

Ergodická teória 1

Verzia zo 4. februára 2022

Záznam prednášok

Ľubomír Snoha

Obsah

Predhovor	5
1 Úvodné pojmy	7
1.1 Dynamický systém, trajektória, orbita	7
1.2 Frekvencia návštev bodu x do množiny A a pojem ergodicnosti	11
1.3 Fyzikálna motivácia ergodickej teórie	13
1.4 Cvičenia a projekty	16
2 Rovnomerne rozdelené postupnosti	17
2.1 Frekvencia návštev postupnosti bodov do množiny	17
2.2 Rovnomerne rozdelené postupnosti a Jordanova miera	18
2.3 Rovnomerne rozdelené postupnosti a Riemannov integrál	23
2.4 Rovnomerne rozdelené postupnosti modulo 1	28
2.5 Weylovo kritérium pre rovnomernú rozdelenosť modulo 1	30
2.6 *O rovnomerne rozdelených postupnostiach v $\mathbb{R}^s$	34
2.7 Cvičenia a projekty	36
3 Niektoré pojmy z teórie miery	39
3.1 σ -algebry a miery	39
3.2 Zúplnenie miery	41
3.3 Borelovské množiny a lebesguovsky merateľné množiny	42
3.4 Postačujúca podmienka pre merateľnosť zobrazenia	44
3.5 Atómy	45
3.6 Výroba nových mier zo starých	48
3.7 Jednoznačnosť mier	50
3.8 Absolútne spojité miery	52
3.9 Push-forward miery a integrovanie podľa nej	55
3.10 Cvičenia a projekty	63
4 Mieru zachovávajúce systémy	65
4.1 Invariantné miery	65
4.2 Dynkinova veta a overovanie invariantnosti mier	70
4.3 Overovanie invariantnosti mier pomocou integrálov	77
4.4 Absolútne spojité invariantné miery pre zobrazenia intervalu	81
4.5 Invariantnosť Lebesguovej miery pre niektoré C^1 -difeomorfizmy	83
4.5.1 C^1 -difeomorfizmy zachovávajúce Lebesguovu mieru	83
4.5.2 Lineárne zobrazenia zachovávajúce Lebesguovu mieru	85
4.6 Cvičenia a projekty	89

5	Rekurentnosť	93
5.1	Počet návratov. Poincarého veta o rekurencii	93
5.2	*Horná frekvencia návratov v priestore s konečnou mierou	97
5.3	Kacova veta	98
5.4	Cvičenia a projekty	102
6	Invariantné množiny a invariantné funkcie	105
6.1	Invariantné množiny	105
6.2	Invariantné funkcie	108
6.3	Cvičenia a projekty	111
7	Ergodičnosť	113
7.1	Definícia ergodičnosti. Súvis s invariantnými množinami a invariantnými funkciami	113
7.2	Ergodičnosť a metrická tranzitívnosť	117
7.3	Kacova veta pre ergodické systémy	120
7.4	Cvičenia a projekty	122
8	Dôkazy ergodičnosti	125
8.1	Lebesguova veta o hustote a dôkazy ergodičnosti	125
8.2	Fourierove rady a dôkazy ergodičnosti	130
8.2.1	Fourierove rady pre funkcie na kružnici	130
8.2.2	Fourierove rady pre funkcie na tórise	135
8.2.3	Dôkazy ergodičnosti pomocou Fourierových radov	136
8.3	Cvičenia a projekty	139
9	Birkhoffova ergodická veta	141
9.1	Birkhoffova ergodická veta	141
9.2	Cvičenia a projekty	143
10	Dôsledky Birkhoffovej ergodickej vety	145
10.1	Frekvencie návštev	145
10.2	Ďalšie ekvivalentné definície ergodičnosti	146
10.3	*Rovnomerná rozdelenosť a ergodičnosť	149
10.3.1	Rovnomerne rozdelené postupnosti v kompaktoch	149
10.3.2	Ergodičnosť v kompaktoch ako rovnomerná rozdelenosť trajektórií	150
10.4	Cvičenia a projekty	151
11	Aplikácie Birkhoffovej ergodickej vety	153
11.1	b -adické rozvoje čísel. Borelova veta o normálnych číslach	153
11.2	Rozvoje čísel do reťazových zlomkov	155
11.2.1	O reťazových zlomkoch	156
11.2.2	Súvis reťazových zlomkov s Gaussovým zobrazením	158
11.2.3	Aplikácia: Vlastnosti reťazových zlomkov	161
11.3	Cvičenia a projekty	162

Predhovor

Toto je učebný text k predmetu Ergodická teória 1 na Katedre matematiky FPV UMB. Vznikol počas autorových prednášok v letnom semestri 2017/18, v zimnom semestri 2019/20 a v zimnom semestri 2021/22.

Text si kladie za cieľ podrobne vysvetliť niekoľko málo základných pojmov a tvrdení ergodickej teórie, namiesto prebratia čo najväčšieho rozsahu látky. Teda riadime sa heslom “radšej menej, ale poriadne”. Kapitoly a podkapitoly označené hviezdikou presahujú rozsah povinného učiva a sú nepovinné.

Text sa neobmedzuje na ergodickú teóriu na pravdepodobnostných priestoroch. Pripúšťame aj nekonečnú mieru, aj keď to znamená isté komplikácie. Takisto automaticky nepredpokladáme, že v uvažovaných systémoch sa zachováva miera, aj keď to znamená ďalšie komplikácie. Text sa samozrejme dá ľahko prispôbiť (zjednodušiť), ak si prednášajúci/študent želá pracovať len s mieru zachovávajúcimi systémami na pravdepodobnostných priestoroch, ako je to vo väčšine základných učebníc ergodickej teórie.

Na druhej strane, nezavádzame nesingulárne zobrazenia a v niektorých tvrdeniach predpokladáme, že T zachováva mieru, hoci by stačilo predpokladať, že T zachováva množiny nulovej miery.

Akékoľvek pripomienky, kritické poznámky, objavené chyby alebo návrhy k tomuto textu posielajte na emailovú adresu Lubomir.Snoha@umb.sk.

Banská Bystrica, 2022

Ľubomír Snoha

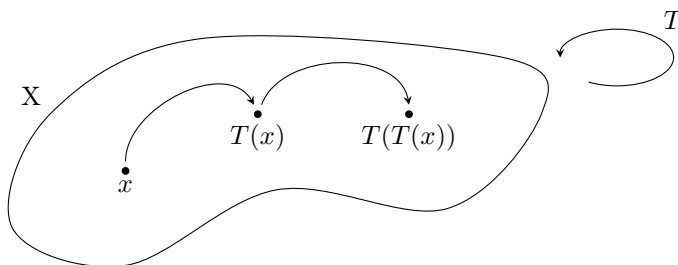
Kapitola 1

Úvodné pojmy

1.1 Dynamický systém, trajektória, orbita

Nech X je množina a $T: X \rightarrow X$ zobrazenie. Potom dvojicu (X, T) nazývame *dynamický systém*. Obvykle predpokladáme, že $X \neq \emptyset$, bez toho, aby sme to explicitne povedali.¹ Množina X sa niekedy nazýva *fázový priestor* daného dynamického systému.

V dynamickom systéme (X, T) je “dynamika” v tom, že si predstavujeme, že sa body pohybujú, skáču. Bod $x \in X$ môžeme zobrazit’ zobrazením T , dostaneme bod $T(x)$. Ten môžeme znovu zobrazit’ a dostaneme bod $T(T(x))$.² Postupujúc takto ďalej, dostaneme body $T(T(T(x))), \dots$. Interpretujeme to tak, že bod x za jednotku času preskočí do bodu $T(x)$, za ďalšiu jednotku času do bodu $T(T(x))$ atď., ako na Obrázku 1.1.



Obr. 1.1: V dynamickom systéme (X, T) body skáču. Vidíme polohu bodu x v časoch $0, 1, 2, \dots$

Používať označenia ako $T(T(T(T(x))))$ je nepohodlné. Ak pre kompozíciu $T \circ T \circ T \circ T$, tzv. štvrtú iteráciu zobrazenia T , použijeme označenie T^4 , môžeme príslušný bod šikovnejšie zapísať ako $T^4(x)$. Pozor, T^4 nie je mocnina, ale výsledok opakovaného skladania zobrazenia T so sebou

¹Tak je tomu najmä v situácii, keď hovoríme “Nech (X, T) je dynamický systém”. Nie je to však rigidné pravidlo. Ak napr. uvažujeme o nejakom konkrétnom dynamickom systéme (X, T) , pričom množina X nie je zadaná priamo ale nejakou podmienkou a po dlhých úvahách sa ukáže, že $X = \emptyset$, nezačneme sa ospravedlňovať čitateľovi za to, že sme dvojicu (X, T) nazvali dynamický systém.

²Býva zvykom, a aj my tak budeme niekedy robiť, šetriť zátvorky a napr. namiesto $T(T(x))$ písať $T(Tx)$. Veríme, že takéto a podobné úspory zátvoriek čitateľa nepoľutujú, ba práve naopak, prispievajú k prehľadnosti textu.

samým.³ Zobrazenie

$$T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T \circ T}_{n\text{-krát}}$$

sa nazýva *n-tá iterácia* zobrazenia T . To má zrejmý význam pre $n = 1, 2, \dots$, výhodné je však definovať aj nultú iteráciu T^0 ako identitu na množine X , teda funkciu $\text{id}_X: X \rightarrow X$ definovanú tak, že $\text{id}_X(x) = x$ pre každé $x \in X$. Iterácie zobrazenia T definujeme teda rekurentne takto:

$$T^0 = \text{id}_X, \quad T^n = T \circ T^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Všetko sú to opäť zobrazenia $X \rightarrow X$.

Ak (X, T) je dynamický systém a $x \in X$, tak postupnosť

$$\text{Traj}_T(x) := (T^n(x))_{n=0}^\infty = x, T(x), T^2(x), \dots \quad (1.1)$$

sa nazýva *trajektória* bodu $x \in X$. Množina hodnôt tejto postupnosti, teda množina

$$\text{Orb}_T(x) := \{T^n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\} = \{x, T(x), T^2(x), \dots\} \quad (1.2)$$

sa nazýva *orbita* bodu x .⁴

Ak počiatočný bod trajektórie označíme x_0 , je veľmi prehľadné, ak ďalšie body označíme $x_1, x_2, \dots$:

$$\text{Traj}_T(x_0) := x_0, \underbrace{T(x_0)}_{x_1}, \underbrace{T^2(x_0)}_{x_2}, \dots, \underbrace{T^n(x_0)}_{x_n}, \dots \quad (1.3)$$

Ide tu o rekurentne definovanú postupnosť

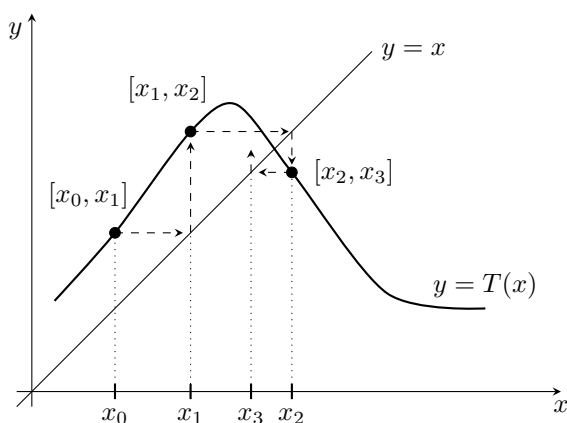
$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

V matematickej analýze sa obvykle nazýva *iteračná postupnosť* prislúchajúca k zobrazeniu T a bodu x_0 alebo iteračná postupnosť bodu x_0 vzhľadom na zobrazenie T alebo iteračná postupnosť zobrazenia T generovaná bodom x_0 (ako sme už ale povedali, v teórii dynamických systémov sa namiesto toho používa názov trajektória bodu x_0 v dynamickom systéme (X, T)).

Ak $X \subseteq \mathbb{R}$, teda (1.3) je iteračná postupnosť *reálnych čísel*, možno ju geometricky znázorniť pomocou tzv. *iteračného diagramu*; niekedy sa mu hovorí *pavučinový diagram* (z angl. cobweb diagram). Postup je nasledujúci. Nakreslíme graf funkcie $y = T(x)$ (os x vodorovne, os y zvisle) a do toho istého obrázka nakreslíme aj tzv. *diagonálu*, čo je priamka $y = x$. Sledujte Obrázok 1.2. Vyznačme na osi x číslo x_0 . Budeme “cestovať”, a to vždy len zvislým alebo vodorovným smerom a budeme pritom zanechávať za sebou stopu v podobe lomenej čiary poskladanej zo zvislých a vodorovných úsekov. Najskôr sa postavíme do bodu $[x_0, 0]$ a pohnime sa zvislým smerom, až kým nenarazíme na graf funkcie (to, či treba ísť nahor alebo nadol, závisí od polohy grafu). Sme v bode $[x_0, T(x_0)] = [x_0, x_1]$. Z tohto bodu zase putujeme vodorovným smerom (doprava alebo doľava, podľa situácie), až kým nenarazíme na diagonálu. Sme v bode $[x_1, x_1]$ (pamätajte, že bod diagonály má obe súradnice rovnaké). Takže už vieme na osi x vyznačiť číslo x_1 , teda druhý člen postupnosti. Putujeme ďalej. Z bodu $[x_1, x_1]$ ideme zvislo, až kým nenarazíme na graf funkcie.

³Pri takýchto označeniach v literatúre si vždy treba overiť, čo znamenajú. Napr. v goniometrii $\sin^2(x)$ znamená druhú mocninu $(\sin(x))^2$. Ak by sme chceli byť veľmi precízni, tak namiesto $T(T(T(T(x))))$ by sme nemali písať $T^4(x)$, aby sme nepoplietli goniometrov, ale napr. $T^{\circ 4}(x)$. Veríme však, že ani pri našom menej precíznom označení nedôjde k nedorozumeniu. Treba, aby si čitateľ pamätal, že v dynamických systémoch T^4 nie je štvrtá mocnina, ale štvornásobná kompozícia. To samozrejme znamená aj to, že v dynamických systémoch by sme mocninu $(\sin(x))^2$ nemali písať v tvare $\sin^2(x)$, lebo by to mohlo byť nesprávne interpretované ako $(\sin \circ \sin)(x)$.

⁴Terminológia nie je jednotná. Niektorí autori nerobia rozdiel medzi trajektóriou a orbitou. Pre nás však trajektória je postupnosť a orbita je množina.

Obr. 1.2: Iteračný diagram (funkcia $T(x)$, počiatočný bod x_0)

Sme v bode $[x_1, T(x_1)] = [x_1, x_2]$. Z tohto bodu pokračujeme vodorovne až do bodu $[x_2, x_2]$ na diagonále. Už vieme vyznačiť na osi x číslo x_2 . Takto pokračujeme a postupne získavame ďalšie a ďalšie členy našej postupnosti.⁵

Načo je dobré takto kresliť iteračnú postupnosť? Na to, že “uvidíme” našu postupnosť $x_0, x_1, x_2, \dots$ a jej vlastnosti. Napríklad “uvidíme”, či je monotónna. Obrázok síce nie je dôkaz, ale dobre nakreslený iteračný diagram môže byť zdrojom hypotézy, ktorú potom už ľahšie dokážeme.

Poznamenajme ešte, že pri kreslení iteračného diagramu je obvyčajne veľmi dôležité znázorniť priesečníky grafu funkcie T s diagonálou. Ich prvé súradnice sú tzv. *pevné body* funkcie T (sú to riešenia rovnice $T(x) = x$). Ak sa pri našom putovaní dostaneme do priesečníka grafu s diagonálou, kreslenie môžeme skončiť, z daného bodu už neunikneme (kreslite!).

Poznámka 1.1. Zobrazenie T je vo všeobecnosti neinvertovateľné (t.j. nemusí existovať inverzné zobrazenie $T^{-1}: X \rightarrow X$). Práve preto sme trajektóriu bodu x_0 definovali ako tzv. *doprednú trajektóriu* (1.3). Ak zobrazenie T je invertovateľné (tým máme na mysli, že $T: X \rightarrow X$ je bijekcia), t.j. ak existuje inverzné zobrazenie $T^{-1}: X \rightarrow X$, môžeme definovať aj záporné iterácie: $T^{-1}, T^{-2} := (T^{-1})^2 = T^{-1} \circ T^{-1} = (T^2)^{-1}, \dots$. V takom prípade sa dá pre bod x_0 definovať aj jeho tzv. *dozadná (spätná) trajektória* $x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots$ kde $x_{-n} = T^{-n}(x_0)$, $n = 1, 2, \dots$, prípadne tzv. *úplná trajektória* bodu x_0 , čo je dvojnekonečná postupnosť

$$\dots, x_{-n}, \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \dots$$

Analogicky sa definuje *dozadná (spätná) orbita* a *úplná orbita*. Vidíme, že ak sa v teórii dynamických systémov hovorí o trajektórii či orbite, treba si ujasniť, čo sa pod tým myslí; pozri Obrázky 1.3 a 1.4.

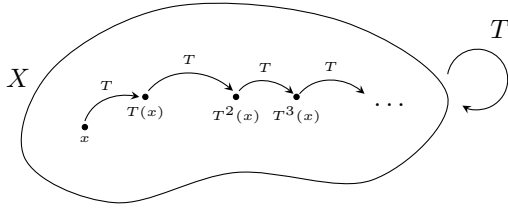
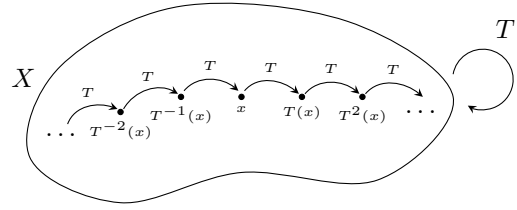
Dohoda. V tomto texte, pokiaľ nepoviem inak, pod trajektóriou a orbitou máme na mysli ich dopredné varianty (dokonca aj vtedy keď T je invertovateľné).

