,\beta)+s(\beta,\beta) = \|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$$

použijúc predpoklad, že $s(\alpha,\beta)=0$. Dôkaz (4) prenechávame na čitateľa.

Teraz dokážeme nerovnosť (5). Nech $\alpha,\beta\in V(\mathbb{R})$. Ak $\alpha=\mathbf{0}$, tak obe strany (5) sú rovné nule. Predpokladajme teraz, že $\alpha\neq\mathbf{0}$. Na základe vlastnosti (4) z definície 10.1, pre ľubovoľné $c\in\mathbb{R}$ platí

$$s(c\alpha-\beta,c\alpha-\beta)\geqslant 0, \tag{10.1}$$

odkiaľ po úprave s využitím vlastností (1)–(3) z definície 10.1 dostaneme

$$c^2 s(\alpha,\alpha)-2c\, s(\alpha,\beta)+s(\beta,\beta)\geqslant 0. \tag{10.2}$$

Na ľavej strane máme kvadratický polynóm premennej c. Ak c je koreňom tohto polynómu, tak v (10.2), a teda aj v (10.1) nastane rovnosť, čiže podľa vlastnosti (4) z definície 10.1, $c\alpha-\beta=\mathbf{0}$. Teda $\beta=c\alpha$. Je zrejmé, že nemôžu existovať dve rôzne také $c\in\mathbb{R}$; skutočne, ak by $\beta=c_1\alpha$ a $\beta=c_2\alpha$, tak dostaneme $\mathbf{0}=(c_1-c_2)\alpha$, odkiaľ podľa lemy 5.4(3) máme (keďže $\alpha\neq\mathbf{0}$) $c_1-c_2=0$, čiže $c_1=c_2$. Teda kvadratický polynóm premennej c na ľavej strane 10.2 má nanajvýš jeden dvojnásobný koreň c. Teda pre jeho diskriminant platí

$$4c^2 s(\alpha,\beta)^2-4c^2 s(\alpha,\alpha)s(\beta,\beta)\leqslant 0,$$

odkiaľ dostávame

$$s(\alpha,\beta)^2\leqslant s(\alpha,\alpha)s(\beta,\beta),$$

čiže po odmocnení máme požadovanú nerovnosť

$$|s(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\|\beta\|.$$

Trojuholníková nerovnosť (6) je bezprostredným dôsledkom Schwarzovej nerovnosti s využitím vlastností (1)–(3) z definície 10.1:

$$\begin{aligned}\|\alpha+\beta\|^2 = s(\alpha,\alpha)+2s(\alpha,\beta)+s(\beta,\beta)\leqslant \\ \|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|+\|\beta\|^2=(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2\end{aligned} \tag{10.3}$$

odkiaľ po odmocnení (všimnime si, že $\|\alpha+\beta\|$ aj $\|\alpha\|+\|\beta\|$ sú nezáporné čísla) dostaneme

$$\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|.$$

□

Pojem ortogonálnosti vektorov v euklidovskom vektorovom priestore $(V(\mathbb{R}),s)$ možno prirodzene zovšeobecniť pre ľubovoľný konečný počet vektorov. Jednoducho povieme, že vektory $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V(\mathbb{R})$ sú ortogonálne, ak pre všetky $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $i\neq j$ platí $s(\alpha_i,\alpha_j)=0$.

10.5. Veta *Nenulové ortogonálne vektory v euklidovskom vektorovom priestore $(V(\mathbb{R}), s)$ sú lineárne nezávislé.*

Dôkaz Nech vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V(\mathbb{R})$ sú nenulové a ortogonálne. Predpokladajme, že

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \mathbf{0}$$

pre nejaké skaláry $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Potom pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} c_i\ s(\alpha_i, \alpha_i) &= c_1\ s(\alpha_1, \alpha_i) + \cdots + c_i\ s(\alpha_i, \alpha_i) + \cdots + c_n\ s(\alpha_1, \alpha_i) \\ &= s(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n, \alpha_i) = s(\mathbf{0}, \alpha_i) = 0. \end{aligned}$$

Pretože podľa vlastnosti (4) z definície 10.1 je $s(\alpha_i, \alpha_i) > 0$, dostávame $c_i = 0$. Pretože i bolo ľubovoľné, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú lineárne nezávislé. □

Gram-Schmidtova ortogonalizačná metóda. V euklidovských vektorových priestoroch existujú špeciálne a veľmi vhodné bázy vektorov ktoré majú všetky dĺžku 1 a z ktorých každé dva sú navzájom kolmé.

