

PREDMETY A TÉZY NA RIGORÓZNE SKÚŠKY

Učiteľstvo matematiky

POVINNÉ PREDMETY

Teória vyučovania matematiky

Vyučovanie aritmetiky a teórie čísel: Zavedenie pojmu číslo a postupné rozširovanie číselných oborov v školskej praxi. Vlastnosti operácií a usporiadania v jednotlivých číselných oboroch. Deliteľnosť v obore prirodzených a celých čísel, znaky deliteľnosti. Zapisovanie čísel v dekadической číselnej sústave a v iných číselných sústavách. Objasnenie metódy matematickej indukcie a jej využitie pri dôkazoch. Zavedenie komplexných čísel, algebrický a goniometrický tvar, Moivrova veta. Peanove axiómy aritmetiky prirodzených čísel. Konštrukcia celých a racionálnych čísel z prirodzených čísel, konštrukcia reálnych čísel (Dedekindove rezy), konštrukcia komplexných čísel z reálnych.

Vyučovanie algebry: Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou matic a determinantov, Gaussova eliminačná metóda a Cramerovo pravidlo. Operácie s maticami a determinantami, výpočet determinantov a inverznej matice. Vektorové priestory, definícia a príklady, súvis so sústavami lineárnych rovníc a maticami. Algebraické štruktúry, definícia a príklady grúp, súvis so školskou praxou pri riešení jednoduchých rovníc. Grupy symetrií geometrických útvarov a grupy permutácií, Cayleyho veta. Definícia a príklady okruhov, číselné okruhy v školskej praxi. Premenná a konštanta, zavedenie mnohočlenov a ich úpravy. Okruhy polynómov a polynomických funkcií, ich súvis a rozdiel. Deliteľnosť, rozklady a korene polynómov, Bézoutova veta. Polynómy nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, Eiseinsteinovo kritérium. Základná veta algebry, riešenie algebraických rovníc, kvadratické rovnice nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Rôzne typy rovníc v stredoškolskej matematike (iracionálne, exponenciálne, logaritmické, goniometrické) a metódy ich riešenia. Ekvivalentné a dôsledkové úpravy. Zavedenie nerovnice a sústavy nerovnic. Kvadratické a iracionálne nerovnice a nerovnice s neznámou v menovateli, metódy ich riešenia.

Vyučovanie planimetrie. Základné planimetrické pojmy, ich zavedenie. Trojuholník (triedenie, vlastnosti ťažníc, výšok, stredných priecok, vpísaná a opísaná kružnica). Štvoruholníky (triedenie, základné poznatky). Kružnica a kruh, dotýčnica kružnice. Obsahy a obvody rovinných útvarov. Zhodné zobrazenia, rovnol'ahlosť a podobné zobrazenia, skladanie osových súmerností. Množiny bodov danej vlastnosti (Thalesova kružnica, veta o stredovom a obvodovom uhle). Konštrukčné úlohy, postup pri riešení. Zavedenie a dôkazy Pythagorovej, Thalesovej a Euklidových viet a ich využitie pri riešení úloh. Sínusová a kosínusová veta a ich využitie.

Vyučovanie stereometrie: Základné pojmy zo stereometrie v učive SŠ. Vzájomná poloha priamok, rovín. Kritériá rovnobežnosti a kolmosti priamky a roviny, dvoch rovín. Základné vety rovnobežného premietania. Obraz telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní, určenie rovinného rezu telesa, priesečnice dvoch rovín, priesečníka priamky s rovinou. Výpočet objemu a povrchu telies.

Vyučovanie analytickej geometrie: Súradnice bodu, vektora v rovine a priestore, operácie s vektormi. Parametrické vyjadrenie priamky a roviny, všeobecná rovnica priamky v rovine a roviny v trojrozmernom priestore, normálový vektor. Vzájomná poloha dvoch priamok, priamky a roviny, dvoch rovín. Polohové a metrické úlohy v rovine a v priestore. Kužeľosečky a ich ohniskové definície. Všeobecná rovnica kužeľosečky.