Pri skúmaní dynamického systému nás zaujíma správanie sa trajektórií.

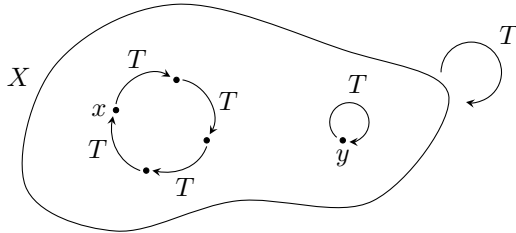
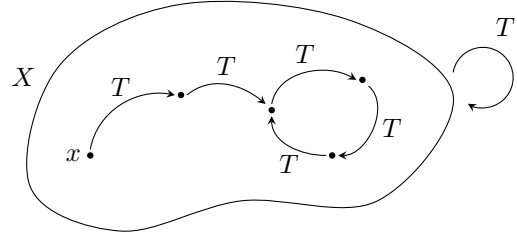
Bod $x \in X$ sa nazýva *periodický bod* zobrazenia T , ak $T^p(x) = x$ pre nejaké $p \geq 1$.⁶ Najmenšie také p sa nazýva *perióda* bodu x . Ak x je periodický bod s periódou $p = 1$, teda ak $T(x) = x$,

⁵Stručne: začneme v bode $[x_0, 0]$ na osi x a potom ideme zvisle na graf, vodorovne na diagonálu, zvisle na graf, vodorovne na diagonálu, atď do nekonečna. Čísla z našej postupnosti sú priesečníky osi x s priamkami, na ktorých ležia zvislé úseky našej cesty.

⁶ $T^0(x) = x$ platí pre každý bod x .

Obr. 1.3: (Dopredná) trajektória zobrazenia T Obr. 1.4: Úplná trajektória invertovateľného zobrazenia T

bod x sa nazýva aj *pevný bod* zobrazenia T , pozri Obrázok 1.5. Ak x je periodický s periódou p , tak body $x, T(x), \dots, T^{p-1}(x)$ sú navzájom rôzne (prečo?). Všimnite si, že v takom prípade je trajektória bodu x periodická postupnosť s periódou p (lebo zrejme $T^{p+1}(x) = T(x), T^{p+2}(x) = T^2(x), \dots, T^{2p}(x) = T^p(x) = x, \dots$) a orbita bodu x je konečná množina $\{x, T(x), \dots, T^{p-1}(x)\}$. Nazývame ju *periodická orbita s periódou p* alebo tiež *p -cyklus*.

Obr. 1.5: Periodický bod x s periódou 4 a pevný bod y Obr. 1.6: Eventuálne periodický bod (s periódou 3), ktorý nie je periodický (platí $T^2(x) = T^5(x)$)

Ak $T^m(x) = x$, bod x sa niekedy nazýva *m -periodický*. To ešte neznamená, že jeho periódou je m , lebo môže existovať menšie n s vlastnosťou $T^n(x) = x$. Pozrite dôležité Cvičenie 1.2.

Aj bod, ktorý nie je periodický, môže mať konečnú orbitu. Povieme, že bod x je *eventuálne periodický* (s periódou p) ak pre nejaké $m \geq 0$ je $T^m(x)$ periodický bod (s periódou p). Periodický bod je eventuálne periodický, ale obrátene to neplatí, vid' Obrázok 1.6. Pozrite tiež Cvičenie 1.3.

Dynamický systém (X, T) je množina X so zobrazením $T: X \rightarrow X$. Môže sa stať, že v dynamickom systéme máme k dispozícii aj dodatočnú štruktúru. Uvedieme tri dôležité prípady:

- (*Topologický dynamický systém*) Ak v dynamickom systéme (X, T) je množina X metrickým priestorom⁷ a zobrazenie $T: X \rightarrow X$ je spojité, tak (X, T) nazývame *topologický dynamický systém*, skrátene *t.d. systém*. Takéto systémy sa skúmajú v tej časti teórie dynamických systémov, ktorá sa nazýva *topologická dynamika*.⁸

Sú rôzne možnosti, ako môže vyzerat' orbita v topologickom dynamickom systéme. Nasledujúce dve sú v istom zmysle extrémne:

- orbita bodu x je konečná (periodická alebo aspoň eventuálne periodická);
- orbita bodu x je hustá, teda pretína každú neprázdnu otvorenú množinu v metrickom priestore X ; ak je metrický priestor X nekonečný, tak hustá orbita je automaticky

⁷Všeobecnejšie, topologickým priestorom.

⁸Niekedy sa upúšťa od predpokladu spojitosti zobrazenia T a pripúšťa sa napr. konečne alebo spočítateľne veľa bodov nespojitosti, prípadne sa predpokladá nejaká slabšia forma spojitosti ako napr. kvázispojitosť apod. Avšak predpoklad, že X nie je len množina, ale je to metrický (či aspoň topologický) priestor, je pre topologickú dynamiku podstatný.

nekonečná, ale nekonečná orbita nemusí byť hustá – vysvetlite.

- (*Mierovo-teoretický dynamický systém*) Ak $\mathcal{B}$ je nejaká σ -algebra podmnožín množiny X a μ je miera definovaná na $\mathcal{B}$,⁹ môže sa stať, že zobrazenie $T: X \rightarrow X$ je merateľné vzhľadom na túto σ -algebru (t.j. T -vzor množiny z $\mathcal{B}$ je množina z $\mathcal{B}$). Môže sa navyše stať, že pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ je $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ (hovoríme, že μ je *invariantná miera* pre T alebo že T zachováva mieru μ). V takomto prípade sa $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ nazýva *mierovo-teoretický dynamický systém* alebo *mieru zachovávajúci dynamický systém*, skrátene *m.z. systém*. Práve takéto systémy sú objektom skúmania *ergodickej teórie*. Vždy, keď budeme hovoriť o systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, budeme predpokladať, že $\mu(X) \neq 0$.
- (*Dynamický systém, ktorý je zároveň topologický aj mierovo-teoretický*) V topologickom dynamickom systéme (X, T) je zobrazenie T spojité, preto je automaticky merateľné vzhľadom na σ -algebru $\mathcal{B}$ borelovských podmnožín priestoru X . Môže sa stať, že na $\mathcal{B}$ máme definovanú nejakú mieru μ a že T zachováva túto mieru.¹⁰ Potom $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mierovo-teoretický dynamický systém a zároveň aj topologický dynamický systém.

Ako sme už naznačili vyššie, v dynamickom systéme (X, T) pre bod $x \in X$ interpretujeme $T^n(x)$ ako bod, kam sa bod x dostal za čas n . Ak $U \subseteq X$ a $T^n(x) \in U$ pre nejaké n , povieme, že bod x *navštívil* množinu U v čase n . Prípadne povieme, že trajektória bodu x navštívila množinu U (všimnime si, že toto nastáva práve vtedy, keď orbita bodu x pretne U). Pripúšťame tu aj $n = 0$, teda ak bod $x \in U$, tak x navštívi U aspoň v čase 0.¹¹

Ak (X, T) je topologický dynamický systém, tak orbita bodu x je hustá zrejme práve vtedy, keď bod x navštívi každú neprázdnu otvorenú množinu v X .

Ak v dynamickom systéme zvolíme bod $x \in X$ a množinu $A \subseteq X$, môžeme sa pýtať, či bod x navštívi množinu A , prípadne dokonca ako často ju navštevuje.

1.2 Frekvencia návštev bodu x do množiny A a pojem ergodičnosti

Majme dynamický systém (X, T) , množinu $A \subseteq X$ a bod $x \in X$. Zaujímá nás *frekvencia návštev bodu x do množiny A* , teda limita (ak existuje)

$$\text{frekv}_A(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : T^k(x) \in A\}}{n}. \quad (1.4)$$

Zlomok za znakom limity má v čitateli číslo udávajúce, *koľko* spomedzi bodov $x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)$ leží v A , a teda celý zlomok je číslo z intervalu $[0, 1]$, ktoré udáva *podiel* tých bodov spomedzi prvých n bodov trajektórie bodu x , ktoré ležia v A . Formulu pre frekvenciu návštev možno elegantne prepísať pomocou charakteristickej funkcie množiny A :

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{ak } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

⁹Teda $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je to, čomu sa v teórii miery hovorí priestor s mierou. Ak v súvislosti s takýmto priestorom hovoríme, že množina A je merateľná, máme na mysli, že $A \in \mathcal{B}$, teda že existuje $\mu(A)$.

¹⁰Namiesto toho by sme mohli uvažovať o inej σ -algebre a miere na nej, ak je T vzhľadom na tú σ -algebru merateľné a zachováva tú mieru. Opísaný prípad je však najdôležitejší.

¹¹U invertovateľných systémov pripúšťame aj záporné časy, bod mohol navštíviť množinu aj v “minulosti”.

Naozaj, $T^k(x)$ patrí, resp. nepatrí do A práve vtedy, keď $\chi_A(T^k(x))$ sa rovná 1, resp. 0. Potom

$$\#\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : T^k(x) \in A\} = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k(x)),$$

a teda pre frekvenciu, s akou bod x navštevuje množinu A máme

$$\text{frekv}_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k(x)). \quad (1.5)$$

V ergodickej teórii, kde pracujeme s mierovo-teoretickým dynamickým systémom $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, sa obmedzujeme len na množiny $A \in \mathcal{B}$ (teda tzv. merateľné množiny, čiže množiny, pre ktoré existuje miera $\mu(A)$). Zaujímá nás odpoveď na otázku: Je pravda, že pre frekvenciu návštev bodu $x \in X$ do množiny A platí

$$\text{frekv}_A(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} ? \quad (1.6)$$

(Okrem už dohodnutého predpokladu $\mu(X) > 0$ navyše predpokladajme že $\mu(X) < \infty$, aby bolo vpravo dobre definované číslo.) To je celkom prirodzená otázka, súvisiaca s predstavou, že ak ‘turista’ x putuje po svete X a pritom neuprednostňuje žiadnu časť sveta pred inou, tak veľkú krajinu bude navštevovať častejšie ako malú krajinu. Ak krajina A má veľkosť $\mu(A) = (1/100)\mu(X)$, tak takýto turista ju bude navštevovať s frekvenciou 0,01 (len jedno percento času strávi v A).

Prijmeme nasledujúcu, trochu neštandardnú terminológiu.

Definícia 1.2. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mierovo-teoretický dynamický systém, v ktorom (okrem $\mu(X) > 0$) je $\mu(X) < \infty$. Ak pre bod $x \in X$ a množinu $A \in \mathcal{B}$ platí (1.6), budeme hovoriť, že *bod x navštevuje množinu A so správnou frekvenciou*, alebo že je to *férový bod pre množinu A* .¹² Ak je bod x férový pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$, budeme hovoriť, že je to *férový bod*.

Teda bod x je férový, ak sa pohybuje absolútne spravodlivo, férovo, žiadnu merateľnú množinu neuprednostňuje, každú jednu z nich navštevuje so správnou frekvenciou.

Všimnite si, že každý bod je férový prinajmenšom pre $A = \emptyset$ a $A = X$. Napodiv existujú systémy, v ktorých každý bod je férový pre každú merateľnú množinu, teda systémy, v ktorých v zmysle našej terminológie je každý bod férový.¹³

Príklad 1.3. Nech $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B} = 2^X$, μ je miera definovaná na $\mathcal{B}$, pre ktorú $\mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = 1/3$. Nech $T(1) = 2$, $T(2) = 3$, $T(3) = 1$. Potom zrejme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém a pre každý bod $x \in X$ a každú množinu $A \in \mathcal{B}$ platí (1.6) (vysvetlite). Teda v tomto systéme je každý bod férový.

V mieru zachovávajúcim systéme je to vo všeobecnosti tak, že niektoré body sú férové a iné nie (Cvičenie 1.6).

To, aby bol každý bod férový, ako v Príklade 1.3, dokonca aj to, aby vôbec existoval aspoň jeden férový bod, je však veľmi zriedkavá situácia. V dôležitých prípadoch mierovo-teoretických systémov využívaných v aplikáciách to často býva presne naopak — bývajú totiž splnené predpoklady nasledujúcej propozície a preto neexistuje žiaden férový bod.

¹²Terminologická poznámka: V angličtine sa hovorí, že “trajectory of x equidistributes in A ”.

¹³Triviálnym príkladom je identita na jednobodovom priestore s konečnou mierou. Uvedieme zaujímavejší príklad.

Propozícia 1.4. *Predpokladajme, že v miere zachovávajúcom systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je $0 < \mu(X) < \infty$ a každá jednobodová množina je merateľná a má nulovú mieru. Potom neexistuje ani jeden férový bod $x \in X$.*

Dôkaz. Nech $x \in X$ je férový (odvodíme spor). Zvoľme $A = \text{Orb}_T(x) = \{x, T(x), T^2(x), \dots\}$. Z predpokladov vyplýva, že $A \in \mathcal{B}$ a $\mu(A) = 0$ (prečo?). Pretože bod x je v každom čase v A , je $\text{frekv}_A(x) = 1$. Na druhej strane, x je férový, teda aj férový pre množinu A . Preto $\text{frekv}_A(x) = \mu(A)/\mu(X)$. Porovnaním dostaneme $\mu(A) = \mu(X)$. To je spor, lebo $\mu(A) = 0$ a $\mu(X) > 0$. $\square$

Teda systémy, v ktorých existujú férové body alebo v ktorých je dokonca každý bod férový nemôžu byť z praktických dôvodov jadrom záujmu ergodickej teórie. Ukazuje sa však, že mnohé systémy objavujúce sa v aplikáciách (napr. vo fyzike) majú vlastnosť, ktorá je síce slabšia, ale v istom zmysle dosť blízka tomu, že každý bod je férový. Ide o vlastnosť, že pre každú merateľnú množinu A platí, že μ -skoro každý bod $x \in X$ je férový pre A :

$$(\forall A \in \mathcal{B})(\text{pre } \mu\text{-skoro každý bod } x \in X)(x \text{ je férový pre } A). \quad (\text{ERG})$$

Takéto systémy, v ktorých každá množina $A \in \mathcal{B}$ je skoro všetkými bodmi navštevovaná so “správnou” frekvenciou (1.6), sa nazývajú *ergodické*.

V ergodickom systéme nemusí (hoci výnimočne môže, ako napr. v Príklade 1.3) existovať jedna *univerzálna* množina plnej miery tak, že každý bod z tejto množiny navštevuje každú množinu $A \in \mathcal{B}$ so “správnou” frekvenciou. Ako sme už povedali, pod ergodičnosťou sa myslí niečo menej, totiž, že pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ existuje *svoja* množina X_A plnej miery tak, že každý bod $x \in X_A$ navštevuje tú jednu množinu A so “správnou” frekvenciou.

Ergodičnosť sme, za predpokladu $\mu(X) < \infty$, definovali podmienkou (ERG). Poznamenajme, že existujú aj iné definície ergodičnosti (jednoduchšie a hodiace sa dokonca aj na prípad $\mu(X) = \infty$). Tak ako v drivej väčšine kníh o ergodickej teórii, aj my budeme neskôr definovať ergodičnosť pomocou nich. Až neskôr, v súvislosti s Birkhoffovou ergodickou vetou, ukážeme na priestoroch s konečnou mierou *ekvivalentnosť* týchto definícií s podmienkou (ERG). Skutočnosť, že existujú jednoduchšie ekvivalentné definície ergodičnosti je dobrá správa, lebo priame overovanie podmienky (ERG) by bolo veľmi ťažké.

Ukazuje sa, že existuje nemálo ergodických systémov $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$. Ergodické systémy predstavujú hlavný objekt záujmu v ergodickej teórii. Dôvod, prečo je tomu tak, spočíva v dôležitosti takýchto systémov pre aplikácie. V skutočnosti sa ergodická teória historicky rozvinula ako reakcia na potreby fyziky.

1.3 Fyzikálna motivácia ergodickej teórie

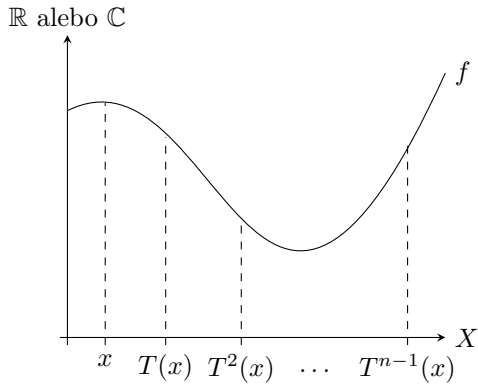
Stále predpokladajme, že $\mu(X) < \infty$. Všimnime si, že (1.6) možno prepísať takto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \chi_A d\mu. \quad (1.7)$$

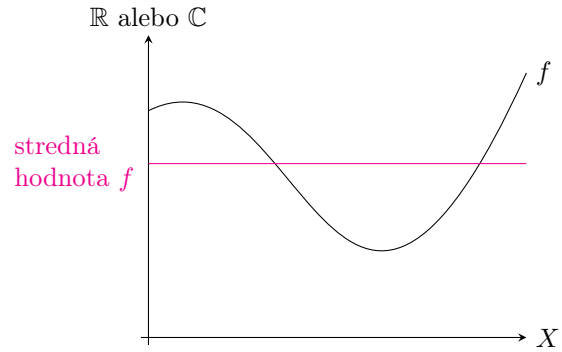
Je prirodzené chcieť nahradiť charakteristickú funkciu merateľnej množiny A inou integrovateľnou funkciou $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (alebo dokonca $f: X \rightarrow \mathbb{C}$) a pýtať sa, kedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu . \quad (\text{TASA})$$

Veličina na ľavej strane je tzv. *časový priemer funkcie* f pozdĺž trajektórie bodu x , vpravo je *priestorový priemer funkcie* f , alebo tzv. *stredná hodnota funkcie* f tak, ako je obvykle definovaná v integrálnom počte.¹⁴ Podmienku sme nazvali TASA, podľa anglických výrazov *time average* = časový priemer, *space average* = priestorový priemer.