10.6. Definícia *Ortonormálnou bázou n-rozmerného euklidovského vektorového priestoru $(V(\mathbb{R}), s)$ nazývame ľubovoľné vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V(\mathbb{R})$ ktoré sú ortogonálne a majú dĺžku* 1.

Poznamenávame, že podľa vety 10.5 sú ortogonálne vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nenulovej dĺžky lineárne nezávislé a podľa dôsledku 6.16 teda skutočne tvoria bázu n-rozmerného priestoru $V(\mathbb{R})$.

Dôkaz nasledujúcej lemy uvádza konštrukciu, ktorou možno ľubovoľnú bázu konečnorozmerného euklidovského vektorového priestoru upraviť na ortonormálnu bázu. Táto metóda sa nazýva *Gram*[8] *-Schmidtova*[9] *ortogonalizačná metóda (proces).* Pritom platí, že ortogonalizáciou rôznych báz môžeme dostať rôzne ortonormálne bázy.

10.7. Veta ***(Gram-Schmidtova ortogonalizačná metóda)*** *Nech $(V(\mathbb{R}), s)$ je konečnorozmerný euklidovský vektorový priestor a nech $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V(\mathbb{R})$ sú*

---

[8] Jörgen Pederson Gram (1850–1916) bol ďanskym expertom oblasti poisťovníctva. Determinant štvorcovej matice, ktorú budeme definovať vo vete 10.12 sa v literatúre zvykne nazývať Gramov determinant.

[9] Erhard Schmidt (1876–1959) vyučoval na niekoľkých popredných nemeckých univerzitách a bol študentom slávnych matematikov Hermanna Amandusa Schwartza (pozri stranu 80) a Davida Hilberta. Významne prispel k štúdiu integrálnych rovníc a parciálnych diferenciálnych rovníc a v rámci toho uviedol v roku 1907 metódu na nájdenie ortonormálnej bázy. V roku 1908 napísal prácu v ktorej sa zaoberal sústavami nekonečného počtu rovníc s nekonečne veľa neznámymi a v ktorej položil základy teórie Hilbertových priestorov, čo sú vektorové priestory nad $\mathbb{C}$ (niekedy nad $\mathbb{R}$) so skalárnym súčinom majúce určité špeciálne vlastnosti. V tejto práci použil svoju ortogonalizačnú metódu.

lineárne nezávislé. Potom existujú nenulové ortogonálne vektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ *v tvare*

$$(10.4)\qquad \begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= \alpha_2 + a_{21}\alpha_1, \\ \beta_3 &= \alpha_3 + a_{32}\alpha_2 + a_{31}\alpha_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n &= \alpha_n + a_{k,k-1}\alpha_{k-1} + \dots + a_{k1}\alpha_1 \end{aligned}$$

pre vhodné koeficienty $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Dôkaz Konštrukcia prebieha v n krokoch, pričom výsledkom k-teho kroku pre $k = 1, \dots, n$ je k-prvkový systém nenulových ortogonálnych vektorov $\beta_1, \dots, \beta_k$, ktoré možno vyjadriť v tvare (10.4).

V prvom kroku ($k = 1$) zvolíme $\beta_1 = \alpha_1$. Predpokladajme (indukčný predpoklad), že pre nejaké $1 \leqslant k \leqslant n-1$ máme zostrojený k-prvkový systém nenulových ortogonálnych vektorov $\beta_1, \dots, \beta_k$ ktoré možno vyjadriť v tvare (10.4). Ukážeme, že možno zostrojiť nenulový vektor β_{k+1}, ktorý je ortogonálny k vektorom $\beta_1, \dots, \beta_k$ a je v tvare (10.4). Vektor β_{k+1} budeme hľadať v tvare