Vyučovanie matematickej analýzy: Zavedenie pojmu funkcia, definičný obor a obor hodnôt funkcií. Grafy funkcií. Základné vlastnosti funkcií, prostá funkcia, inverzná funkcia. Rozdelenie elementárnych funkcií na podtriedy. Postupnosť, zavedenie limity postupnosti,

kritéria konvergenzie postupnosti. Zavedenie limity funkcie, vlastná a nevlastná limita. Zavedenie derivácie funkcie v bode a derivácie ako funkcie. Spojitosť a derivácia funkcie. Znenie viet o prírastku funkcie: Rolleova, Lagrangeova, Cauchyho a ich súvis. Pojem primitívnej funkcie a neurčitého integrálu, metódy integrovania. Zavedenie určitého integrálu, Newtonov-Leibnitzov vzorec. Aplikácie určitého integrálu: výpočet obsahov plôch, dĺžky kriviek, objemu rotačných telies. Nekonečné číselné rady, kritériá ich konvergenzie, integrálne kritérium.

Vyučovanie kombinatoriky, pravdepodobnosti a matematickej štatistiky: Kombinatorika (organizácia súboru, permutácie, variácie, kombinácie bez opakovania a s opakovaním). Pravdepodobnosť (šanca a porovnávanie šancí, pravdepodobnosť, podmienená pravdepodobnosť, a niektoré jej vlastnosti, pravdepodobnosť okolo nás (napr. genetika, dedičnosť). Matematická štatistika (štatistický súbor, znak, popisná štatistika – priemer, modus, medián, rozptyl, grafické znázornenie, hypotézy, testovanie hypotéz.).

Teória pravdepodobnosti

Pravdepodobnostný priestor: Interpretácia pravdepodobnosti, Definícia pravdepodobnostného priestoru, Motivácia a zdôvodnenie definície sigma-algebry, Semialgebra, algebra, sigma-algebra príklady, Veta o rozšírení jej predpoklady a implikácie, Konštrukcia uniformného rozdelenia pomocou vety o rozšírení,

Náhodná premenná: Definícia náhodnej premennej, Nezávislosť udalostí, súboru udalostí, náhodných premenných a súboru náhodných premenných, Veta o spojitosti pravdepodobnosti. Stredná hodnota: Konštrukcia strednej hodnoty pre jednoduchú, nezápornú a všeobecnú náhodnú premennú, Vlastnosti strednej hodnoty, Variancia, Kovariancia, Korelácia, Veta o monotónnej konvergencii, Súvis strednej hodnoty s integrálom.

Nerovnosti a konvergenca: Nerovnosti: Markovova, Čebyševova, Cauchy-Schwartzova, Jensenova. Typy konvergencií a vzťahy medzi nimi (s kontrapríkladmi), Slabý zákon o veľkých číslach, Silný zákon o veľkých číslach.

Distribúcie náhodných premenných: Rôzne verzie úplného popisu pravdepodobnostného správania náhodnej premennej: Distribúcia, Kumulatívna distribučná funkcia a funkcia hustoty. Slabá konvergenca, Charakteristická funkcia, jej vlastnosti a využitie na výpočet momentov. Centrálna limitná veta a jej využitie.

Podmienená pravdepodobnosť: Definícia podmienenej pravdepodobnosti a podmienenej strednej hodnoty a ich vlastnosti. Rozklad variancie.

[1] Rosenthal, Jeffrey S. A first look at rigorous probability theory. World Scientific Publishing Company, 2006.

[2] Evans, Michael J., and Jeffrey S. Rosenthal. Probability and statistics: The science of uncertainty. Macmillan, 2004.

Matematická štatistika

Normálne rozdelenie.

Náhodný výber (základné výberové charakteristiky a ich vlastnosti pri výbere z normálneho rozdelenia).

Testy hypotéz a intervaly spoľahlivosti v prípade normálneho rozdelenia, (jednovýberový, dvojvýberový a párový t-test, test rovnosti rozptylov).

Výberový korelačný koeficient a test jeho nulovosti.

Štatistika v pedagogickom výskume.

[1] Zvára, Karel, and Josef Štěpán. Pravděpodobnost a matematická statistika. Veda, 2002.

[2] Freedman, David, Robert Pisani, and Roger Purves. "Statistics (international student edition)." Pisani, R. Purves, 4th edn. WW Norton & Company, New York (2007).