Obr. 1.7: Časový priemer



Obr. 1.8: Priestorový priemer

Historicky viedla cesta k ergodickej teórii cez štatistickú fyziku, v ktorej sa prirodzene objavuje podmienka (TASA). Naozaj, nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ predstavuje nejaký fyzikálny systém, teda:

- X je množina všetkých možných stavov daného fyzikálneho systému,
- $T: X \rightarrow X$ je zákon časového vývoja (ak $x \in X$ je stav fyzikálneho systému v nejakom čase, tak $T(x)$ je jeho stav v nasledujúcom čase, v čase o jednotku väčšom),
- $\mathcal{B}$ je nejaká σ -algebra na X ,
- μ je nejaká fyzikálne zmysluplná miera definovaná na X ,
- miera μ je invariantná pre T .

Majme ďalej

- funkciu $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (alebo $f: X \rightarrow \mathbb{C}$), lebesguovsky integrovateľnú vzhľadom na μ .

Ak je fyzikálny systém v stave $z \in X$, je $f(z)$ hodnota funkcie f v tomto stave. Ak je možné hodnoty funkcie f fyzikálne približne zmerať, tak sa funkcia f označuje aj jedným slovom *pozorovateľná*, angl. *observable* (prídavné meno je tu použité vo funkcii podstatného mena).¹⁵

Fyzikov zaujíma stredná hodnota pozorovateľnej f cez všetky možné stavy systému, t.j. veličina na pravej strane (TASA). Tá sa však často fyzikálne nedá zmerať, napr. typicky je to tak v štatistickej fyzike. Naproti tomu časový priemer funkcie f pozdĺž trajektórie bodu x , teda

¹⁴Spomeňte si, že už v kalkule ste definovali strednú hodnotu integrovateľnej funkcie f na intervale $[a, b]$ ako $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

¹⁵Vo fyzike, *pozorovateľná* (*observable*) je fyzikálna veličina, ktorá sa dá merať, napr. poloha, rýchlosť, tlak, teplota apod.

veličinu na ľavej strane (TASA), možno pomocou meraní niekedy dost' dobre odhadnúť. K tomu je potrebné zmerať hodnotu pozorovateľnej v dlhom začiatočnom úseku postupnosti časov $0, 1, 2, \dots$, pozri Tabuľku 1.1.

čas k	stav systému v čase k	hodnota pozorovateľnej v tom stave
0	x	$f(x)$
1	$T(x)$	$f(T(x))$
2	$T^2(x)$	$f(T^2(x))$
	$\dots$	
$n-1$	$T^{n-1}(x)$	$f(T^{n-1}(x))$
	$\dots$	

Tab. 1.1: K určeniu časového priemeru

Postupne pre stále väčšie a väčšie n počítame aritmetický priemer $(1/n) \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$. Môže sa stať, že sa tieto priemery stabilizujú, blížia k nejakej hodnote. Takto môžeme usúdiť, že pre dané x limita na ľavej strane (TASA) existuje a odhadnúť jej hodnotu.¹⁶ Ak by sme vedeli, že rovnosť (TASA) pre *namí zvolené* x (pre náš počiatočný stav) platí, získali by sme tak odhad strednej hodnoty pozorovateľnej. Ak by sme vedeli, že rovnosť (TASA) platí aspoň pre *typické* x (tým sa myslí pre μ -skoro každé x , teda pre skoro každý počiatočný stav $x \in X$), mohli by sme sa spoľahnúť na to, že náš počiatočný stav x patril medzi tieto typické počiatočné stavy a teda sme naozaj odhadli strednú hodnotu pozorovateľnej.

Najmä v štatistickej fyzike je teda dôležitá otázka, či v danom fyzikálnom miere zachovávaťcom systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ platí pre pozorovateľné f rovnosť (TASA) pre μ -skoro každý počiatočný stav $x \in X$, teda s "pravdepodobnosťou" 1.

Tzv. *Boltzmannova ergodická hypotéza*¹⁷ vo fyzike hovorí práve to, že ak X je množina všetkých možných stavov systému a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je pozorovateľná, tak pre skoro každý východzí stav $x \in X$ platí (TASA), t.j. časové priemery ľubovoľnej konečnej série pozorovaní veličiny f konvergujú (pre čas idúci do nekonečna) k priestorovému priemeru veličiny f .¹⁸ Ukázalo sa, že Boltzmannova ergodická hypotéza neplatí bez dodatočných predpokladov o systéme. Hľadanie podmienok, za ktorých pre typické $x \in X$ sa časový priemer pozorovateľnej naozaj rovná jej priestorovému priemeru, viedlo ku vzniku ergodickej teórie.

Najdôležitejšou vetou ergodickej teórie je tzv. *Birkhoffova ergodická veta*¹⁹ (pozri Vety 9.1 a 9.2), ktorá hovorí, že práve ergodičnosť je postačujúcou (a ako sa ukáže, aj nutnou) podmienkou pre to, aby v systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ pre každú lebesguovskú μ -integrateľnú funkciu $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ platila rovnosť (TASA) pre μ -skoro každý bod $x \in X$ (za predpokladu, že invariantná miera μ je konečná).

Pripomeňme, že naša definícia ergodičnosti (pomocou frekvencie návštev) je ekvivalentná so

¹⁶Samozrejme, z poznania konečného počtu členov postupnosti nemožno v prísne matematickom zmysle odvodiť existenciu limity a jej hodnotu.

¹⁷Ludwig Boltzmann (1844 – 1906) bol rakúsky fyzik, zakladateľ štatistickej fyziky. Pôsobil najmä vo Viedni. Slovo ergodický pochádza z gréckych slov *ergon* = práca, energia a *odos* = cesta.

¹⁸Historicky to bolo trochu inak. Hypotéza tak, ako ju Boltzmann formuloval, nehovorila o časovom a priestorovom priemere. Hovorila o tom, že trajektória vybraného bodu prechádza úplne všetkými možnými bodmi (časťi) fázového priestoru. To je už z kardinalitných alebo topologických dôvodov matematicky nemožné, s výnimkou umelých či triviálnych príkladov. Takto formulovaná hypotéza bola príliš silná, treba ju zmierniť a hovoriť o tom, že skoro každá trajektória prechádza ľubovoľne blízko každého bodu. Vo všeobecnosti ani to nie je pravda, ale v ergodických miere zachovávačiacich systémoch (s konečnou mierou) tomu tak je, platí dokonca viac, pozri Vetu 10.4 a Vetu 10.11.

¹⁹George David Birkhoff (1884 – 1944) bol americký matematik, profesor na Harvardovej univerzite, otec matematika Garretta Birkhoffa.

štandardnou, ktorú sa budeme učiť neskôr. Ak zhrnieme, čo sme povedali, dostávame, že nasledujúce tvrdenia pre mieru zachovávajúci dynamický systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ s konečnou mierou sú ekvivalentné (pozri Vetu 10.4):

- (1) systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je ergodický (v zmysle tej jednoduchšej definície, ktorú sme si sľúbili uviesť neskôr, pozri Definíciu 7.1),
- (2) platí podmienka (ERG), teda pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ platí, že μ -skoro každý bod $x \in X$ navštevuje množinu A so “správnou” frekvenciou,
- (3) pre každú lebesguovskú μ -integrovateľnú funkciu $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ platí (TASA) pre μ -skoro každé $x \in X$.

Jedným z hlavných cieľov tohto kurzu bude ukázať ekvivalentnosť rôznych definícií ergodičnosti a porozumieť Birkhoffovej ergodickej vete a jej aplikáciám. Poznamenajme, že ergodická teória sa dnes používa nielen vo fyzike, ale má predovšetkým početné aplikácie v rôznych oblastiach matematiky.

Štúdium ergodickej teórie začneme rovnomerne rozdelenými postupnosťami reálnych čísel.

1.4 Cvičenia a projekty

Cvičenie 1.1. Nech $T: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ je zobrazenie definované vzťahom $T(x) = 2x \bmod 1$ (tzv. *doubling map*).

- (1) Nakreslite graf funkcie T .
- (2) Ukážte, že bod $2/5$ je periodický a určte jeho periódu.
- (3) Nájdite racionálne číslo, ktoré nie je periodickým bodom.
- (4) Ukážte, že každé racionálne číslo x je eventuálne periodický bod.

Cvičenie 1.2. Ak v dynamickom systéme bod x je 8-periodický, teda $T^8(x) = x$, tak perióda bodu x je 8, 4, 2 alebo 1. Všeobecne, ak x je m -periodický, tak perióda bodu x delí m . Dokážte.

Cvičenie 1.3. Ukážte, že v každom dynamickom systéme sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- (1) x je eventuálne periodický,
- (2) orbita bodu x je konečná,
- (3) $T^m(x) = T^n(x)$ pre nejaké $0 \leq m < n$.

Cvičenie 1.4. Nech T je zobrazenie z Cvičenia 1.1 a nech $x \in [0, 1)$. Dokážte, že

$$x \text{ je periodický} \implies x \in \mathbb{Q} \iff x \text{ je eventuálne periodický.}$$

Cvičenie 1.5. Nech v dynamickom systéme (X, T) je bod x periodický s periódou p . Nech $B \subseteq X$. Určte frekvenciu návštev bodu x do množiny B (pozor, odpoveď závisí od voľby B).

Cvičenie 1.6. Nájdite mieru zachovávajúci systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, v ktorom existuje férový bod aj bod, ktorý nie je férový.

Projekt 1.7. Naštudujte si podrobnejšie o Boltzmannovej ergodickej hypotéze a vzniku ergodickej teórie a napíšte lepšiu verziu Sekcie 1.3. Rozsah max. 5 strán.

Kapitola 2

Rovnomerne rozdelené postupnosti

2.1 Frekvencia návštev postupnosti bodov do množiny

Keď pracujeme s dynamickým systémom (X, T) , zaujíma nás rozmiestnenie bodov trajektórie $x, T(x), T^2(x), \dots$ v množine X . Napr. v Sekcii 1.2 sme skúmali frekvenciu $\text{frekv}_A(x)$, s akou v mieru zachováva dynamický systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ bod $x \in X$ navštevuje množinu $A \in \mathcal{B}$. Zaujímalo nás najmä, kedy išlo o “správnu” frekvenciu $\mu(A)/\mu(X)$.

“Frekvenčnú” terminológiu môžeme zovšeobecniť.

Po prvé, $\text{frekv}_A(x)$ je definovaná tak, že si všimame, ktoré body trajektórie bodu x ležia v A . Namiesto trajektórií v dynamickom systéme možno skúmať ľubovoľné postupnosti bodov v ľubovoľnej množine.¹ Ak $(x_n)_{n=1}^\infty$ je ľubovoľná postupnosť bodov v množine X , môžeme hovoriť o *frekvencii*, s akou táto postupnosť navštevuje množinu $A \subseteq X$. Túto frekvenciu budeme označovať $\text{frekv}_A((x_n)_{n=1}^\infty)$ alebo stručnejšie, hoci menej presne, $\text{frekv}_A(x_n)$, $\text{frekv}_A(x_k)$ apod.² Prirodzená definícia, aj s ohľadom na (1.4), je:

$$\text{frekv}_A(x_n) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in A\}}{N}. \quad (2.1)$$

Po druhé, limita v definícii frekvencie nemusí existovať, preto je niekedy užitočné skúmať *dolnú, resp. hornú frekvenciu*, s akou postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ navštevuje množinu $A \subseteq X$:

$$\begin{aligned} \text{frekv}_A^-(x_n) &:= \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in A\}, \\ \text{frekv}_A^+(x_n) &:= \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in A\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pomocou frekvenčnej terminológie možno zaviesť pojem rovnomerne rozdelených postupností ako takej postupnosti, ktorá navštevuje vybrané podmnožiny X so “správnymi” frekvenciami. Tu však nemožno očakávať príliš veľa. Nie je napr. možné, aby nejaká postupnosť reálnych čísel ležiaca v intervale $[A, B]$ navštevovala všetky lebesguovsky merateľné podmnožiny intervalu $[A, B]$ so “správnymi” frekvenciami zodpovedajúcimi ich mieram. To ľahko vyplýva z podobných úvah ako sme použili v dôkaze Propozície 1.4. Problém je v tom, že lebesguovsky merateľných podmnožín intervalu $[A, B]$ je príliš veľa. Možno však postupovať nasledovne.

¹Postupnosť $0, 1, 0, 0, \dots$ nie je trajektóriou, lebo by sme zároveň mali $T(0) = 1$ aj $T(0) = 0$.

²Dúfame, že nejaké veľké nedorozumenie asi nehrozí, snáď aj preto, že $\text{frekv}_A((x_n)_{n=1}^\infty) = \text{frekv}_A((x_n)_{n=2}^\infty) = \text{frekv}_A((x_n)_{n=3}^\infty) =$

....

Predpokladajme, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov v množine X (pričom tu nemusíme mať definované žiadne zobrazenie T). Ďalej predpokladajme, že máme zvolený nejaký súbor “pekných” podmnožín množiny X , u ktorých vieme merať ich “objem”. Ak A je taká množina, nech $\text{vol}(A)$ je jej objem. Predpokladajme tiež, že medzi také množiny patrí aj X a že $0 < \text{vol}(X) < \infty$. V takom prípade môže byť zmysluplné prehlásiť postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ za *rovnomerne rozdelenú*,³ ak navštevuje každú “peknú” množinu A so “správnu” frekvenciou $\text{vol}(A)/\text{vol}(X)$.

V nasledujúcej sekcii budeme takúto terminológiu rovnomernej rozdelenosti používať pre postupnosti reálnych čísel ležiace v intervale $[A, B]$, pričom za “pekné” množiny budeme považovať (uzavreté) podintervaly intervalu $[A, B]$ a pod ich “objemom” budeme rozumieť ich dĺžku.

2.2 Rovnomerne rozdelené postupnosti a Jordanova miera

V tejto časti sa obmedzíme na ohraničené postupnosti reálnych čísel. Ak tu hovoríme o intervale $[A, B]$, predpokladáme, že $A < B$.

Definícia 2.1. Nech postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ reálnych čísel leží v intervale $[A, B]$. Povieme, že je *rovnomerne rozdelená* v intervale $[A, B]$, ak každý podinterval $[a, b]$ intervalu $[A, B]$ navštevuje so “správnu” frekvenciou zodpovedajúcou jeho dĺžke, teda

$$\text{frekv}_{[a,b]}(x_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in [a, b]\}}{N} = \frac{b - a}{B - A}. \quad (2.3)$$

Ak nemôže dôjsť k nedorozumeniu, budeme krátko vravieť, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r.

Pre $[a, b] = [A, B]$ triviálne dostávame správnu rovnosť $1 = 1$. Požaduje sa tu však rovnosť pre každý podinterval. Napr. ak $[a, b]$ zaberá tretinu intervalu $[A, B]$, požaduje sa, aby ho postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ navštevovala s frekvenciou $1/3$.

Príklad 2.2. Postupnosť

$$0, \underbrace{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}}_{\text{prvá tretina}}, 1, 0, \underbrace{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}}_{\text{druhá tretina}}, 1, \dots$$

leží v intervale $[0, 1]$, ale nie je v ňom r.r. Naozaj, táto postupnosť vôbec nenavštívi interval $[1/100, 2/100]$. Keby bola r.r., musela by ho navštevovať s frekvenciou $(2/100 - 1/100)/(1 - 0) = 1/100$.

Príklad 2.3. Nech $r_1, r_2, \dots$ je postupnosť ležiaca v intervale $[0, 1]$ a $s_1, s_2, \dots$ je postupnosť ležiaca v intervale $[1, 2]$. Potom postupnosť

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \underbrace{r_1, r_2}_{\text{prvá polovica}}, \underbrace{s_1, r_3, r_4}_{\text{druhá polovica}}, \underbrace{s_2, r_5, r_6}_{\text{prvá polovica}}, s_3, \dots$$

(vždy za dvomi členmi z prvej postupnosti nasleduje jeden člen druhej postupnosti) leží v intervale $[0, 2]$, ale nie je v ňom r.r., pretože “uprednostňuje” ľavú polovicu intervalu. Naozaj, každé r_i patrí do $[0, 1]$ a ešte možno aj niektoré s_j patria do $[0, 1]$ (ak $s_j = 1$). Preto postupnosť $\frac{1}{N} \#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in [0, 1]\}$, $N = 1, 2, \dots$ vyzerá takto:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{\geq 2}{3}, \frac{\geq 3}{4}, \frac{\geq 4}{5}, \frac{\geq 4}{6}, \frac{\geq 5}{7}, \frac{\geq 6}{8}, \frac{\geq 6}{9}, \dots$$

³žiadalo by sa dodať, že vzhľadom na zvolený súbor “pekných” množín a zvolený pojem “objemu”

Odtiaľ

$$\text{frekv}_{[0,1]}(x_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in [0, 1]\}}{N} \geq \frac{2}{3},$$

pričom v prípade rovnomernej rozdelenosti by sa táto frekvencia musela rovnať $1/2$.

Na prvý pohľad ani nie je jasné, či rovnomerne rozdelené postupnosti vôbec existujú. Skonstruujeme teraz takú postupnosť.

Príklad 2.4. Zoradíme racionálne čísla z intervalu $[0, 1]$ do postupnosti

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \underbrace{\underbrace{0, 1}_{\ell_1}, \underbrace{0, \frac{1}{2}, 1}_{\ell_2}, \underbrace{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1}_{\ell_3}, \dots, \underbrace{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1}_{\ell_n}}_{L_n}, \dots$$

Dokážeme, že táto postupnosť je r.r. v intervale $[0, 1]$.