$$(10.5)\qquad \beta_{k+1} = \alpha_{k+1} + b_{k+1,k}\beta_k + \dots + b_{k+1,1}\beta_1$$

kde $b_{k+1,k}, \dots, b_{k1}$ sú (zatiaľ neznáme) koeficienty z $\mathbb{R}$. Všimnime si, že vektor β_{k+1} bude (bez ohľadu na hodnoty koeficientov $b_{k+1,k}, \dots, b_{k+1,1}$) v tvare (10.4), pretože podľa indukčného predpokladu vektory $\beta_1, \dots, \beta_k$ sú v tvare (10.4). Určíme aké musia byť hodnoty koeficientov $b_{k+1,k}, \dots, b_{k+1,1}$ aby vektor β_{k+1} bol ortogonálny k vektorom $\beta_1, \dots, \beta_k$. Nech $i \in \{1, \dots, k\}$. Potom

$$\begin{aligned} s(\beta_{k+1}, \beta_i) &= s(\alpha_{k+1} + b_{k+1,k}\beta_k + \dots + b_{k+1,1}\beta_1, \beta_i) \\ &= s(\alpha_{k+1}, \beta_i) + b_{k+1,k}s(\beta_k, \beta_i) + \dots + b_{k+1,1}s(\beta_1, \beta_i) \end{aligned}$$

s využitím vlastností (2) a (3) z definície 10.1. Ak využijeme, že vektory $\beta_1, \dots, \beta_k$ sú ortogonálne, t.j. platí $s(\beta_j, \beta_i) = 0$ pre $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$, dostaneme

$$(10.6)\qquad s(\beta_{k+1}, \beta_i) = s(\alpha_{k+1}, \beta_i) + b_{k+1,i}s(\beta_i, \beta_i).$$

Aby vektor β_{k+1} bol ortogonálny k vektoru β_i, položme pravú stranu rovnosti (10.6) rovnú nule. Dostaneme rovnicu

$$(10.7)\qquad s(\alpha_{k+1}, \beta_i) + b_{k+1,i}s(\beta_i, \beta_i) = 0$$

s neznámou $b_{k+1,i}$, ktorú z nej ľahko vypočítame. Z rovníc (10.7) teda postupne pre $i = 1, \dots, k$ vypočítame všetky neznáme koeficienty $b_{k+1,k}, \dots, b_{k+1,1}$, ktoré potrebujeme na vytvorenie vektora β_{k+1}.

Ostáva ukázať, že vektor β_{k+1} je nenulový. Predpokladajme nepriamo, že $\beta_{k+1} = \mathbf{0}$. Dostaneme vyjadrenie

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \alpha_{k+1} + b_{k+1,k}\beta_k + \cdots + b_{k+1,1}\beta_1 \\ &= \alpha_{k+1} + c_{k+1,k}\alpha_k + \cdots + c_{k+1,1}\alpha_1,\end{aligned}$$

pre nejaké koeficienty $c_{k+1,j}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, keďže vektory $\beta_k, \ldots, \beta_1$ majú tvar (10.4). Vektor $\mathbf{0}$ sme teda vyjadrili ako lineárnu kombináciu vektorov $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$, pričom pri α_{k+1} je koeficient 1, čo je v spore s tým, že vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ sú lineárne nezávislé. □

10.8. Dôsledok *V konečnorozmernom euklidovskom vektorovom priestore má každý jeho nenulový podpriestor ortonormálnu bázu.*

Dôkaz Nech $(V(\mathbb{R}), s)$ je konečnorozmerný euklidovský vektorový priestor a nech T je jeho nenulový podpriestor s $\dim T = n$. Podľa vety 6.10 má T nejakú bázu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Podľa predchádzajúcej vety ju možno ortogonalizovať; nech $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sú obdržané nenulové ortogonálne vektory. Je ľahké presvedčiť sa, že potom vektory

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \ldots, \gamma_n = \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|}$$

sú tiež ortogonálne a majú dĺžku 1. Podľa vety 10.5 sú teda lineárne nezávislé a na základe dôsledku 6.16 tvoria ortonormálnu bázu priestoru T. □