Matematická analýza

Základné vlastnosti reálnej osi. Suprémum a infimum. Veta o pokrytí, veta o existencii hromadného bodu, princíp do seba zapadajúcich intervalov.

Reálne funkcie – ohraničenosť, monotónnosť, konvexnosť, zložené funkcie, inverzné funkcie. Elementárne funkcie, ich zavedenie a ich vlastnosti (aj limity v dôležitých bodoch a spojitosť). Grafy elementárnych funkcií.

Limita postupnosti vlastná a nevlastná. Jednoznačnosť limity. Vety o limitách – najmä algebra limít, veta o limite troch postupností, niektoré dôležité limity, výpočet limít typu „0/0“ a niektorých ďalších typov, limitné prechody.

Limita funkcie vlastná a nevlastná, limity v nevlastných bodoch. Jednoznačnosť limity. Ekvivalencia medzi Cauchyho a Heineho definíciou limity. Spojitosť funkcie v bode. Ekvivalencia medzi definíciou spojitosti v bode a Heineho definíciou spojitosti v bode.

Vety o limitách funkcií – najmä algebra limít, veta o limite troch funkcií, veta o limite zloženej funkcie. Výpočet limít pomocou L'Hopitalovho pravidla.

Monotónne postupnosti. Pojem vybranej postupnosti (podpostupnosti). Existencia monotónnych podpostupností číselných postupností. Limity monotónnych postupností. Číslo e ako limita postupnosti. Limity monotónnych funkcií.

Spojitosť funkcie v bode a na intervale. Vety o spojitých funkciách – najmä algebra spojitých funkcií, kompozícia spojitých funkcií, Darbouxova vlastnosť spojitých funkcií, spojitosť funkcie a inverznej funkcie.

Derivácia funkcie, jej geometrický a fyzikálny význam. Súvis medzi existenciou derivácie a spojitosťou.

Vety umožňujúce výpočet derivácií (algebra derivácií, derivácia inverznej funkcie a derivácia zloženej funkcie, technika logaritmického derivovania). Derivácie základných elementárnych funkcií.

Základné vety diferenciálneho počtu – význam znamienka derivácie v bode, súvis medzi deriváciou v bode a lokálnym extrémom v bode, Rolleova veta a Lagrangeova veta o prírastku funkcie.

Využitie diferenciálneho počtu pri vyšetrovaní priebehu funkcie (význam prvej a druhej derivácie) a pri hľadaní lokálnych a globálnych extrémov funkcií.

Antiderivácia (primitívna funkcia) a neurčitý integrál. Základné vlastnosti neurčitého integrálu. Metódy integrovania a technika výpočtu neurčitých integrálov.

Určitý integrál – definícia a jeho vlastnosti. Kritériá integrovateľnosti. Dôležité triedy integrovateľných funkcií.

Leibnizov-Newtonov vzorec, technika výpočtu integrálov. Aplikácie určitého integrálu.

Číselné rady. Kritériá konverencie.

[1] VESELÝ, J.: Matematická analýza pro učitele 1, Matfyzpress Praha, 1997.

[2] VESELÝ, J.: Matematická analýza pro učitele 2, Matfyzpress Praha, 1997.

Algebra a lineárna algebra

Binárna relácia, inverzná a zložená relácia. Vlastnosti. Relácia ekvivalencie a jej súvislosť s rozkladom množiny. Zobrazenie, injektívne a surjektívne zobrazenie, inverzné zobrazenie.

Binárne operácie a ich vlastnosti. Grupoidy.

Pole komplexných čísel, konštrukcia. Algebraický a goniometrický tvar komplexného čísla, Moivreova veta.

Vektorový priestor, definícia a príklady. Podpriestor, podpriestor generovaný množinou vektorov.

Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov. Steinitzova veta a jej dôsledky. Báza a dimenzia.

Matice, okruh matíc, vektorový priestor matíc, vlastnosti. Elementárne riadkové operácie, redukovaný trojuholníkový tvar matice. Hodnota matice.

Determinant matice, jeho výpočet. Laplaceov rozvoj determinantu. Vlastnosti determinantov. Použitie determinantov.

Homogénna sústava lineárnych rovníc, podpriestor riešení a jeho dimenzia. Nájdenie homogénnej sústavy, ktorej riešením je daný podpriestor.