Postupnosť pozostáva z blokov s dĺžkami $\ell_1 = 2, \ell_2 = 3, \dots, \ell_n = n + 1, \dots$. V n -tom bloku sú všetky možné zlomky z intervalu $[0, 1]$ s menovateľom n . Označme

$$L_n = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n = 2 + 3 + 4 + \dots + (n + 1) = \frac{n(n+3)}{2}. \quad (2.4)$$

Nech $0 \leq a < b \leq 1$. Pre prirodzené N označme

$$A(N) := \#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in [a, b]\}.$$

Potrebuje ukázať, že

$$\text{frekv}_{[a,b]}(x_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(N)}{N} = b - a. \quad (2.5)$$

Kvôli tomu by sme chceli vypočítať alebo aspoň odhadnúť číslo $A(N)$ pre každé N . Hneď uvažovať o ľubovoľnom N by bolo trochu neprehľadné, preto najskôr budeme uvažovať o $A(L_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Aby sme odhadli $A(L_n)$, odhadnime najskôr počet p_k tých čísel z k -teho bloku $0, 1/k, 2/k, \dots, (k-1)/k, 1$, ktoré ležia v intervale $[a, b]$. Interval má dĺžku $b - a$, vzdialenosť dvoch susedných čísel v bloku je $1/k$. Preto

$$p_k = \#\left\{\left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\right\} \cap [a, b]\right\} = \left\lfloor \frac{b-a}{\frac{1}{k}} \right\rfloor + \Theta_k = \lfloor k(b-a) \rfloor + \Theta_k,$$

kde Θ_k je 0 alebo 1.⁴ Z toho máme odhad

$$k(b-a) - 1 \leq p_k \leq k(b-a) + 1. \quad ^5$$

Potom pre

$$A(L_n) = \#\{n \in \{1, 2, \dots, L_n\} : x_n \in [a, b]\} = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

máme odhad

$$\frac{n(n+1)}{2}(b-a) - n \leq A(L_n) \leq \frac{n(n+1)}{2}(b-a) + n$$

⁴ Ak robíme kroky dĺžky d a pred nami je mláka s dĺžkou napr. $3,5d$, tak do nej stúpime 3-krát alebo 4-krát. Premyslite si to.

⁵ Celé číslo p_k odhadujeme pomocou čísel, ktoré vo všeobecnosti nie sú celé.

a, s využitím (2.4),

$$\frac{(n+1)(b-a)-2}{n+3} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}(b-a)-n}{\frac{n(n+3)}{2}} \leq \frac{A(L_n)}{L_n} \leq \frac{\frac{n(n+1)}{2}(b-a)+n}{\frac{n(n+3)}{2}} = \frac{(n+1)(b-a)+2}{n+3}.$$

Odtiaľ pomocou vety o dvoch policajtoch dostávame, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(L_n)}{L_n} = b - a \quad (2.6)$$

Teraz nech N je ľubovoľné (keďže budeme počítať limitu pre $N \rightarrow \infty$, môžeme predpokladať, že $N \geq L_1 = \ell_1$). Potom existuje také prirodzené číslo n_N , že

$$L_{n_N} \leq N < L_{n_N+1}. \quad (2.7)$$

Zrejme je $A(L_{n_N}) \leq A(N) \leq A(L_{n_N+1})$, takže

$$\frac{L_{n_N}}{N} \cdot \frac{A(L_{n_N})}{L_{n_N}} \leq \frac{A(N)}{N} \leq \frac{A(L_{n_N+1})}{L_{n_N+1}} \cdot \frac{L_{n_N+1}}{N}$$

Pre $N \rightarrow \infty$ je aj $n_N \rightarrow \infty$. Preto veta o dvoch policajtoch s využitím (2.6) automaticky dá požadovaný výsledok (2.5), ak ešte dokážeme, že $\lim_{N \rightarrow \infty} L_{n_N}/N = 1$ a $\lim_{N \rightarrow \infty} L_{n_N+1}/N = 1$. Dokázat tieto rovnosti prenechávame čitateľovi (využite (2.7) a (2.4)).

V definícii rovnomernej rozdelenosti sme namiesto uzavretých intervalov $[a, b]$ mohli uvažovať polouzavreté intervaly $[a, b)$.

Propozícia 2.5 (R.r. postupností pomocou polouzavretých intervalov). *Nech postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ reálnych čísel leží v intervale $[A, B]$. Potom je r.r. v intervale $[A, B]$ vtedy a len vtedy, keď každý polouzavretý podinterval $[a, b)$ intervalu $[A, B]$ navštevuje so “správnou” frekvenciou zodpovedajúcou jeho dĺžke, teda*

$$\text{frekv}_{[a,b)}(x_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in [a, b)\}}{N} = \frac{b-a}{B-A}. \quad (2.8)$$

Dôkaz. Interval A, B a postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sú dané. Ak $S \subseteq [A, B]$, budeme písať

$$P(S, N, (x_n)) = \#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in S\}$$

Máme dokázať ekvivalentnosť nasledujúcich dvoch podmienok:

$$(1) (\forall [a, b] \subseteq [A, B])(\text{frekv}_{[a,b]}(x_n) = \frac{b-a}{B-A}),$$

$$(2) (\forall [a, b) \subseteq [A, B])(\text{frekv}_{[a,b)}(x_n) = \frac{b-a}{B-A}).$$

Keďže intervaly $[a, b]$ a $[a, b)$ sa líšia len o jeden bod, bude výhodné uvažovať ešte o tretej podmienke:

$$(3) (\forall c \in [A, B])(\text{frekv}_{\{c\}}(x_n) = 0).$$

Najskôr ukážeme, že každá z podmienok (1), (2) implikuje podmienku (3).

(1)⇒(3) Nech platí (1) a nech $c \in [A, B]$. Predpokladajme, že c nie je pravý koncový bod intervalu $[A, B]$, takže pre všetky dostatočne malé $\varepsilon > 0$ je $[c, c + \varepsilon] \subseteq [A, B]$ (pre $c = B$ je dôkaz podobný, len by sme uvažovali o intervaloch $[c - \varepsilon, c]$). Pre každé také ε je

$$0 \leq \frac{P(\{c\}, N, (x_n))}{N} \leq \frac{P([c, c + \varepsilon], N, (x_n))}{N}.$$

Potom, s využitím (1),

$$0 \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{P(\{c\}, N, (x_n))}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{P([c, c + \varepsilon], N, (x_n))}{N} = \frac{\varepsilon}{B - A}.$$

Pre $\varepsilon \rightarrow 0$ dostaneme $\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} P(\{c\}, N, (x_n)) = 0$, odkiaľ aj $\text{frekv}_{\{c\}}(x_n) = 0$, čo sme potrebovali dokázať.

(2)⇒(3) Podobne ako (1)⇒(3).

Teraz už ľahko dokážeme ekvivalentnosť (1) a (2).

(1)⇒(2) Nech platí (1), teda aj (3). Nech $[a, b] \subseteq [A, B]$. Zrejme je

$$P([a, b], N, (x_n)) = P([a, b], N, (x_n)) + P(\{b\}, N, (x_n)).$$

Z toho, s využitím (1) a (3) dostaneme

$$\begin{aligned} \text{frekv}_{[a,b]}(x_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P([a, b], N, (x_n))}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{P([a, b], N, (x_n))}{N} - \frac{P(\{b\}, N, (x_n))}{N} \right) \\ &= \frac{b - a}{B - A} - 0 = \frac{b - a}{B - A}. \end{aligned}$$

(2)⇒(1) Podobne ako (1)⇒(2). □

Propozícia ukazuje, že hoci v našej definícii rovnomernej rozdelenosti postupnosti vystupujú uzavreté podintervaly, možno ich nahradiť polouzavretými podintervalmi. Teda ak postupnosť navštevuje so správnymi frekvenciami uzavreté podintervaly, tak navštevuje so správnymi frekvenciami aj poolouzavreté podintervaly. Napadá nás, že možno navštevuje so správnymi frekvenciami aj iné podmnožiny. Naozaj je to tak. Nebudeme to teraz dokazovať, ale aspoň uvedieme príslušné tvrdenie. Začneme pripomenutím niektorých faktov o Jordanovej miere v $\mathbb{R}$.

Jordanovu mieru množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ budeme označovať $\text{Jord}(M)$. Jordanova miera intervalu je jeho dĺžka. Jordanova miera, napriek svojmu menu, nespĺňa obvyklú definíciu miery. Je to síce nezáporná σ -aditívna množinová funkcia, ale je definovaná len na *algebre* tzv. jordanovsky merateľných množín. Tieto množiny netvoria σ -algebru, ako sa pre mieru obvykle požaduje. Preto niektorí autori hovoria Jordanov objem a nie Jordanova miera.

Ak je množina jordanovsky merateľná, tak je aj lebesguovsky merateľná, a to s tou istou mierou. Existujú lebesguovsky merateľné množiny, ktoré nie sú jordanovsky merateľné, napr. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Pre podmnožinu $M \subseteq [A, B]$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

- (1) množina M je jordanovsky merateľná,
- (2) hranica množiny M má Jordanovu mieru nula,

- (3) hranica množiny M má vonkajšiu Jordanovu mieru nula,
- (4) hranica množiny M má Lebesguovu mieru nula (Lebesguovu mieru budeme označovať Leb),
- (5) charakteristická funkcia χ_M je riemannovsky integrovateľná na $[A, B]$.

(Pre podmienky (2), (3) pozrite [SS99, Veta V.34, str. 175]. Keďže tá hranica je kompaktná množina v $\mathbb{R}$, má nulovú Jordanovu mieru vtedy a len vtedy, keď má nulovú Lebesguovu mieru [SS99, Veta V.49(7), str. 185], odtiaľ podmienka (4). Pre podmienku (5) pozrite [SS99, Veta V.46, str. 183].)

Porovnajme borelovské množiny a jordanovsky merateľné množiny. Predovšetkým, existujú borelovské množiny, ktoré nie sú jordanovsky merateľné, napr. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Existujú však aj jordanovsky merateľné množiny, ktoré nie sú borelovské (lebo vďaka ekvivalencii (1) $\Leftrightarrow$ (4) je každá spomedzi 2^c podmnožín stredno-tretinovej Cantorovej množiny jordanovsky merateľná, ale všetkých borelovských množín je menej, len c).

Uvedieme sľúbenú vetu ukazujúcu súvis rovnomernej rozdelenosti so Jordanovou mierou. Kvôli úplnosti do nej zahrnieme aj Propozíciu 2.5.

Veta 2.6 (R.r. postupností a Jordanova miera). *Nech postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ reálnych čísel leží v intervale $[A, B]$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

- (1) *Postupnosť je rovnomerne rozdelená v intervale $[A, B]$, teda navštevuje každý uzavretý podinterval $[a, b]$ intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{b-a}{B-A} = \frac{\text{Jord}([a, b])}{\text{Jord}([A, B])}$.*
- (2) *Postupnosť navštevuje každý polouzavretý podinterval $[a, b)$ intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{b-a}{B-A} = \frac{\text{Jord}([a, b))}{\text{Jord}([A, B])}$.*
- (3) *Postupnosť navštevuje každú jordanovsky merateľnú podmnožinu M intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{\text{Jord}(M)}{\text{Jord}([A, B])}$.*
- (4) *Postupnosť navštevuje každú borelovskú jordanovsky merateľnú podmnožinu M intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{\text{Jord}(M)}{\text{Jord}([A, B])}$.*

Vetu nebudeme dokazovať. Ekvivalenciu (1) $\Leftrightarrow$ (2) vieme už z Propozície 2.5. Implikácia (2) $\Rightarrow$ (3) si vyžaduje dosť práce. Implikácie (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) sú triviálne.

Veta 2.6 ukazuje, že rovnomerná rozdelenosť postupností súvisí so Jordanovou mierou. Samozrejme, ak v tej vete hovoríme o jordanovsky merateľnej množine M a píšeme $\text{Jord}(M)$, mohli by sme namiesto toho písať $\text{Leb}(M)$, lebo ak je množina M jordanovsky merateľná, tak je aj lebesguovsky merateľná a $\text{Leb}(M) = \text{Jord}(M)$. To je však veľmi nepriamy ‘súvis’ rovnomernej rozdelenosti postupností s Lebesguovou mierou. Ak porovnáme Vetu 2.6 s nasledujúcou propozíciou, vidíme, že rovnomerná rozdelenosť postupností naozaj súvisí ‘iba’ so Jordanovou mierou a nie s Lebesguovou mierou.

Propozícia 2.7. *Neexistuje postupnosť v intervale $[A, B]$, ktorá by navštevovala každú borelovskú (teda ani každú lebesguovsky merateľnú) podmnožinu M intervalu $[A, B]$ s frekvenciou $\frac{\text{Leb}(M)}{\text{Leb}([A, B])}$.*

Dôkaz. Pripusťme, že taká postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ existuje. Spočítateľná množina $M = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ je borelovská, lebesguovsky merateľná a $\text{Leb}(M) = 0$. Daná postupnosť ju však navštevuje s frekvenciou 1. To je spor. $\square$

2.3 Rovnomerne rozdelené postupnosti a Riemannov integrál

V Sekcii 1.2 sme frekvenciu návštev (trajektórie) bodu x do množiny A prepísali pomocou charakteristickej funkcie. Analogicky možno prepísať limity vo vzťahoch (2.3) a (2.8). Ak ešte uvažíme, že na intervale $[A, B]$ sa aj Riemannov integrál funkcie $\chi_{[a,b]}$, aj Riemannov integrál funkcie $\chi_{[a,b]}$ rovnajú $b - a$,⁶ vidíme, že vzťah (2.3) možno ekvivalentne zapísať v tvare

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[a,b]}(x_n) = \frac{1}{B - A} \int_A^B \chi_{[a,b]}(x) dx. \quad (2.9)$$

a vzťah (2.8) v tvare

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[a,b]}(x_n) = \frac{1}{B - A} \int_A^B \chi_{[a,b]}(x) dx. \quad (2.10)$$

Vzhľadom na Definíciu 2.1 a Propozíciu 2.5 tak prichádzame k dôležitému pozorovaniu: Ak zavedieme podmienku⁷

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \frac{1}{B - A} \int_A^B f(x) dx \quad (\text{TASA-rr})$$

tak definíciu rovnomernej rozdelenosti postupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ ležiacej v $[A, B]$ možno preformulovať nasledovne:

$$\begin{aligned} (x_n)_{n=1}^\infty \text{ je r.r. na } [A, B] &\iff \\ &\iff (\text{TASA-rr}) \text{ platí pre charakteristické funkcie intervalov } [a, b] \subseteq [A, B] \\ &\iff (\text{TASA-rr}) \text{ platí pre charakteristické funkcie intervalov } [a, b] \subseteq [A, B]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Vychádzajúc z faktu (2.11) možno dokázať tzv. integrálne kritérium rovnomernej rozdelenosti postupnosti. Jeho dôkaz je založený na dvoch faktoch. Po prvé, využijeme charakterizáciu rovnomernej rozdelenosti pomocou polouzavretých podintervalov.⁸ Po druhé, využijeme, že ak pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ chceme dokázať podmienku (TASA-rr) pre nejakú funkciu, stačí vedieť, že sa táto funkcia dá v integrálnom zmysle natesno obaliť zhora a zdola funkciami, ktoré podmienku (TASA-rr) pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ spĺňajú. Hovorí o tom nasledujúca lema.

Lema 2.8 (Obaľovacia lema). *Nech $(x_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť ležiaca v intervale $[A, B]$ a nech funkcia $g: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovateľná.⁹ Nech pre každé $\varepsilon > 0$ existujú riemannovsky integrovateľné funkcie $\alpha_\varepsilon^-, \alpha_\varepsilon^+: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ také, že*

⁶Samozrejme, tu sa Riemannov integrál zhoduje s Lebesguovým integrálom príslušnej charakteristickej funkcie na $[A, B]$ (podľa Lebesguovej miery), ale o chvíľu uvidíme, že teória rovnomerne rozdelených postupností súvisí s Riemannovým a nie Lebesguovým integrálom.

⁷Označenie (TASA-rr) pochádza z toho, že vľavo je “time average” funkcie f pozdĺž postupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ a vpravo je “space average” funkcie f na intervale $[A, B]$, pričom “rr” naznačuje, že sa podmienka používa v súvislosti s rovnomernou rozdelenosťou. Navyše, je tu jasná analógia s podmienkou (TASA) zo Sekcie 1.3.

⁸Má to niektoré formálne výhody. Napr. delenie intervalu $[A, B]$ dáva po dvoch disjunktné polouzavreté intervaly (teraz ignorujeme bod B , ktorý nám zvýši), zatiaľ čo príslušné uzavreté podintervaly nemajú túto príjemnú vlastnosť.

⁹Predpoklad, že g je riemannovsky integrovateľná, možno vynechať, pretože vyplýva z ostatných predpokladov. Skúste to dokázať.

- (i) $\alpha_\varepsilon^-(x) \leq g(x) \leq \alpha_\varepsilon^+(x)$, $x \in [A, B]$,
(ii) $\frac{1}{B-A} \int_A^B (\alpha_\varepsilon^+(x) - \alpha_\varepsilon^-(x)) dx < \varepsilon$,
(iii) funkcie $\alpha_\varepsilon^-, \alpha_\varepsilon^+$ spĺňajú pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ podmienku (TASA-rr).

Potom aj funkcia g spĺňa pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ podmienku (TASA-rr).