10.9. Príklad Našou úlohou bude nájsť ortonormálnu bázu priestoru S riešení homogénnej sústavy z príkladu 7.10. Budeme uvažovať o štandardnom skalárnom súčine vo $V_6(\mathbb{R})$. V príklade 7.10 sme ukázali, že

$$S = [(0,1,0,0,0,0), (-2,0,1,0,1,0), (\frac{7}{3}, 0, -1, \frac{1}{3}, 0, 1)].$$

Aby sme sa vyhli zlomkom, zoberme za bázu priestoru S, ktorú budeme ortogonalizovať, vektory

$$\alpha_1 = (0,1,0,0,0,0),\ \alpha_2 = (-2,0,1,0,1,0),\ \alpha_3 = (7,0,-3,1,0,3).$$

V prvom kroku položme $\beta_1 = \alpha_1$. V druhom kroku budeme hľadať vektor β_2 ortogonálny k vektoru β_1 a to v tvare

$$\beta_2 = \alpha_2 + b_{21}\beta_1 = (-2,0,1,0,1,0) + b_{21}(0,1,0,0,0,0).$$

Vynásobením tejto rovnosti skalárne vektorom β_1 a položením $(\beta_2, \beta_1) = 0$ dostaneme

$$0 = (\alpha_2, \beta_1) + b_{21}(\beta_1, \beta_1) = 0 + b_{21},$$

odkiaľ máme $b_{21} = 0$. Teda $\beta_2 = \alpha_2 = (-2, 0, 1, 0, 1, 0)$. V treťom kroku budeme hľadať vektor β_3 ortogonálny k vektorom β_1 a β_2 a to v tvare

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \alpha_3 + b_{32}\beta_2 + b_{31}\beta_1 \\ &= (7, 0, -3, 1, 0, 3) + b_{32}(-2, 0, 1, 0, 1, 0) + b_{31}(0, 1, 0, 0, 0, 0).\end{aligned} \tag{10.8}$$

Vynásobením rovnosti (10.8) skalárne vektorom β_1 a tým, že položíme $(\beta_3, \beta_1) = 0$, $(\beta_2, \beta_1) = 0$ dostaneme

$$0 = (\alpha_3, \beta_1) + b_{31}(\beta_1, \beta_1) = b_{31},$$

odkiaľ vypočítame $b_{31} = 0$. Vynásobením rovnosti (10.8) skalárne vektorom β_2 a položením $(\beta_3, \beta_2) = 0$, $(\beta_1, \beta_2) = 0$ dostaneme

$$0 = (\alpha_3, \beta_2) + b_{32}(\beta_2, \beta_2) = -17 + 6b_{32},$$

odkiaľ vypočítame $b_{32} = \frac{17}{6}$. Teda

$$\beta_3 = (7, 0, -3, 1, 0, 3) + \frac{17}{6}(-2, 0, 1, 0, 1, 0) = (\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{6}, 1, \frac{17}{6}, 3).$$

Dostali sme ortogonálnu bázu $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Každý z vektorov β_i teraz predelíme jeho dĺžkou $\|\beta_i\|$ a výsledné vektory $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ budú tvoriť ortonormálnu bázu S:

$$\gamma_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0),\ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 0, 1, 0, 1, 0),\ \gamma_3 = \sqrt{\frac{6}{83}}(\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{6}, 1, \frac{17}{6}, 3).$$

■

10.10. Definícia *Ortogonálnym doplnkom podmnožiny M euklidovského vektorového priestoru $V(\mathbb{R})$ nazývame množinu*

$$M^{\perp} := \{\alpha \in V(\mathbb{R}) \mid (\forall \beta \in M)\ \alpha \perp \beta\}.$$

Prenechávame na čitateľa preveriť, že pre ľubovoľnú množinu $M \subseteq V(\mathbb{R})$ je $M^{\perp}$ podpriestorom $V(\mathbb{R})$.

Vektor α_T v nasledujúcom tvrdení nazývame *ortogonálnou projekciou* vektora α do podpriestoru T.