Nehomogénne sústavy lineárnych rovníc, ekvivalentné úpravy. Frobeniova veta, Cramerovo pravidlo.

Lineárne zobrazenie, matica lineárneho zobrazenia. Súčin matíc a skladanie lineárnych zobrazení. Inverzná matica a inverzné lineárne zobrazenie. Izomorfizmus.

Grupa, podgrupa, podgrupa generovaná množinou. Rád prvku, cyklická grupa. Lagrangeova veta jej dôsledky.

Podgrupa, rozklad grupy podľa podgrupy. Normálna podgrupa, faktorová grupa. Vzťahy medzi normálnymi podgrupami a kongruenciami na grupe.

Okruhy, príklady okruhov, podokruhy. Rád prvku v okruhu, charakteristika okruhu. Izomorfizmus okruhov.

Obory integrity, telesá a polia, súvislosti a príklady. Obor integrity celých čísel.

Okruh polynómov jednej neurčitej a okruh polynomických funkcií jednej premennej. Ich súvislosti a rozdiely. Deliteľnosť polynómov, vlastnosti. Veta o delení so zvyškom, Euklidov algoritmus.

Rozklady polynómov, ireducibilné a reducibilné polynómy. Najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok polynómov cez rozklady.

Korene polynomických funkcií, Bézoutova veta. Využívanie Hornerovej schémy. Základná veta algebry.

Polynómy s komplexnými, reálnymi a celočíselnými koeficientami. Eisensteinovo kritérium.

Derivácie polynómov, separácia koreňov. Taylorov rozvoj polynómu.

Polynómy viacerých neurčitých. Symetrické a základné symetrické polynómy. Viétove vzorce.

Binomické rovnice, rovnice druhého a tretieho stupňa s komplexnými koeficientami, recipročné rovnice. Neriešiteľnosť algebraických rovníc stupňa aspoň 5 v radikáloch.

[1] KATRIŇÁK, T. a kol.: Algebra a teoretická aritmetika I, Alfa, Bratislava, 1985.

[2] HAVIAR, M., KLENOVČAN, P.: Basic Algebra for future teachers, Belianum, Banská Bystrica, 2016.

Geometria

Definovanie sekundárnych pojmov v planimetrii (polpriamka, opačná polpriamka, polrovina, opačná polrovina, konvexný uhol, trojuholník, ...). Funkcia miery, princíp merania dĺžky úsečky, Jordanova teória miery, odvodenie vzťahov pre výpočet obsahu základných útvarov v planimetrii (obsah štvorca, obdĺžnika, trojuholníka, rovnobežníka, lichobežníka, deltoid, kruhu). Zhodné zobrazenia v euklidovskej rovine – definície, vlastnosti. Zloženie dvoch a troch osových súmerností, grupa zhodností euklidovskej roviny. Rovnoľahlosť – definície, vlastnosti. Zloženie dvoch rovnoľahlostí. Množiny bodov danej vlastnosti – os úsečky, os uhla ako množiny bodov danej vlastnosti, Talesova kružnica, množina všetkých bodov, z ktorých danú úsečku vidíme pod daným uhlom, Apolloniova kružnica. Konštrukčné úlohy v planimetrii s využitím zhodných zobrazení, s využitím rovnoľahlosti, s využitím množín bodov danej vlastnosti. Geometria trojuholníka – odvodenie vlastností základných jeho prvkov (výšky v trojuholníku, ťažnice, stredná priečka, ortocentrum, ťažisko, stred opísanej a stred vpísanej kružnice trojuholníka).

Definovanie sekundárnych pojmov v stereometrii (polpriestor, opačný polpriestor, vrstva, klin, kocka, kváder, sféra, guľa, rotačný valec, rotačný kužeľ). Vzájomná poloha dvoch priamok, priamky a roviny, dvoch rovín v trojrozmernom euklidovskom priestore. Uhol dvoch priamok, priamky a roviny, dvoch rovín v trojrozmernom euklidovskom priestore. Kritériá rovnobežnosti a kritériá kolmosti priamky a roviny, dvoch rovín. Konfigurácie troch navzájom rôznych rovín v trojrozmernom euklidovskom priestore, odvodenie viet súvisiacich s týmito konfiguráciami.