Dôkaz. Fixujme na chvíľu $\varepsilon > 0$ a uvažujme o príslušných funkciách $\alpha_\varepsilon^-, \alpha_\varepsilon^+$. Všimnime si, že predpoklad (i) dáva

$$\frac{1}{B-A} \int_A^B \alpha_\varepsilon^-(x) dx \leq \frac{1}{B-A} \int_A^B g(x) dx \leq \frac{1}{B-A} \int_A^B \alpha_\varepsilon^+(x) dx$$

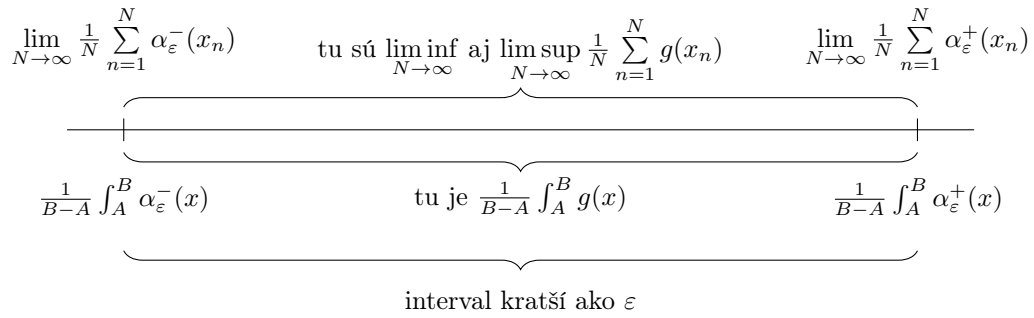
a predpoklad (ii) zase ukazuje, že dve krajné veličiny (stredné hodnoty α_ε^- a α_ε^+) majú vzdialenosť menšiu než ε . Podľa (iii) máme

$$\frac{1}{B-A} \int_A^B \alpha_\varepsilon^-(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \alpha_\varepsilon^-(x_n) \quad \text{a} \quad \frac{1}{B-A} \int_A^B \alpha_\varepsilon^+(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \alpha_\varepsilon^+(x_n).$$

Konečne, vďaka (i) je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \alpha_\varepsilon^-(x_n) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \alpha_\varepsilon^+(x_n).$$

Situáciu znázorňuje Obr. 2.1.



Obr. 2.1: K dôkazu Obaľovacej lemy

Ak tri čísla (nezávislé od ε) ležia v intervale kratšom ako ε , pričom $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, tak sa tie čísla musia rovnať. Preto existuje limita

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) = \frac{1}{B-A} \int_A^B g(x) dx,$$

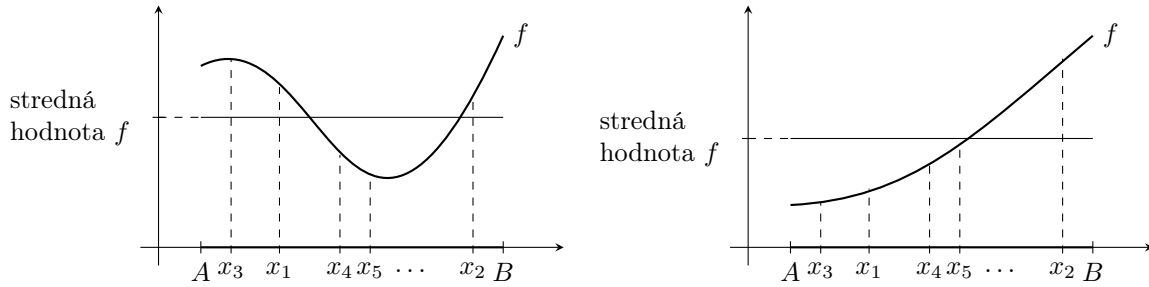
čiže funkcia g spĺňa pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ podmienku (TASA-rr). □

Veta 2.9 (Integrálne kritérium rovnomernej rozdelenosti postupnosti). *Nech $(x_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť reálnych čísel ležiaca v $[A, B]$. Potom nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné.*¹⁰

¹⁰Pre zaujímavosť poznamenajme, že implikácia (1) $\Rightarrow$ (2) sa dá využiť na približný výpočet Riemannovho integrálu $\int_A^B f(x) dx$. Na podobnej myšlienke je založený numerický výpočet integrálov tzv. metódou Monte Carlo.

- (1) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. v intervale $[A, B]$.
 (2) Podmienka TASA-rr platí pre každú riemannovsky integrovateľnú funkciu $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$.
 (3) Podmienka TASA-rr platí pre každú spojitú funkciu $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$.¹¹

Skôr než túto vetu dokážeme, pripomeňme, že veličinu $\lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{n=1}^N f(x_n)$ sme sa dohodli nazývať časovým priemerom funkcie f pozdĺž postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Veta 2.9 hovorí, že postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ležiaca v $[A, B]$ je r.r. vtedy a len vtedy, keď strednú hodnotu ľubovoľnej riemannovsky integrovateľnej (resp. spojitej) funkcie f na intervale $[A, B]$ možno počítat ako časový priemer funkcie f pozdĺž postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (viď Obr. 2.2).



Obr. 2.2: Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ležiaca v $[A, B]$ je r.r. vtedy a len vtedy, keď sa stredná hodnota ľubovoľnej riemannovsky integrovateľnej (resp. spojitej) funkcie f na intervale $[A, B]$, teda číslo $1/(B-A) \int_A^B f(x) dx$, rovná časovému priemeru funkcie f pozdĺž postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, teda číslu $\lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{n=1}^N f(x_n)$

Dôkaz. $\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ Nech (TASA-rr) platí pre každú spojitú funkciu f na $[A, B]$. Aby sme dokázali, že daná postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r., dokážeme, že (TASA-rr) platí pre charakteristické funkcie intervalov $[a, b] \subseteq [A, B]$, pozri (2.11). Fixujme taký interval $[a, b]$. Charakteristickú funkciu $\chi_{[a,b]}$ budeme zdola aj zhora aproximovať spojitými funkciami (pre ktoré podľa predpokladu (3) podmienka (TASA-rr) platí). Nech teda $\varepsilon > 0$. Ľahko vidieť, že existujú spojitú funkcie $f_{\varepsilon}^{-}, f_{\varepsilon}^{+}: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktoré

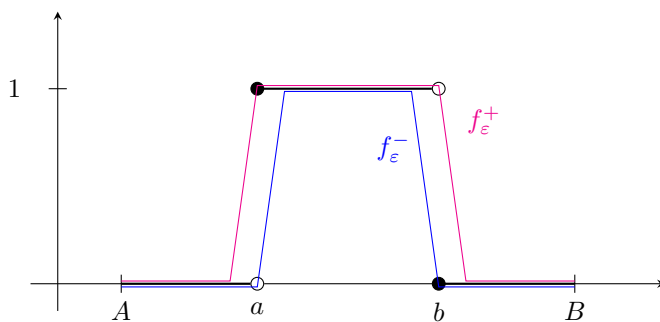
$$f_{\varepsilon}^{-}(x) \leq \chi_{[a,b]}(x) \leq f_{\varepsilon}^{+}(x), \quad x \in [A, B] \quad \text{a} \quad \int_A^B (f_{\varepsilon}^{+}(x) - f_{\varepsilon}^{-}(x)) dx < \varepsilon(B - A). \quad (2.12)$$

Napr. ak $A < a < b < B$ a $\varepsilon > 0$ je malé, zvolíme spojitú funkciu f_{ε}^{+} tak, že $f_{\varepsilon}^{+}(x) = 1$ na intervale $[a, b]$, $f_{\varepsilon}^{+}(x) = 0$ na $[A, a - \delta]$ a na $[b + \delta, B]$ pre dost' malé $\delta > 0$, $f_{\varepsilon}^{+}(x)$ je lineárna na každom zo zvyšných dvoch intervalov $[a - \delta, a]$ a $[b, b + \delta]$. Podobne sa zvolí spojitá funkcia f_{ε}^{-} , ktorá sa na $[A, a] \cup [b, B]$ rovná 0, na $[a + \delta, b - \delta]$ sa rovná 1 a je lineárna na zvyšných dvoch intervaloch s dĺžkami δ , pozri Obr. 2.3. Je zrejmé, že ak $\delta > 0$ je dostatočne malé, tak nielen nerovnosti vľavo ale aj nerovnosť vpravo v (2.12) bude splnená.

(Ak $A = a$ alebo $b = B$, je situácia dokonca jednoduchšia (kreslite grafy).) Potom podľa Obalovacej lemy podmienka (TASA-rr) platí aj pre $\chi_{[a,b]}$.

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Predpokladajme, že daná postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. Máme pre ňu dokázať podmienku (TASA-rr) pre každú riemannovsky integrovateľnú funkciu f .

¹¹Ak niektoré z tvrdení (2), (3) platí, tak ako je uvedené, pre reálne funkcie, tak zrejme platí aj pre komplexné funkcie. Stačí ho totiž použiť na reálnu aj imaginárnu časť danej komplexnej funkcie. Teraz to nepotrebujeme, ale neskôr, v Dôsledku 2.13, túto myšlienku využijeme.

Obr. 2.3: Voľba f_ε^- a f_ε^+ v prípade $A < a < b < B$

- Ak je f charakteristická funkcia nejakého intervalu $[a, b] \subseteq [A, B]$, tak (TASA-rr) platí podľa (2.11).
- Ak je f schodovitá funkcia, t.j. $f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{[a_i, b_i]}(x)$ pre nejaké po dvoch disjunktné podintervaly $[a_i, b_i]$ intervalu $[A, B]$ a nejaké reálne čísla c_i , tak (TASA-rr) platí vďaka linearite integrálu,¹² linearite sumy a linearite limity (vysvetlite podrobne).
- Nech f je teraz ľubovoľná riemannovsky integrovateľná funkcia na $[A, B]$. Na dôkaz, že pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ spĺňa podmienku (TASA-rr), použijeme Obaľovacu lemu. Zvolme preto $\varepsilon > 0$. Podľa kritéria riemannovskej integrovateľnosti existuje také delenie intervalu $[A, B]$, že horný integrálny súčet a dolný integrálny súčet funkcie f pri tomto delení sa líšia o menej ako $\varepsilon(B - A)$.¹³ Z toho ľahko vidieť (vysvetlite podrobne), že existujú schodovité funkcie $s_\varepsilon^-, s_\varepsilon^+$ také, že

$$s_\varepsilon^-(x) \leq f(x) \leq s_\varepsilon^+(x), \quad x \in [A, B] \quad \text{a} \quad \int_A^B (s_\varepsilon^+(x) - s_\varepsilon^-(x)) dx < \varepsilon(B - A).$$

Keďže pre schodovité funkcie sme (TASA-rr) už dokázali, podľa Obaľovacej lemy platí (TASA-rr) aj pre funkciu f .

(2) $\Rightarrow$ (3) Toto je triviálne, lebo spojité funkcie sú riemannovsky integrovateľné. □

Poznámka 2.10 (Charakterizácia riemannovskej integrovateľnosti pomocou r.r. postupností). Vo Vete 2.9 sme mali fixovanú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ a pomocou riemannovsky integrovateľných funkcií sme charakterizovali, kedy je tá postupnosť r.r. Urobme to teraz obrátene. Fixujme funkciu f a pýtajme sa, či možno pomocou rovnomerne rozdelených postupností charakterizovať, kedy je tá funkcia riemannovsky integrovateľná.

Nech teda $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ je nejaká ohraničená funkcia.¹⁴ Zaujímá nás súvis medzi podmienkami:

- (1) Funkcia f je riemannovsky integrovateľná na $[A, B]$.
- (2) Podmienka TASA-rr platí pre každú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$, ktorá je r.r. v $[A, B]$.

¹²Integrál lineárnej kombinácie funkcií sa rovná takej istej lineárnej kombinácii integrálov tých funkcií.

¹³Alternatívne, uvážte, že Riemannov integrál je spoločná hodnota dolného a horného Riemannovho integrálu.

¹⁴Integrálne súčty a teda aj horný a dolný Riemannov integrál sa definujú len pre ohraničené funkcie.

Predovšetkým, podľa Vety 2.9 platí $(1) \Rightarrow (2)$. Nie je však hneď jasné, či platí obrátená implikácia. Ak je naša funkcia f taká, že spĺňa (2), t.j. pozdĺž každej r.r. postupnosti v $[A, B]$ má časový priemer rovnajúci sa jej strednej hodnote, vyplýva z toho (1), t.j. že f je riemannovsky integrovateľná? Odpoveď je kladná, teda $(2) \Rightarrow (1)$, ako dokázali de Bruijn a Post v r. 1968. Ukázali dokonca trochu viac:

- Ak $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ nie je riemannovsky integrovateľná, tak sa dá v intervale $[A, B]$ zvoliť r.r. postupnosť, pozdĺž ktorej časový priemer funkcie f vôbec neexistuje.

Teda dohromady máme:

Funkcia f je riemannovsky integrovateľná na intervale vtedy a len vtedy, keď pre každú rovnomerne rozdelenú postupnosť v tom intervale platí, že existuje časový priemer funkcie f pozdĺž tej postupnosti. V takom prípade sa navyše všetky časové priemery zhodujú a rovnajú sa strednej hodnote tej funkcie na danom intervale.

Poznámka 2.11 (R.r. postupností nesúvisí s Lebesguovým integrálom). Rovnomerné rozdelenie postupností súvisí podľa Vety 2.9 s Riemannovým integrálom. Ukážeme, že nesúvisí s Lebesguovým integrálom. Naozaj, uvažujme o nasledujúcich dvoch podmienkach (porovnajte s podmienkami (1) a (2) z Vety 2.9):

- (1) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. na $[A, B]$.
- (2_L) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňa podmienku (TASA-rr) pre každú lebesguovsky integrovateľnú funkciu $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$, t.j. pre každú lebesguovsky integrovateľnú funkciu $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \frac{1}{B-A} \int_A^B f(x) d\text{Leb}(x)$$

(kde vpravo je tentoraz Lebesguov integrál¹⁵ vzhľadom na Lebesguovu mieru Leb na $[A, B]$).

Potom:

- $(2_L) \Rightarrow (1)$ To vyplýva z Vety 2.9 (a z toho, že každá riemannovsky integrovateľná funkcia je aj lebesguovsky integrovateľná a jej Riemannov a Lebesguov integrál sa rovnajú).
- $(1) \not\Rightarrow (2_L)$ Nech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je hocikáka postupnosť spĺňajúca (1), teda r.r. na $[A, B]$. Tvrdíme, že neplatí (2_L). Naozaj, nech $M \subseteq [A, B]$ je (spočítateľná) množina členov postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Potom charakteristická funkcia χ_M množiny M je lebesguovsky integrovateľná, ale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_M(x_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1 = 1 \neq 0 = \int_A^B \chi_M(x) dx .$$

Vzhľadom na Vetu 2.6 a skutočnosť, že Jordanova miera súvisí práve s Riemannovým integrálom a nie s Lebesguovým, nás tento výsledok až tak neprekvapuje.

¹⁵Riemannov integrál lebesguovsky integrovateľnej funkcie vôbec nemusí existovať.

2.4 Rovnomerne rozdelené postupnosti modulo 1

Budeme uvažovať o hocijakej (možno neohraničenej) postupnosti reálnych čísel a budeme skúmať, či postupnosť necelých častí členov tejto postupnosti¹⁶ je v intervale $[0, 1]$ rovnomerne rozdelená. Ak je tomu tak, danú postupnosť reálnych čísel nazveme rovnomerne rozdelenou modulo 1.

Zopakujme si najskôr, že (dolná) celá časť $\lfloor x \rfloor$ reálneho čísla x je najväčšie celé číslo neprevyšujúce x , teda

$$\lfloor x \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$$

a necelá časť $\{x\}$ čísla x je

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor = x \bmod 1 .$$

Napríklad $\lfloor 3, 2 \rfloor = 3$ a $\{3, 2\} = 0, 2$. Podobne $\lfloor -3, 2 \rfloor = -4$ a $\{-3, 2\} = 0, 8$. Každé reálne číslo x možno písať v tvare súčtu (dolnej) celej časti $\lfloor x \rfloor$ a necelej časti $\{x\}$:

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \quad \{x\} \in [0, 1) ,$$

napr. $3, 2 = 3 + 0, 2$ a $-3, 2 = -4 + 0, 8$.

Geometricky, necelú časť $\{x\}$ (teda $x \bmod 1$) dostaneme tak, že číslo x posunieme o také celé číslo m , aby sme dostali $x + m \in [0, 1) = I$. Potom $x + m = \{x\}$.

Vybavení týmto označením, zopakujeme hlavnú definíciu tejto kapitoly (pozri aj Propozíciu 2.5).

Definícia 2.12. Povieme, že postupnosť reálnych čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je *rovnomerne rozdelená modulo 1* (skrátene r.r. mod 1), ak je postupnosť necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne rozdelená v intervale $[0, 1]$, t.j. ak pre každé $0 \leq a < b \leq 1$ platí

$$\text{frekv}_{[a,b]}(\{x_n\}) = b - a. \quad (2.13)$$

Uvedieme tvrdenie, ktoré je jednoduchým dôsledkom Vety 2.9.

Dôsledok 2.13 (Kritérium r.r. mod 1 pomocou periodických funkcií). *Nech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné.*

- (1) *Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1.*
- (2) *Pre každú spojitú funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ s periódou 1 platí*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx .$$

- (3) *Pre každú spojitú funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou 1 platí*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx .$$

Všimnime si, že vďaka periodicite f je jedno, či v (2) a (3) vľavo píšeme $f(x_n)$ alebo $f(\{x_n\})$, takže podmienky (2) a (3) možno preformulovať aj v takom duchu, ako sme boli doteraz zvyknutí:

¹⁶tá je už ohraničená, leží v $[0, 1)$

(2') Postupnosť' necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ spĺňa podmienku (TASA-rr) pre každú spojitú funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ s periódou 1.

(3') Postupnosť' necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ spĺňa podmienku (TASA-rr) pre každú spojitú funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou 1.

Dôkaz. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Nech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, teda $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ je r.r. na $[0, 1]$. Nech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkcia s periódou 1. Potom $f(x) = g(x) + ih(x)$ pre nejaké spojité funkcie $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (tie sú tiež periodické s periódou 1, to však teraz nevyužijeme). Ak na tieto spojité funkcie g, h (zúžené na $[0, 1]$) použijeme Vetu 2.9(1) $\Rightarrow$ (3), dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\{x_n\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\{x_n\}) + i \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(\{x_n\}) \right) = \\ &= \frac{1}{1-0} \int_0^1 g(x) dx + i \frac{1}{1-0} \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Toto je triviálne.