10.11. Dôsledok *Nech $(V(\mathbb{R}), s)$ je konečnorozmerný euklidovský vektorový priestor a nech T je ľubovoľný jeho podpriestor. Potom*

(1) *ľubovoľný vektor $\alpha \in V(\mathbb{R})$ možno vyjadriť v tvare*

$$\alpha = \alpha_T + \beta$$

kde $\alpha_T \in T$ a $\beta \in T^{\perp}$;

(2) *$V(\mathbb{R}) = T \oplus T^{\perp}$;*

(3) *$(T^{\perp})^{\perp} = T$.*

Dôkaz (1) Podpriestor T má podľa dôsledku 10.8 nejakú ortonormálnu bázu vektorov $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Ak $\alpha \in T$, tak máme vyjadrenie $\alpha = \alpha + \mathbf{0}$, t.j. tvrdenie platí. Nech $\alpha \notin T$. Potom vektory $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sú lineárne nezávislé. Podľa Gram-Schmidtovej ortogonalizačnej metódy (veta 10.7) existujú skaláry $a_{nn}, a_{n,n-1}, \ldots, a_{n1} \in \mathbb{R}$ tak, že vektor

$$\beta = \alpha + a_{nn}\alpha_n + a_{n,n-1}\alpha_{n-1} + \cdots + a_{n1}\alpha_1$$

je ortogonálny k vektorom $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, t.j. $\beta \in T^{\perp}$. Nech

$$\alpha_T := -a_{nn}\alpha_n - a_{n,n-1}\alpha_{n-1} - \cdots - a_{n1}\alpha_1.$$

Teda $\alpha = \alpha_T + \beta$ pre $\alpha_T \in T$ a $\beta \in T^{\perp}$.

(2) Podľa (1) máme $V(\mathbb{R}) = T + T^{\perp}$. Ostáva ukázať, že $T \cap T^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Nech $\alpha \in T \cap T^{\perp}$. Potom $s(\alpha, \alpha) = 0$, odkiaľ $\alpha = \mathbf{0}$ na základe vlastnosti (4) z definície 10.1.

(3) Inklúzia $T \subseteq (T^{\perp})^{\perp}$ je zrejmá. Skutočne, ak $\alpha \in T$ tak pre všetky $\beta \in T^{\perp}$ platí $s(\alpha, \beta) = 0$, odkiaľ $\alpha \in (T^{\perp})^{\perp}$. Aby sme dostali rovnosť, stačí ukázať, že $\dim T = \dim (T^{\perp})^{\perp}$. Na základe (2) a vety 8.6 však máme $\dim T + \dim(T^{\perp}) = \dim V(\mathbb{R})$ a analogicky, $\dim T^{\perp} + \dim (T^{\perp})^{\perp} = \dim V(\mathbb{R})$. Teda $\dim T = \dim(T^{\perp})^{\perp}$. □

10.12. Veta *Nech $(V(\mathbb{R}), s)$ je euklidovský vektorový priestor s bázou $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Nech $\mathbf{A} = [a_{ij}]_n$ je štvorcová matica stupňa n definovaná tak, že*

$$a_{ij} = s(\alpha_i, \alpha_j). \tag{10.9}$$

Potom pre ľubovoľné vektory $\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n$, $\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$ platí

$$s(\beta, \gamma) = (b_1, \ldots, b_n)\mathbf{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Dôkaz Využijúc vlastnosti (2) a (3) z definície 10.1 dostávame

$$\begin{aligned} s(\beta, \gamma) &= s\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i c_j s(\alpha_i, \alpha_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i a_{ij} c_j. \end{aligned}$$

Teda platí vyššie uvedený vzorec. □

Je zrejmé, že báza $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ euklidovského vektorového priestoru so skalárnym súčinom s je ortonormálna práve vtedy, keď pre všetky $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$s(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0, & \text{ak } i \neq j \\ 1, & \text{ak } i = j \end{cases}$$

t.j. keď matica $\mathbf{A}$ vo vete 10.12 je rovná jednotkovej matici $\mathbf{I}_n$.

Z predchádzajúcej vety tak dostávame ihneď nasledujúci dôsledok.