Ravnobežné premietanie, základné vety ravnobežného premietania. Voľné ravnobežné premietanie – určenie rovinného rezu hranatých telies, spôsob určenia priesečnice dvoch rovín, priesečníka priamky s rovinou, prienika priamky s telesom. Prička mimobežiek prechádzajúca daným bodom, prička mimobežiek daným smerom.

Afinný priestor, lineárna súradnicová sústava, afinný podpriestor a jeho parametrické vyjadrenie, vzájomná poloha afinných podpriestorov. Nadrovina, jej všeobecná rovnica. Euklidovský priestor, skalárny súčin vektorov, kolmosť vektorov, norma vektora, vlastnosti normy, ortogonálne a ortonormálne vektory. Euklidovský podpriestor, kartézska súradnicová sústava, vzdialenosť dvoch bodov, vzdialenosť bodu od euklidovského podpriestoru, špeciálne vzdialenosť bodu od nadroviny – odvodenie vzťahu pre výpočet tejto vzdialenosti. Kolmé euklidovské podpriestory a totálne kolmé euklidovské podpriestory.

Kuželosečka ako rovinný rez kuželovej (valcovej) plochy. Kuželosečka ako množina bodov danej vlastnosti. Všeobecná rovnica kuželosečky, geometrický význam veľkého a malého diskriminantu kuželosečky. Vrcholová rovnica paraboly, stredová rovnica elipsy a hyperboly. Regulárne a singulárne kuželosečky.

VOLITEĽNÉ PREDMETY

Metrické priestory

Metrika a metrický priestor. Priemer množiny. Ohraničená množina. Izometria. Otvorené množiny. Operácie na systéme otvorených množín. Okolie bodu v metrickom priestore. Izolovaný bod. Diskrétny metrický priestor. Konvergencia postupnosti bodov v metrickom priestore. Uzavreté množiny. Operácie na systéme uzavretých množín. Uzáver množiny. Hromadný bod množiny. Spojitosť metriky. Spojitosť zobrazenia medzi metrickými priestormi, jej rôzne ekvivalentné formulácie. Cauchyovské postupnosti. Úplný metrický priestor. Rôzne ekvivalentné vyjadrenia úplnosti. Úplnosť podpriestoru. Rovnomerne spojitý zobrazenia medzi metrickými priestormi. Veta o rozšíriteľnosti rovnomerne spojitých zobrazení. Priestor spojitých zobrazení a jeho úplnosť. Zúplnenie metrického priestoru. Separabilný metrický priestor. Rôzne ekvivalentné vyjadrenia separabilnosti. Kardinalita separabilných priestorov. Kompaktný metrický priestor. Rôzne ekvivalentné vyjadrenia kompaktnosti. Separabilnosť a úplnosť kompaktných priestorov. Kompaktnosť podpriestoru. Veta o Lebesgueovom čísle.

[1] I. Kaplansky, Set theory and metric spaces, Chelsea 1972.

[2] T. Šalát, Metrické priestory, Alfa 1981.

Metódy riešenia matematických úloh

Praktické činnosti učiteľa matematiky - príprava vyučovacej hodiny, plánovanie času, práca s tabuľou, domáce úlohy, problematika hodnotenia, využitie výpočtovej techniky pri vyučovaní. Stratégie vo vyučovaní matematiky. Matematizácia reálnych situácií. Heuristiky riešenia matematických problémov. Riešenie úloh pre prácu s talentami - riešenie úloh matematickej olympiády. Dôkazové metódy. Lineárne rovnice a nerovnice. Nelineárne rovnice a nerovnice. Postupnosti a funkcie (polynomické, exponenciálne, logaritmické, goniometrické). Relácie a operácie vo vyučovaní matematiky. Algebraické štruktúry a ich modely. Metodologické aspekty lineárnej algebry, planimetrie a stereometrie. Úlohy s parametrami. Úlohy z diskkrétnej matematiky. Kombinatorika. Teória čísel. Planimetria – zhodné a podobné zobrazenia, trojuholník a mnohoúholník, kružnica. Stereometria – výpočtové, konštrukčné, dôkazové úlohy. Analytická geometria.

[1] Larsen, L.C.: Metódy riešenia matematických problémov, Alfa, Bratislava, 1990.