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ Predpokladajme, že každá spojitá funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou 1 spĺňa rovnosť z (3). Ideme dokázať, že daná postupnosť' $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, teda že $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ je r.r. na $[0, 1]$. Podľa (2.11) stačí dokázať, že pre každý polouzavretý inaterval $[a, b] \subseteq [0, 1]$ charakteristická funkcia $\chi_{[a,b]}$ spĺňa podmienku (TASA-rr) pre postupnosť' necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ a pre $A = 0$, $B = 1$. To je podobná situácia ako v dôkaze Vety 2.9(3) $\Rightarrow$ (1), preto aj postupovať budeme podobne. Fixujme $\varepsilon > 0$ a zvolme najskôr, podobne ako v spomínanom dôkaze Vety 2.9(3) $\Rightarrow$ (1), spojité funkcie $f_{\varepsilon}^{-}, f_{\varepsilon}^{+}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktoré platí

$$f_{\varepsilon}^{-}(x) \leq \chi_{[a,b]}(x) \leq f_{\varepsilon}^{+}(x), \quad x \in [0, 1] \quad \text{a} \quad \int_0^1 (f_{\varepsilon}^{+}(x) - f_{\varepsilon}^{-}(x)) dx < \varepsilon \quad (2.14)$$

a navyše aj

$$f_{\varepsilon}^{-}(0) = f_{\varepsilon}^{-}(1), \quad f_{\varepsilon}^{+}(0) = f_{\varepsilon}^{+}(1). \quad (2.15)$$

(To je o trochu ťažšia úloha ako bolo nájsť funkcie $f_{\varepsilon}^{-}, f_{\varepsilon}^{+}$ v dôkaze Vety 2.9(3) $\Rightarrow$ (1), ale presvedčte sa, že sa to dá, dokonca aj v prípade, keď $a = 0$ alebo $b = 1$.)

Vďaka dodatočnej podmienke (2.15) môžeme funkcie $f_{\varepsilon}^{-}, f_{\varepsilon}^{+}$ periodicky, s periódou 1, predĺžiť na celú reálnu os. Takto predĺžené funkcie $\widetilde{f_{\varepsilon}^{-}}, \widetilde{f_{\varepsilon}^{+}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sú aj spojité. Môžeme preto na ne použiť náš predpoklad (3), takže

$$\varphi \in \{\widetilde{f_{\varepsilon}^{-}}, \widetilde{f_{\varepsilon}^{+}}\} \implies \int_0^1 \varphi(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(x_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(\{x_n\}).$$

To znamená, že pôvodné funkcie $f_{\varepsilon}^{-}, f_{\varepsilon}^{+}$ na intervale $[0, 1]$ spĺňajú podmienku (TASA-rr) pre postupnosť' necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ a pre $A = 0$ a $B = 1$. Podľa Obaľovacej lemy podmienka (TASA-rr) platí pre postupnosť' necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ a pre $A = 0$ a $B = 1$ aj pre funkciu $\chi_{[a,b]}$, čo sme potrebovali dokázať. $\square$

2.5 Weylovo kritérium pre rovnomernú rozdelenosť modulo 1

Ak chceme pomocou Dôsledku 2.13 dokázať, že daná postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, mali by sme overiť, či pre každú (!) spojitú funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (prípadne $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) s periódou 1 platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (2.16)$$

Pomohlo by, keby to stačilo overiť pre nejaký menší vybraný súbor funkcií. Hermann Weyl¹⁷ si uvedomil, že to stačí overiť pre spočítateľne veľa funkcií $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaných vzťahom:

$$f_k(x) = \exp(i2\pi kx) = e^{i2\pi kx}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Pripomeňme, že podľa Eulerovej formuly je

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

teda $f_k(x) = \cos(2\pi kx) + i \sin(2\pi kx)$, pozri Obr. 2.4.

Teda už systém funkcií $f_k(x) = e^{i2\pi kx}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je dostatočne bohatý na to, aby sme pomocou neho mohli overovať rovnomerné rozdelenie mod 1 — platnosť rovnosti (2.16) pre uvedené funkcie f_k je nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bola r.r. mod 1:

- Nutnosť je zrejماً. Funkcie $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sú spojité a periodické s periódou 1 (vysvetlite). Preto, ak $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, podľa Dôsledku 2.13 naozaj platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi kx_n} = \int_0^1 e^{i2\pi kx} dx, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

- Postačujúciosť už zrejماً nie je. Weyl to však dokázal a je to jeden z najdôležitejších faktov teórie rovnomernej rozdelenosti modulo 1.

Z toho čo sme povedali, sa teda zdá, že Weylovo kritérium bude znieť takto: Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy keď

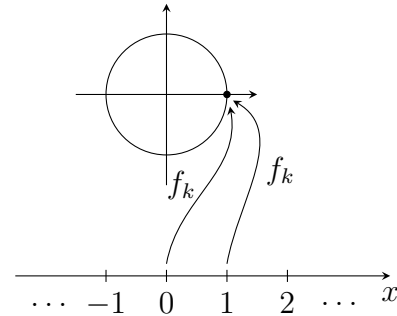
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi kx_n} = \int_0^1 e^{i2\pi kx} dx, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

V skutočnosti možno Weylovo kritérium ešte trochu zjednodušiť, ak integrál vpravo nahradíme jeho hodnotou. Ľahký výpočet dá, že pre každé celé $k \neq 0$ platí (doplňte detaily):

$$\int_0^1 e^{i2\pi kx} dx = \int_0^1 \cos(2\pi kx) dx + i \int_0^1 \sin(2\pi kx) dx = 0 + i0 = 0, \quad (2.17)$$

¹⁷Hermann Weyl (1885 – 1955) bol nemecký matematik, teoretický fyzik a filozof.

¹⁸Mohli by sme písať aj $k \in \mathbb{Z}$, ale pre $k = 0$ je $f_0(x) = 1$ a pre takú funkciu rovnosť (2.16) triviálne platí. Navyše, ide o rovnosť $1 = 1$, zatiaľ čo pre $k \neq 0$, ako uvidíme, integrál vpravo je nulový. Máme preto aspoň dva dôvody, aby sme triviálny prípad $k = 0$ nezahrnuli do úvah.



Obr. 2.4: f_k zobrazuje reálnu os na jednotkovú kružnicu v $\mathbb{C}$. Všetky celé čísla sa zobrazia do bodu $1 + 0i$. Ak x cestuje od n po $n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$), tak $f_k(x)$ obíde kružnicu $|k|$ krát (v kladnom zmysle ak $k > 0$, v zápornom ak $k < 0$).

alebo elegantnejšie:

$$\int_0^1 e^{i2\pi kx} dx = \left[\frac{1}{i2\pi k} e^{i2\pi kx} \right]_{x=0}^1 = 0.$$

Ďalšie zjednodušenie je, že namiesto $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ stačí uvažovať $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Weylovo kritérium teda znie nasledovne.

Veta 2.14 (Weylovo kritérium; H. Weyl 1916). *Nech $(x_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť reálnych čísel. Potom nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné.*

- (1) *Postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1.*
- (2) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi kx_n} = 0$ *platí pre každé $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*
- (3) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi kx_n} = 0$ *platí pre každé $k \in \mathbb{N}$.*

Dôkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Toto sme dokázali v diskusii pred vetou.

(2) $\Rightarrow$ (1) Predpokladajme (2). Nech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je ľubovoľná spojité funkcia s periódou 1. Stačí, ak dokážeme, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (2.18)$$

Naozaj, potom podľa Dôsledku 2.13 dostaneme, že $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1 a dôkaz bude skončený.

Nech teda $\varepsilon > 0$. K dôkazu (2.18) stačí ukázať, že

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \right| \leq 3\varepsilon, \quad \text{pre všetky dostatočne veľké } N. \quad (2.19)$$

Využijeme hlbokú Weierstrassovu vetu z analýzy, podľa ktorej k ľubovoľnej spojitej funkcii $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ s periódou 1 existuje trigonometrický polynóm $\Psi(x)$, ktorý danú funkciu rovnomerne aproximuje s presnosťou ε . Pritom trigonometrický polynóm je konečná lineárna kombinácia (s komplexnými koeficientami) funkcií tvaru $e^{i2\pi kx}$ pre nejaké celé čísla k .¹⁹ Teda k našej funkcii f existuje trigonometrický polynóm

$$\Psi(x) = \sum_{\ell=1}^m c_\ell e^{i2\pi k_\ell x}, \quad c_\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad k_\ell \in \mathbb{Z} \quad (2.20)$$

taký, že

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \Psi(x)| \leq \varepsilon. \quad (2.21)$$

¹⁹Všimnite si, že aj trigonometrický polynóm je spojitá funkcia $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ s periódou 1.

Použijeme odhad:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \right| \\
& \leq \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \Psi(x) dx \right| + \left| \int_0^1 \Psi(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Psi(x_n) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Psi(x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \right| \\
& = \underbrace{\left| \int_0^1 (f(x) - \Psi(x)) dx \right|}_A + \underbrace{\left| \int_0^1 \Psi(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Psi(x_n) \right|}_B + \underbrace{\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\Psi(x_n) - f(x_n)) \right|}_C.
\end{aligned}$$

Vďaka (2.21) je $A \leq \varepsilon$ (vysvetlite podrobne, treba využiť aj fakt, že absolútna hodnota integrálu je menšia alebo sa rovná integrálu absolútnej hodnoty). Podobne je $C \leq \varepsilon$ pre každé N (opäť vysvetlite podrobne). Aby sme dostali požadovaný odhad (2.19), treba ešte dokázať, že pre všetky dostatočne veľké N je $B \leq \varepsilon$. Aby sme to dokázali, upravíme člen B pomocou (2.20):

$$\begin{aligned}
B &= \left| \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^m c_\ell e^{i2\pi k_\ell x} \right) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{\ell=1}^m c_\ell e^{i2\pi k_\ell x_n} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{\ell=1}^m \int_0^1 c_\ell e^{i2\pi k_\ell x} dx - \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c_\ell e^{i2\pi k_\ell x_n} \right| \\
&= \left| \sum_{\ell=1}^m c_\ell \left(\int_0^1 e^{i2\pi k_\ell x} dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} \right) \right| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^m \underbrace{\left| c_\ell \left(\int_0^1 e^{i2\pi k_\ell x} dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} \right) \right|}_{B_\ell} = \sum_{\ell=1}^m |c_\ell| \cdot |B_\ell|.
\end{aligned}$$

Rozlíšime dva prípady:

- $k_\ell \neq 0$. Potom podľa (2.17) sa integrál v B_ℓ rovná nule. Ďalej, podľa nášho predpokladu (2) je $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} = 0$, takže existuje N_ℓ také, že pre každé $N \geq N_\ell$ je

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{m|c_\ell|}.$$

Z toho dostávame

$$|c_\ell| \cdot |B_\ell| = |c_\ell| \cdot \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{pre každé } N \geq N_\ell.$$

- $k_\ell = 0$. Potom sa integrál v B_ℓ rovná 1 a dostávame

$$|c_\ell| \cdot |B_\ell| = |c_\ell| \cdot \left| 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1 \right| = |c_\ell| \cdot |1 - 1| = 0 \quad \text{pre každé } N.$$

Teraz je už zrejmé, že pre každé dostatočne veľké N je

$$B = \sum_{\ell=1}^m |c_\ell| \cdot |B_\ell| \leq \sum_{\ell=1}^m \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon,$$

čo sme potrebovali dokázať.

(2) $\Rightarrow$ (3) Toto je triviálne.

(3) $\Rightarrow$ (2) Nech $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k x_n} = 0$ platí pre každé $k \in \mathbb{N}$. Aby sme dokázali (2), stačí ukázať, že pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ platí aj $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi(-k)x_n} = 0$. Fixujme teda $k \in \mathbb{N}$. Využívajúc predpoklad, prechod ku komplexne združeným číslam dá

$$\overline{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k x_n}} = \overline{0} = 0.$$

Konjugácia je spojité zobrazenie $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, teda $\lim_{N \rightarrow \infty} z_N = z$ implikuje $\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{z_N} = \overline{z} = \overline{\lim_{N \rightarrow \infty} z_N}$. Ak ešte uvažíme, že konjugácia zachováva súčet aj súčin, t.j. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ a $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$, dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k x_n}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k x_n} \right)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \overline{(e^{i2\pi k x_n})} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi(-k)x_n}, \end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Príklad 2.15 (Postupnosť násobkov iracionálneho čísla je r.r. mod 1). Nech θ je iracionálne číslo. Ukážeme, že postupnosť $(n\theta)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1.

Použijeme Weylovo kritérium. Pre každé $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ platí:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k n \theta} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (e^{i2\pi k \theta})^n \right| = \frac{1}{N} \cdot |e^{i2\pi k \theta}| \cdot \frac{|e^{i2\pi k N \theta} - 1|}{|e^{i2\pi k \theta} - 1|}.$$

(Využili sme, že kvocient $e^{i2\pi k \theta}$ je rôzny od 1. Naozaj, ak $e^{i2\pi k \theta} = 1$, tak $2\pi k \theta$ je celočíselný násobok 2π , teda θ je racionálne číslo, spor.)

Pre každé φ je $|e^{i\varphi}| = 1$. Preto $|e^{i2\pi k N \theta} - 1| \leq |e^{i2\pi k N \theta}| + |-1| = 2$. Zároveň je

$$\begin{aligned} |e^{i\varphi} - 1| &= |(\cos \varphi - 1) + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + 1 + \sin^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = 2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|. \end{aligned}$$

Dostávame tak

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k n \theta} \right| \leq \frac{1}{N} \cdot 1 \cdot \frac{2}{2 |\sin(\pi k \theta)|} = \frac{1}{N |\sin(\pi k \theta)|} \rightarrow 0$$

pre $N \rightarrow \infty$. Odtiaľ $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k n \theta} = 0$ a Weylovo kritérium dáva, že postupnosť $(n\theta)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1.

Platí trochu viac: Postupnosť $(n\theta)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy, keď θ je iracionálne, pozri Cvičenie 2.4. Tvrdenie, že pre iracionálne θ je postupnosť $(n\theta)_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1, je mierne zosilnené v Cvičení 2.7, podľa ktorého je pre iracionálne θ aj postupnosť $(n\theta + c)_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1. Bez dôkazu uvidíme nasledujúce, omnoho silnejšie tvrdenie.

Veta 2.16 (Weylova veta o polynómoch). *Nech $p(n) = \theta_k n^k + \dots + \theta_1 n + \theta_0$ je polynóm s reálnymi koeficientami. Ak aspoň jeden z koeficientov $\theta_1, \dots, \theta_k$ (teda rôznych od konštantného člena) je iracionálny, tak postupnosť $(p(n))_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1.*

Príklad 2.17. Špeciálne, ak θ je iracionálne číslo, tak nielen postupnosť $(n\theta)_{n=1}^{\infty}$ (pozri Príklad 2.15) ale napr. aj postupnosť $(n^2\theta)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1.

2.6 *O rovnomernej rozdelených postupnostiach v $\mathbb{R}^s$

Pojem rovnomernej rozdelenosti postupnosti možno analogicky definovať aj pre postupnosti vektorov v $\mathbb{R}^s$. My sa sústredíme len na postupnosti rovnomernej rozdelenosti modulo 1.

Ak máme vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s,$$

môžeme prirodzene definovať jeho celú časť a necelú časť:

$$[\mathbf{x}] := ([x_1], \dots, [x_s]), \quad \{\mathbf{x}\} := (\{x_1\}, \dots, \{x_s\}).$$

Ako obvykle, $\mathbf{0}$ bude označovať nulový vektor $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^s$.

Pre postupnosť vektorov v $\mathbb{R}^s$, definícia rovnomernej rozdelenosti modulo 1 vyjadruje, že pre každý s -rozmerný kváder (v jednotkovej s -rozmernej kocke) sa frekvencia, s akou necelé časti týchto vektorov ležia v tom kvádri, rovná s -rozmernému objemu toho kvádra. V súlade s Definíciou 2.12 zvolíme polouzavreté kvádre (podobne ako v dimenzii jedna, definícia s uzavretými kvádrami by bola ekvivalentná).

Definícia 2.18. Povieme, že postupnosť vektorov $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,s}) \in \mathbb{R}^s$, $n = 1, 2, \dots$, je rovnomernej rozdelená modulo 1 (skrátene r.r. mod 1), ak pre každý výber s intervalov $[a_1, b_1), \dots, [a_s, b_s) \subseteq [0, 1]$ platí

$$\text{frekv}_{[a_1, b_1) \times \dots \times [a_s, b_s)}(\{x_n\}) = \prod_{i=1}^s (b_i - a_i). \quad (2.22)$$

Analogicky ako pre postupnosti reálnych čísel, možno budovať teóriu rovnomernej rozdelených postupností vektorov v $\mathbb{R}^s$. Nebudeme to robiť, ale bez dôkazov uvidíme aspoň hlavné tvrdenia. Predovšetkým, platí analógia Vety 2.9.

Veta 2.19 (Integrálne kritérium rovnomernej rozdelenosti postupnosti vektorov). *Majme postupnosť vektorov $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,s}) \in \mathbb{R}^s$, $n = 1, 2, \dots$. Potom nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné.*

(1) Postupnosť $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1.

(2) Pre každú riemannovsky integrovateľnú funkciu $f: [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\{x_{n,1}\}, \dots, \{x_{n,s}\}) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s .$$

(3) Pre každú spojitú funkciu $f: [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\{x_{n,1}\}, \dots, \{x_{n,s}\}) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s .$$

Funguje aj analógia Weylovho kritéria. Namiesto súčinu kx_n však v ňom tentoraz bude vystupovať skalárny súčin vektorov $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s)$ a $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,s})$, teda

$$\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle = k_1 x_{n,1} + \cdots + k_s x_{n,s} .$$

Veta 2.20 (Weylovo kritérium pre postupnosti vektorov). *Nech $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,s}) \in \mathbb{R}^s$, $n = 1, 2, \dots$. Potom nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné.*

(1) *Postupnosť vektorov $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1.*

(2) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle} = 0$ *platí pre každý vektor $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$.*

Porovnanie tejto vety s jednorozmerným Weylovým kritériom, teda s Vetou 2.14 dáva nasledujúce pozorovanie.