10.13. Dôsledok *Nech* $(V(\mathbb{R}), s)$ *je euklidovský priestor s bázou* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. *Potom pre ľubovoľné vektory* $\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n$, $\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$ *platí*

$$s(\beta, \gamma) = b_1c_1 + \cdots + b_nc_n$$

práve vtedy, keď báza $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *je ortonormálna.*

10.14. Príklad V priestore $V_3(\mathbb{R})$ nájdeme predpis pre skalárny súčin g vzhľadom na ktorý vektory

$$\alpha_1 = (0, 1, 2),\ \alpha_2 = (1, 1, 1),\ \alpha_3 = (1, 0, 0)$$

tvoria ortonormálnu bázu $V_3(\mathbb{R})$.

Nech (b_1, b_2, b_3) a (c_1, c_2, c_3) sú súradnice vektorov $\beta, \gamma \in V_3(\mathbb{R})$ vzhľadom na jednotkovú bázu $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$. Podľa vety 10.12 možno predpis pre hľadaný skalárny súčin g vyjadriť vzorcom $g(\beta, \gamma) = (b_1, b_2, b_3)\mathbf{A}(c_1, c_2, c_3)^T$, kde matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je definovaná tak, že $a_{ij} = g(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ pre $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Pretože platí

$$\varepsilon_1 = \alpha_3,\ \varepsilon_2 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3,\ \varepsilon_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3,$$

jednotkové vektory ε_i majú vzhľadom na ortonormálnu bázu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ súradnice

$$\varepsilon_1 = (0, 0, 1),\ \varepsilon_2 = (-1, 2, -2),\ \varepsilon_3 = (1, -1, 1).$$

Pretože báza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ je vzhľadom na g ortonormálna, podľa dôsledku 10.13 platí

$$\begin{aligned}
a_{11} &= g(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = \ \ 1,\ a_{12} = g(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -2,\ a_{13} = g(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = \ \ 1\\
a_{21} &= g(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = -2,\ a_{22} = g(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = \ \ 9,\ a_{23} = g(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = -5\\
a_{31} &= g(\varepsilon_3, \varepsilon_1) = \ \ 1,\ a_{32} = g(\varepsilon_3, \varepsilon_2) = -5,\ a_{33} = g(\varepsilon_3, \varepsilon_3) = \ \ 3.
\end{aligned}$$

(Prvok a_{23} sme napríklad vypočítali ako $g(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 = -5$.) Teda hľadaný predpis pre skalárny súčin g je daný vzorcom

$$\begin{aligned}
g(\beta, \gamma) &= (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ -2 & 9 & -5\\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{pmatrix}\\
&= b_1c_2 - 2b_1c_2 + b_1c_3 - 2b_2c_1 + 9b_2c_2 - 5b_2c_3 + b_3c_1 - 5b_3c_2 + 3b_3c_3,
\end{aligned}$$

pre ľubovoľné vektory $\beta = (b_1, b_2, b_3), \gamma = (c_1, c_2, c_3 \in V_3(\mathbb{R})$. ■

10.15. Definícia *Nech* $(V(\mathbb{R}), s)$ *a* $(V'(\mathbb{R}), s')$ *sú euklidovské vektorové priestory. Bijektívne lineárne zobrazenie* $\varphi : V(\mathbb{R}) \to V'(\mathbb{R})$ *nazývame izomorfizmom euklidovských priestorov* $(V(\mathbb{R}), s)$ *a* $(V'(\mathbb{R}), s')$, *ak zachováva skalárny súčin, t.j. platí*

$$(\forall \alpha, \beta \in V(\mathbb{R}))\ s(\alpha, \beta) = s'(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)).$$

Nasledujúca veta je sľúbeným vyvrcholením nášho štúdia vektorových priestorov. Hovorí, že konečnorozmerné euklidovské vektorové priestory sú z algebraického hľadiska “nerozlíšiteľné” od euklidovských priestorov $V_n(\mathbb{R})$ n-tíc reálnych čísel so štandardným skalárnym súčinom.