Dôsledok 2.21. *Nech $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^s$, $n = 1, 2, \dots$ je postupnosť vektorov. Potom nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné.*

(a) *Postupnosť vektorov $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^s$ je r.r. mod 1.*

(b) *Pre každý vektor $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ je postupnosť čísel $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle \in \mathbb{R}$ r.r. mod 1.*

Dôkaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Nech platí (a) a nech $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$. Potom pre každé číslo $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je aj vektor $c\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$. Využívajúc (a), podľa Vety 2.20 dostávame $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi \langle c\mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle} = 0$. Lenže $\langle c\mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle = c \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle$. Teda pre každé $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi c \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle} = 0$. Weylovo kritérium pre postupnosti čísel tak dáva, že postupnosť čísel $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle$ je r.r. mod 1, čiže sme dostali (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Nech platí (b) a nech $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$. Keďže je postupnosť čísel $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle$ r.r. mod 1, podľa Weylovho kritéria pre postupnosti čísel je $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi c \langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle} = 0$ pre každé $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Voľbou $c = 1$ dostaneme podmienku (2) z Vety 2.20, takže podľa tej vety je postupnosť vektorov $\mathbf{x}_n$ r.r. mod 1, čiže sme dostali (a). $\square$

Podľa Príkladu 2.15 a Cvičenia 2.4, postupnosť $(n\theta)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy, keď θ je iracionálne číslo. Vetu 2.20, alebo ešte lepšie Dôsledok 2.21, možno použiť v nasledujúcej všeobecnejšej, “s-rozmernej” verzii tohto faktu.

Najskôr však sformulujeme jednoduchú lemu.

Lema 2.22. *Nech $\theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbb{R}$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(a) Čísla $1, \theta_1, \dots, \theta_s$ sú racionálne nezávislé, t.j. lineárne nezávislé nad poľom racionálnych čísel.

(b) Pre každý vektor $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ je číslo $\theta = k_1\theta_1 + \dots + k_s\theta_s$ iracionálne.

Dôkaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Nech platí (a) a nech neplatí (b). Potom existuje vektor $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ tak, že číslo $\theta = k_1\theta_1 + \dots + k_s\theta_s$ je racionálne, napr.

$$k_1\theta_1 + \dots + k_s\theta_s = \frac{p}{q}.$$

Potom však $(-p) \cdot 1 + (qk_1)\theta_1 + \dots + (qk_s)\theta_s = 0$ a keďže niektoré z čísel qk_i je nenulové, máme spor s (a).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Nech platí (b) a nech neplatí (a). Potom existujú $r_0, r_1, \dots, r_s \in \mathbb{Q}$, nie všetky nulové, tak, že

$$r_0 \cdot 1 + r_1\theta_1 + \dots + r_s\theta_s = 0. \quad (2.23)$$

Ak $r_1 = \dots = r_s = 0$, tak aj $r_0 = 0$, čo je spor s tým, že aspoň jedno $r_i \neq 0$. Preto $r_i \neq 0$ pre niektoré $i \in \{1, \dots, s\}$ a podľa (b) je teda číslo $r_1\theta_1 + \dots + r_s\theta_s$ iracionálne. Potom z (2.23) dostaneme, že r_0 je iracionálne, spor. $\square$

Propozícia 2.23. *Nech $\theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbb{R}$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(1) *Postupnosť vektorov $\mathbf{x}_n = (n\theta_1, \dots, n\theta_s)$, $n = 1, 2, \dots$ je r.r. mod 1.*

(2) *Čísla $1, \theta_1, \dots, \theta_s$ sú racionálne nezávislé.*

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľný vektor $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$. Potom

$$\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}_n \rangle = k_1 \cdot n\theta_1 + \dots + k_s \cdot n\theta_s = n \cdot \underbrace{(k_1\theta_1 + \dots + k_s\theta_s)}_{\theta}.$$

Podľa Dôsledku 2.21 je teda postupnosť vektorov $\mathbf{x}_n$ r.r. mod 1 (čiže platí (1)) vtedy a len vtedy, keď pre každý vektor $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ je r.r. mod 1 postupnosť čísel $n\theta$ kde $\theta = k_1\theta_1 + \dots + k_s\theta_s$. Lenže my vieme, že táto postupnosť čísel je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy, keď θ je iracionálne. To však podľa Lemy 2.22 platí vtedy a len vtedy, keď sú čísla $1, \theta_1, \dots, \theta_s$ racionálne nezávislé, čiže keď platí (2). $\square$

2.7 Cvičenia a projekty

Cvičenie 2.1. Skonstruujte postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ v množine X tak, aby pre nejakú podmnožinu A frekvencia $\text{frekv}_A(x_n)$ vôbec neexistovala (napr. pre $X = [0, 1]$, $A = [0, 1/2]$).

Cvičenie 2.2. Nech g je afinné zobrazenie, ktoré zobrazuje interval $[A, B]$ na interval $[C, D]$. Nech $\alpha = (x_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť v $[A, B]$ a $\omega = (g(x_n))_{n=1}^\infty$ jej obraz v $[C, D]$. Dokážte, že α je r.r. v $[A, B]$ vtedy a len vtedy, keď ω je r.r. v $[C, D]$. Presvedčte sa, že analogické tvrdenie pre homeomorfizmy neplatí.

Cvičenie 2.3. Ukážte, že ak je postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ r.r. v $[A, B]$, tak je hustá v intervale $[A, B]$. Obrátené tvrdenie neplatí. (Porovnaj s Príkladom 2.2.)

Cvičenie 2.4. Ak r je racionálne číslo, tak postupnosť $\omega = (nr)_{n=1}^{\infty}$ nie je r.r. mod 1. (Porovnajte s Príkladom 2.15. Pre silnejšie tvrdenie pozri Cvičenie 2.7.)

Cvičenie 2.5. Pomocou Weylovho kritéria dokážte, že ak postupnosť $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, tak aj postupnosť $\omega_{\times m} = (m \cdot x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, pre každé $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Cvičenie 2.6. Dokážte, že ak postupnosť $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, tak aj postupnosť $\omega_{+c} = (x_n + c)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, pre každé $c \in \mathbb{R}$.

Cvičenie 2.7. Nech $\theta, c \in \mathbb{R}$. Dokážte, že postupnosť $(n\theta + c)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy keď θ je iracionálne.

Cvičenie 2.8. Ak sú postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1, je potom nevyhnutne aj postupnosť $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1?

Cvičenie 2.9. Dokážte, že číslo $\log_{10} 2$ je iracionálne. Zovšeobecnite.

Cvičenie 2.10. Ak je prirodzené číslo zapísané v dekadickej sústave, tak najľavejšiu cifru v tomto zápise nazývame *vedúcou cifrou* toho prirodzeného čísla (napr. 2018 má vedúcu cifru 2). Hovoríme tiež, že dané prirodzené číslo *začína* tou cifrou (teda 2018 začína cifrou 2). Uvažujme o postupnosti mocnín dvojky:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \dots$$

a príslušnej postupnosti prvých cifier:

$$2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, \dots$$

- (1) (*Gelfandov problém.*) Nachádza sa v postupnosti prvých cifier mocnín dvojky cifra 7? Inak povedané, môže mocnina dvojky začínať sedmičkou?
- (2) Nech $r \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Určte frekvenciu, s akou 2^n začína cifrou r .
- (3) Je pravda, že mocnina dvojky môže začínať ľubovoľnou skupinou cifier, v ktorej na začiatku nie je 0? (Napri., existuje také prirodzené n , že 2^n začína skupinou cifier 2018?) Aká je frekvencia, s akou sa 2^n začína danou skupinou cifier?

Cvičenie 2.11. Určte frekvenciu, s akou má 2^n (v dekadickom zápise) druhú cifru zľava rovnú $r \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (napr. 2018 má druhú cifru zľava rovnú 0).

Cvičenie 2.12. Ukážte, že vo Weylovej vete o polynómoch platí dokonca ekvivalencia. Ak sú totiž koeficienty $\theta_1, \dots, \theta_k$ racionálne, tak $(p(n))_{n=1}^{\infty}$ nie je r.r. mod 1.

Cvičenie 2.13. Vyšetrite súvis medzi nasledujúcimi dvomi tvrdeniami.

- (1) Postupnosť vektorov $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,s})$, $n = 1, 2, \dots$, je r.r. mod 1.
- (2) Pre každé $k = 1, \dots, s$ je postupnosť k -tých súradníc $(x_{n,k})_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1.

Cvičenie 2.14. Čísla $1, \theta$ sú racionálne nezávislé vtedy a len vtedy, keď θ je iracionálne. Dokážte to jednak na základe definície a jednak pomocou Lemy 2.22.

Projekt 2.15. Zovšeobecnite Cvičenia 2.10 a 2.11 (namiesto dvojky uvažujte o iných číslach a namiesto začiatkovej skupiny cifier uvažujte o všeobecnejších skupinách cifier).

Kapitola 3

Niektoré pojmy z teórie miery

Predpokladáme znalosť teórie miery a integrálu. Tu len zopakujeme/pridáme niekoľko pojmov.

3.1 σ -algebry a miery

Nech X je nejaká pevne zvolená základná množina. Systém všetkých jej podmnožín budeme označovať symbolom 2^X . Teda zápisy $E \subseteq X$ a $E \in 2^X$ sú rovnocenné. Keď budeme hovoriť o množinách, budeme mať na mysli podmnožiny množiny X . Keď budeme hovoriť o systémoch množín, budeme mať na mysli podsystémy systému 2^X .

Ak $E \subseteq X$, tak komplement (doplňok) množiny E v množine X , teda množinu $X \setminus E$, budeme označovať aj E^C . Pripomeňme De Morganove pravidlá:

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \right)^C = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda^C, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \right)^C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda^C$$

Ak množiny E_λ , $\lambda \in \Lambda$ sú po dvoch disjunktné, budeme namiesto $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ písať aj $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. Pripomeňme dve základné definície teórie miery.

Nejaký systém podmnožín množiny X sa nazýva σ -algebra, ak obsahuje celú množinu X a je uzavretý na základné operácie s množinami: prechod ku komplementu, konečné a spočítateľné zjednotenia, konečné a spočítateľné prieniky. V definícii stačí požadovať len niečo z toho, zvyšok dostaneme ako dôsledky. Je veľa možností na to, čo sa požaduje a čo sa potom odvodí ako dôsledky. Obvyklá definícia je nasledovná.

Definícia 3.1. Nech $\mathcal{A}$ je nejaký systém podmnožín množiny X . Hovoríme, že $\mathcal{A}$ je σ -algebra na X , ak

- (a) $X \in \mathcal{A}$,
- (b) $A \in \mathcal{A} \implies A^C \in \mathcal{A}$ (uzavretosť na komplementy),
- (c) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (uzavretosť na spočítateľné zjednotenia).

Všimnite si, že podmienky (a) a (b) dávajú, že $\emptyset \in \mathcal{A}$. Zrejme $\{\emptyset, X\}$ je najmenšia a 2^X je najväčšia σ -algebra na X . Pripomeňme, že prienik ľubovoľného systému σ -algebier na X je opäť σ -algebra na X . Ak $\mathcal{G}$ je nejaký systém podmnožín množiny X , tak existuje najmenšia σ -algebra

na X obsahujúca $\mathcal{G}$ (je to práve prienik všetkých σ -algebier na X , ktoré obsahujú $\mathcal{G}$). Je to tzv. σ -algebra generovaná systémom $\mathcal{G}$ a označuje sa $\sigma(\mathcal{G})$. Systém $\mathcal{G}$ sa nazýva jej generátor.

Ak $\mathcal{A}$ je σ -algebra na X , tak $(X, \mathcal{A})$ sa nazýva *merateľný priestor* a množiny z $\mathcal{A}$ sa nazývajú merateľné množiny alebo presnejšie $\mathcal{A}$ -merateľné množiny. Každú funkciu $\mathcal{A} \rightarrow [-\infty, \infty]$ (teda zobrazenie z $\mathcal{A}$ do rozšírenej reálnej osi) nazývame *množinová funkcia*.

Definícia 3.2. Miera na merateľnom priestore $(X, \mathcal{A})$ je množinová funkcia $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, \infty]$ s vlastnosťami:

- (i) definičný obor $\mathcal{A}$ miery μ je nejaká σ -algebra na X ,
- (ii) μ je nezáporná,
- (iii) μ je σ -aditívna, teda

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \text{ po dvoch disjunktné} \implies \mu \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

- (iv) $\mu(\emptyset) = 0$.

Ak $(X, \mathcal{A})$ je merateľný priestor a μ miera na ňom, tak $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sa nazýva *priestor s mierou*.

V definícii síce hovoríme o miere na merateľnom priestore $(X, \mathcal{A})$, ale ak nebude môcť dôjsť k nedorozumeniu, trochu menej presne budeme hovoriť aj o miere (definovanej) na σ -algebre $\mathcal{A}$, či dokonca o miere na X . Obvykle budeme (mlčky) predpokladať, že základná množina X je neprázdna, inak nie je veľmi čo skúmať.

Miera je teda nezáporná, σ -aditívna množinová funkcia definovaná na σ -algebre taká, že $\mu(\emptyset) = 0$. Platí:

- ak μ spĺňa (i)-(iii) a $\mu(E) < \infty$ pre aspoň jednu množinu E , tak platí aj (iv).

Teda ak by sme vynechali podmienku (iv), pribrali by sme do úvahy len takú množinovú funkciu, ktorá každej množine z $\mathcal{A}$ priraduje hodnotu $+\infty$. Inak povedané, podmienka (iv) znamená len to, že túto nezaujímavú množinovú funkciu nebudeme nazývať mierou.

Miera má mnohé ďalšie vlastnosti, nielen tie, čo explicitne vystupujú v definícii miery. Platí napríklad, že ak μ je miera na σ -algebre $\mathcal{A}$ a $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$), tak:

- (1) $A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (aditívnosť)
- (2) $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ (monotónnosť)
- (3) $A \subseteq B, \mu(A) < \infty \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ (subtraktívnosť s podmienkou konečnosti)
- (4) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (subaditívnosť)
- (5) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) (\equiv \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n))$$

(polospojitosť zdola)

(6) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots, \mu(A_{n_0}) < \infty$ pre nejaké $n_0 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) (\equiv \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n))$$

(polospojitosť zhora)

(7)

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

(σ -subaditívnosť)

Príklad 3.3. Nech X je množina. Na σ -algebre 2^X všetkých podmnožín množiny X definujeme funkciu $\mu: 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ tak, že pre každú množinu $A \subseteq X$ položíme

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{počet prvkov množiny } A, & \text{ak } A \text{ je konečná,} \\ +\infty, & \text{ak } A \text{ je nekonečná.} \end{cases}$$

Potom μ je zrejmé miera. Nazývame ju *sčítacia miera na X* . Pre zovšeobecnenie pozri Cvičenie 3.1.

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Pripomeňme, že množiny z $\mathcal{B}$ sa nazývajú *merateľné množiny* alebo presnejšie $\mathcal{B}$ -merateľné množiny. Samozrejme, ak hovoríme, že nejaká množina má takú či onakú mieru, napr. že má kladnú mieru, znamená to automaticky, aj ak to explicitne nepoviem, že je merateľná, veď inak by sa o jej miere ani nedalo hovoriť.

Pripomeňme ďalej, že

- μ je *netriviálna miera* (alebo *nenulová miera*), ak $\mu(X) > 0$;
- μ je *konečná miera*, ak $\mu(X) < \infty$;
- μ je σ -*konečná miera*, ak X je zjednotením spočítateľne veľa množín s konečnými mierami, teda $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, $\mu(S_i) < \infty$, $i = 1, 2, \dots$;
- μ je *pravdepodobnostná miera*, ak $\mu(X) = 1$. V takom prípade hovoríme, že $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je *pravdepodobnostný priestor*.

V priestore s triviálnou mierou má každá merateľná množina nulovú mieru. Lebesguova miera na intervale $[0, 1]$ je konečná a dokonca pravdepodobnostná. Lebesguova miera v $\mathbb{R}$ je σ -konečná (to dokazuje napr. vyjadrenie $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, +n]$ alebo $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$ apod.), nie je však konečná.

3.2 Zúplnenie miery

Pripomeňme fakty o zúplnení miery.

Definícia 3.4. V priestore s mierou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sa miera μ nazýva *úplná*, ak podmienky $Z \subseteq A$ a $\mu(A) = 0$ implikujú $Z \in \mathcal{A}$. Potom, vďaka monotónnosti miery μ je aj $\mu(Z) = 0$.

Poznamenajme, že napr. zúženie vonkajšej miery μ^* na σ -algebru μ^* -merateľných množín je úplná miera. Lebesguova miera v $\mathbb{R}^n$ sa štandardne definuje práve takto, preto vidieť, že je na σ -algebre všetkých lebesguovsky merateľných množín úplná.

Každý priestor s mierou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sa dá zúplniť tak, že mieru μ rozšírime na mieru $\bar{\mu}$ definovanú na väčšej σ -algebre $\bar{\mathcal{A}}$ generovanej σ -algebrou $\mathcal{A}$ a systémom všetkých podmnožín množín s mierou nula.

Veta 3.5. *Nech μ je miera na σ -algebre $\mathcal{A}$ a nech $\mathcal{Z}$ je systém všetkých podmnožín množín nulovej miery. Nech $\bar{\mathcal{A}} := \{A \cup Z : A \in \mathcal{A}, Z \in \mathcal{Z}\}$. Definujme $\bar{\mu}$ na $\bar{\mathcal{A}}$ vzťahom $\bar{\mu}(A \cup Z) = \mu(A)$.*

Potom:

- (1) $\bar{\mathcal{A}}$ je σ -algebra obsahujúca $\mathcal{A}$ aj $\mathcal{Z}$.
- (2) $\bar{\mu}$ je korektne definovaná miera na $\bar{\mathcal{A}}$, ktorá sa na $\mathcal{A}$ zhoduje s μ .
- (3) $\bar{\mu}$ je úplná ($\bar{\mu}$ sa nazýva zúplnenie miery μ).