10.16. Veta *Každé dva konečnorozmerné euklidovské vektorové priestory sú izomorfné.*

Dôkaz Nech $(V(\mathbb{R}), s)$ a $(V'(\mathbb{R}), s')$ sú konečnorozmerné euklidovské vektorové priestory. Nech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ je ortonormálna báza $V(\mathbb{R})$ a $\beta_1, \dots, \beta_n$ je ortonormálna báza $V'(\mathbb{R})$. Podľa Základnej vety o lineárnych zobrazeniach 9.4 existuje práve jedno lineárne zobrazenie $\varphi : V(\mathbb{R}) \to V'(\mathbb{R})$ tak, že $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$ pre $i = 1, \dots, n$. Pretože $\beta_1, \dots, \beta_n$ je báza $V'(\mathbb{R})$, podľa vety 9.16 je lineárne zobrazenie φ bijektívne, t.j. je izomorfizmom $(V(\mathbb{R}), s)$ a $(V'(\mathbb{R}), s')$ ako vektorových priestorov. Nech $\gamma, \delta \in V(\mathbb{R})$ sú ľubovoľné vektory, $\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n,\ \delta = d_1\alpha_1 + \cdots + d_n\alpha_n$. Potom

$$\varphi(\gamma) = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n,\ \varphi(\delta) = d_1\beta_1 + \cdots + d_n\beta_n,$$

a teda využijúc dvakrát dôsledok 10.13 dostávame

$$s(\gamma, \delta) = c_1d_1 + \dots c_nd_n = s'(\varphi(\gamma), \varphi(\delta)),$$

čo bolo treba dokázať. $\square$

10.17. Dôsledok *Každý euklidovský vektorový priestor $(V(\mathbb{R}), s)$ dimenzie n je izomorfný s priestorom $V_n(\mathbb{R})$ n-tíc reálnych čísel so štandardným skalárnym súčinom.*

Použitá literatúra

1. S.C. Althoen a R. McLaughlin, *Gauss-Jordan reduction: A brief history*, MAA Monthly **94** (1987), 130–142.
2. J.L. Chabert a kol., *A history of Algorithms (From the Pebble to the Microchip)*, Springer-Verlag, 1999.
3. T. Katriňák, M. Gavalec, E. Gedeonová a J. Smítal, *Algebra a teoretická aritmetika* **1**, Alfa, Bratislava, 1985.
4. B. Kolman, *Introductory linear algebra with applications*, Fifth edition, Macmillan Publishing Company, New York, 1993.
5. S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1986.
6. M.B. Powell, *Linear Algebra* **1**, Mathematical Institute, University of Oxford, Lecture Notes, 1995.

Ďalšia odporúčaná literatúra

7. J. Bečvář, *Úvod do algebry*, SPN, Praha, 1984.
8. L. Bican a kol., *Sbírka úloh z algebry pro učitelské studium*, SPN, Praha, 1984.
9. A. Bicanová, T. Kepka, E. Nováková, *Sbírka úloh, příkladů a cvičení z algebry*, SPN, Praha, 1984.
10. G. Birkhoff, T. C. Bartee, *Aplikovaná algebra*, Alfa, Bratislava, 1981.
11. G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Prehľad modernej algebry*, Alfa, Bratislava, 1979.
12. A. Haviar, P. Hrnčiar, P. Klenovčan *Algebra* **I.**, Pedagogická fakulta, Banská Bystrica, 1991, skriptá.
13. M. Haviar, P. Klenovčan *Algebra* **I.**, *Algebraické štruktúry*, Pedagogická fakulta UMB, Banská Bystrica, 1998, skriptá.
14. T.W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **73**, Springer-Verlag, 1981.
15. P. Klenovčan, A. Haviar, M. Haviar, *Úvod do štúdia matematiky*, Pedagogická fakulta UMB, Banská Bystrica, 1996, skriptá.
16. P. Klenovčan *Algebra* **II.**, *Polynomická algebra*, Pedagogická fakulta UMB, Banská Bystrica, 2000, skriptá (zadané).
17. M. Kolibiar a kol., *Vybrané partie z matematiky* **I.**, UK, Bratislava. 1979, skriptá.
18. L. C. Larson, *Metódy riešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava, 1990.
19. L. Procházka a kol., *Algebra*, Academia, Praha, 1990.
20. J. Weil, *Rozpracované řešení úloh z vyšší algebry*, Academia, Praha, 1987.

Index