Poznamenajme, že množiny s nulovou mierou sa niekedy nazývajú *nulové množiny*. Teda v tejto vete je $\mathcal{Z}$ systém všetkých podmnožín všetkých nulových množín. Ak ešte podmnožinu nulovej množiny nazveme *sub-nulová množina*, tak $\mathcal{Z}$ je systém všetkých sub-nulových množín v priestore $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Miera μ je teda úplná, ak každá sub-nulová množina je merateľná.

3.3 Borelovské množiny a lebesguovsky merateľné množiny

V metrickom priestore X (všeobecnejšie, v topologickom priestore) máme pojem otvorenej množiny. Budeme pracovať s podmnožinami priestoru X .

Najmenšia σ -algebra obsahujúca všetky otvorené množiny, teda σ -algebra generovaná systémom všetkých otvorených množín, sa označuje $\mathcal{B}_X$ alebo krátko $\mathcal{B}$ a nazýva sa σ -algebrou borelovských množín alebo borelovskou σ -algebrou (v X). Množiny do nej patriace sa nazývajú borelovské množiny (v X). Okrem otvorených množín patria teda medzi borelovské množiny napr. všetky uzavreté množiny, potom množiny typu G_δ (teda spočítateľné prieniky otvorených množín), množiny typu F_σ (teda spočítateľné zjednotenia uzavretých množín) a mnohé ďalšie.

Príklad 3.6. V priestore $\mathbb{R}$ s euklidovskou metrikou je množina $\mathbb{Q}$ typu F_σ (ale nie G_δ) a jej komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je množina typu G_δ (ale nie F_σ). Nie sú ani otvorené ani uzavreté, obe sú však borelovské.

Namiesto všeobecného metrického priestoru teraz uvažujme o množine $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). S euklidovskou metrikou tvorí metrický priestor, môžeme teda hovoriť o borelovských množinách. Na množine $\mathbb{R}^n$ máme však aj Lebesguovu mieru Leb_n (ak nebude môcť dôjsť k nedorozumeniu, budeme písať len Leb), môžeme teda hovoriť o lebesguovsky merateľných množinách. Z podmnožín množiny $\mathbb{R}^n$ možno vytvoriť rôzne σ -algebry. Okrem σ -algebry $2^{\mathbb{R}^n}$ všetkých podmnožín majú pre nás, ako sme práve naznačili, zvláštnu dôležitosť dve:

- σ -algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ borelovských množín. Jej generátorom je napr. systém všetkých otvorených množín. (Namiesto otvorených množín možno vziať podsystém, ktorý generuje všetky otvorené množiny. Ak sme napr. v $\mathbb{R}$, môžeme vziať systém všetkých otvorených intervalov alebo systém všetkých uzavretých intervalov alebo systém všetkých intervalov tvaru $[a, b)$ apod.; na vygenerovanie všetkých borelovských množín v $[0, 1]$ stačí dokonca systém všetkých intervalov tvaru $[0, b]$, $0 < b \leq 1$).

- σ -algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ lebesguovsky merateľných množín. Generovaná je otvorenými množinami a množinami nulovej Leb-miery. (Opäť, systém všetkých otvorených množín tu možno nahraďiť podsystémom, ktorý generuje všetky otvorené množiny.)

Z teórie miery je dobre známe, že každá borelovská množina v $\mathbb{R}^n$ je lebesguovsky merateľná. Obrátené tvrdenie neplatí, lebesguovsky merateľných množín je viac.

Príklad 3.7 ($\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$). Ukážeme, že existujú lebesguovsky merateľné množiny, ktoré nie sú borelovské. Standardná strednotretinová Cantorova množina má nulovú Lebesguovu mieru a mohutnosť c , preto má $2^c > c$ podmnožín. Každá z týchto 2^c podmnožín je lebesguovsky merateľná, lebo Lebesguova miera je úplná. Na druhej strane, v deskriptívnej teórii množín sa dokazuje, že všetkých borelovských množín je c .¹ Preto v C existuje 2^c takých podmnožín, ktoré patria do $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.²

Namiesto strednotretinovej Cantorovej množiny sme mohli vziať ľubovoľnú množinu, ktorá má nulovú Lebesguovu mieru a má mohutnosť c . Platí tiež: Každá lebesguovsky merateľná množina kladnej miery obsahuje podmnožinu, ktorá nie je lebesguovsky merateľná.

Z teórie miery je tiež dobre známe, že nie každá podmnožina $\mathbb{R}^n$ je lebesguovsky merateľná. Napr. tzv. Vitaliho množina patrí do $2^{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Platí teda

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \subsetneq 2^{\mathbb{R}^n}.$$

Medzi každými dvomi σ -algebami v tejto hierarchii troch σ -algebier existujú mnohé ďalšie σ -algebry. Ak nemôže vzniknúť nedorozumenie, budeme používať skrátené označenia $\mathcal{B}$ a $\mathcal{L}$.

To znamená, že keď hovoríme o Lebesguovej miere Leb , môžeme ju uvažovať ako mieru $\text{Leb}_{\mathcal{B}}$ definovanú na $\mathcal{B}$ alebo ako mieru $\text{Leb}_{\mathcal{L}}$ definovanú na $\mathcal{L}$. Na $\mathcal{B}$ sa obe miery zhodujú. Miera $\text{Leb}_{\mathcal{B}}$ nie je úplná (podmnožina borelovskej množiny nulovej miery nemusí byť borelovská, pozri napr. Príklad 3.7). Miera $\text{Leb}_{\mathcal{L}}$ je úplná (podmnožina lebesguovsky merateľnej množiny *nulovej miery* je lebesguovsky merateľná; z monotónnosti miery potom vyplýva, že má nulovú mieru³).

Miera $\text{Leb}_{\mathcal{L}}$ je zúplnením miery $\text{Leb}_{\mathcal{B}}$. Platí teda (pozri Vetu 3.5):

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{B}} := \{B \cup Z : B \in \mathcal{B}, Z \in \mathcal{Z}\} \quad \text{kde} \quad \mathcal{Z} = \{Z : Z \subseteq N \in \mathcal{B}, \text{Leb}_{\mathcal{B}}(N) = 0\}. \quad (3.1)$$

To, že σ -algebra $\mathcal{L}$ je zúplnením σ -algebry $\mathcal{B}$ vzhľadom na Lebesguovu mieru $\text{Leb}_{\mathcal{B}}$, sa dá ekvivalentne vyjadriť aj nasledovne:

- $E \in \mathcal{L}$ vtedy a len vtedy, keď existujú množiny $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ také, že $B_1 \subseteq E \subseteq B_2$ a $\text{Leb}_{\mathcal{B}}(B_2 \setminus B_1) = 0$.

(Táto podmienka je ekvivalentná s tým, že pre každé $\varepsilon > 0$ existujú množiny $B_1^{\varepsilon}, B_2^{\varepsilon} \in \mathcal{B}$ také, že $B_1^{\varepsilon} \subseteq E \subseteq B_2^{\varepsilon}$ a $\text{Leb}_{\mathcal{B}}(B_2^{\varepsilon} \setminus B_1^{\varepsilon}) < \varepsilon$.)

Uvedieme, hoci bez prílišných detailov, ešte jeden poučný príklad.

Príklad 3.8 (Homeomorfný obraz množiny z $\mathcal{L}$ nemusí patriť do $\mathcal{L}$). Nájdeme homeomorfizmus $F: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$, ktorý má nasledujúce vlastnosti (funkcia $(1/2)F$ by bola takým homeomorfizmom $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$).

¹Existuje tiež zaujímavý súvisiaci výsledok: Akákoľvek σ -algebra (na akejkoľvek množine) je alebo konečná alebo má mohutnosť aspoň c . Teda neexistuje nekonečná spočítateľná σ -algebra.

²Ak z množiny mohutnosti 2^c odoberte podmnožinu mohutnosti najviac c , dostanete množinu, ktorej mohutnosť je ešte stále 2^c .

³Pozor, nie je pravda, že podmnožina lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná, veď to by potom každá podmnožina $\mathbb{R}$ bola lebesguovsky merateľná. Podobne, ako sme už videli, nie je pravda, že podmnožina borelovskej množiny je borelovská.

- (a) F zobrazuje nejakú množinu C nulovej Lebesguovej miery na množinu $F(C)$ kladnej Lebesguovej miery. (Inverzný homeomorfizmus $G = F^{-1}$ teda zobrazuje nejakú množinu $F(C)$ kladnej miery na množinu C nulovej miery.)
- (b) F zobrazuje nejakú lebesguovsky merateľnú množinu na množinu, ktorá nie je lebesguovsky merateľná. (Inverzný homeomorfizmus $G = F^{-1}$ teda zobrazuje nejakú nemerateľnú množinu na merateľnú množinu.)
- (c) F -vzor každej lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina.

Nech C je štandardná stredno-tretinová Cantorova množina. Nech $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je tzv. Cantorova funkcia (nazývaná niekedy aj diablove schody). Pripomeňme, že je to spojitá neklesajúca surjektívna funkcia, ktorá je na každom styčnom intervale konštantná a zobrazuje Cantorovu množinu C na $[0, 1]$. Potom funkcia $F(x) = x + \varphi(x)$ je homeomorfizmus $[0, 1] \rightarrow [0, 2]$. Ukážeme, že má požadované vlastnosti.

$F(C)$ je merateľná (dokonca uzavretá) množina s mierou $\text{Leb}(F(C)) = 1$, hoci $\text{Leb}(C) = 0$. Teda máme (a).

Keďže každá množina kladnej Lebesguovej miery obsahuje nemerateľnú podmnožinu, existuje nemerateľná množina $D \subseteq F(C)$. Ak ju zobrazíme homeomorfizmom F^{-1} , dostaneme množinu $F^{-1}(D) \subseteq C$. Množina $F^{-1}(D)$ je merateľná (lebo je podmnožinou množiny nulovej Lebesguovej miery a Lebesguova miera je úplná) a $\text{Leb}(F^{-1}(D)) = 0$. Teda F zobrazuje merateľnú množinu $F^{-1}(D)$ na nemerateľnú D .⁴ Dostali sme (b).

Cantorova funkcia φ má pozoruhodnú vlastnosť. Ak $A \subseteq [0, 1]$ je hocijaká množina (nemusí byť ani merateľná), tak jej vzor $\varphi^{-1}(A)$ je lebesguovsky merateľná množina. Naozaj, tento vzor je zjednotením nejakej podmnožiny Cantorovej množiny C a niektorých styčných intervalov. Preto je to lebesguovsky merateľná množina. Modifikujte túto úvahu, aby ste ukázali (c).

Príklad je varovaním. Aj keď by zobrazenie T bolo homeomorfizmom (a teda aj obraz aj vzor borelovskej množiny by automaticky bola borelovská množina), nemôžeme si automaticky myslieť, že obraz lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina a že vzor lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina (pozri časť (b)). Rovnako si nemôžeme automaticky myslieť, že obraz lebesguovsky nulovej množiny je nulová množina a že vzor lebesguovsky nulovej množiny je nulová množina (pozri časť (a)).

3.4 Postačujúca podmienka pre merateľnosť zobrazenia

Ak $(X, \mathcal{B})$, $(Y, \mathcal{S})$ sú merateľné priestory, tak zobrazenie $T: X \rightarrow Y$ sa nazýva $\mathcal{B}$ - $\mathcal{S}$ merateľné, ak pre každú množinu $S \in \mathcal{S}$ je $T^{-1}(S) \in \mathcal{B}$. V takom prípade tiež hovoríme, že zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ je merateľné, už bez špecifikovania σ -algebier.

Ak M je metrický priestor, nech $\mathcal{B}_M$ označuje σ -algebru borelovských množín v M . Ak M je navyše podpriestor nejakého euklidovského priestoru $\mathbb{R}^d$, tak môžeme uvažovať aj o σ -algebre $\mathcal{L}_M$ lebesguovsky merateľných množín v M . Pripomeňme, že v takom prípade $\mathcal{B}_M \subseteq \mathcal{L}_M$. Už na reálnej osi však existujú množiny, ktoré sú lebesguovsky merateľné, ale nie borelovské.

Často, ak nemôže dôjsť k nedorozumeniu, namiesto merateľnosti $\mathcal{B}_X$ - $\mathcal{B}_Y$ či $\mathcal{L}_X$ - $\mathcal{L}_Y$ hovoríme len o merateľnosti $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ či $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$.

⁴Nie je bez zaujímavosti dodať, že množina $F^{-1}(D)$ je síce merateľná, ale nie je borelovská (teda znovu máme príklad lebesguovsky merateľnej neborelovskej podmnožiny Cantorovej množiny, pozri aj Príklad 3.7). Keby bola borelovská, tak aj jej homeomorfný obraz D by bola borelovská množina. Lenže borelovské množiny sú lebesguovsky merateľné, čo je v spore s tým že D nie je merateľná.

Propozícia 3.9. *Nech X a Y sú metrické priestory a nech $T: X \rightarrow Y$ je spojité zobrazenie.*

- (1) $T: (X, \mathcal{B}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{B}_Y)$ je merateľné
- (2) Nech $X \subseteq \mathbb{R}^m$ a $Y \subseteq \mathbb{R}_n$. Potom $T: (X, \mathcal{L}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{L}_Y)$ vo všeobecnosti nie je merateľné, a to dokonca ani za predpokladu, že T je homeomorfizmus.
- (3) Ak zobrazenie medzi otvorenými množinami v $\mathbb{R}^n$ je C^1 -difeomorfizmus, tak aj obrazy aj vzory lebesguovsky merateľných množín sú lebesguovsky merateľné množiny (špeciálne, T je $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ -merateľné). Navyše, aj obrazy aj vzory množín nulovej Lebesguovej miery sú množiny nulovej Lebesguovej miery.

Dôkaz. (1) Otvorené množiny sú borelovské (σ -algebra borelovských množín je najmenšia σ -algebra, ktorá obsahuje všetky otvorené množiny). Keďže T je spojité, tak $\mathcal{F} := \{A \subseteq Y : T^{-1}(A) \in \mathcal{B}_X\}$ je σ -algebra v Y (lebo vzory sa “dobré správajú”), ktorá obsahuje všetky otvorené množiny v Y (lebo spojité vzor otvorenej množiny je otvorená a teda borelovská množina). Pretože $\mathcal{F}$ obsahuje všetky otvorené množiny v Y a je to σ -algebra, tak $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}_Y$, lebo $\mathcal{B}_Y$ je najmenšia σ -algebra obsahujúca všetky otvorené množiny v Y . To práve znamená, že T -vzor každej borelovskej množiny je borelovská množina, čo sme potrebovali dokázať.

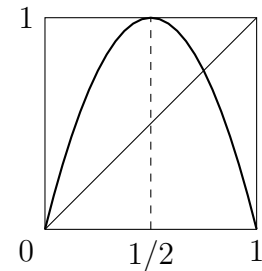
(2) V Príklade 3.8 označme $T := ((1/2)F)^{-1}$. Potom T je homeomorfizmus $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a existuje lebesguovsky merateľná množina v $[0, 1]$, ktorej T -vzor nie je lebesguovsky merateľná množina (pozrite časť (b) v uvedenom príklade).

(3) Pozri [BoI, Section 3.6]. □

Príklad 3.10. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zobrazenie definované vzťahom⁵ $T(x) = 4x(1 - x)$.

Keďže T je spojité, je $\mathcal{B}_{[0,1]}-\mathcal{B}_{[0,1]}$ merateľné.

Uvažujme o zúženiach $T_1 := T|_{(0,1/2)}$ a $T_2 := T|_{(1/2,1)}$. Potom T_1 je C^1 -difeomorfizmus $(0, 1/2) \rightarrow (0, 1)$ a T_2 je C^1 -difeomorfizmus $(1/2, 1) \rightarrow (0, 1)$ (vysvetlite). Tieto dva difeomorfizmy “pokrývajú” celé zobrazenie T , až na tri body $0, 1/2, 1$ v definičnom obore T a na dva body $0, 1$ v obore hodnôt T . Ak k lebesguovsky merateľnej množine pridáme konečne veľa bodov alebo z nej odoberieme konečne veľa bodov, dostaneme zase lebesguovsky merateľnú množinu. Pomocou toho sa dá už ľahko zdôvodniť, že T je aj $\mathcal{L}_{[0,1]}-\mathcal{L}_{[0,1]}$ merateľné.



Obr. 3.1: $T(x) = 4x(1 - x)$

3.5 Atómy

V súlade s Demokritovou⁶ predstavou atómu ako nedeliteľnej čiastočky hmoty zavedieme pojem atómu v priestore s mierou.

Definícia 3.11. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Množina $A \in \mathcal{B}$ sa nazýva *atóm*, ak má kladnú mieru a nedá sa rozložiť na dve disjunktné merateľné množiny s kladnými mierami (t.j. ak $\mu(A) > 0$ a neexistuje rozklad $A = P \sqcup Q$, kde $P, Q \in \mathcal{B}$, $\mu(P) > 0$, $\mu(Q) > 0$). Miera μ sa

⁵Je to jedno z tzv. logistických zobrazení $x \mapsto rx(1 - x)$, $r \in [0, 4]$. Niekedy sa nazýva tiež plná parabola (plná preto, lebo práve pre $r = 4$ je to surjekcia $[0, 1]$ na seba).

⁶Demokritos z Abdér (asi 460 – 370 pred Kr.) bol starogrécky filozof, tvorca teórie atómov. Bol vynikajúcim matematikom, čo ovplyvnilo aj podobu jeho diela, akejsi matematickej teórie hmoty: jestvujú len atómy a prázdno, v ktorom sa atómy pohybujú. Atómy sú malé, nepriestupné a ďalej nedeliteľné hmotné čiastočky, ktoré majú vlastný pohyb a tiaž.

nazýva *neatomická*, ak nemá žiadne atómy. V takom prípade tiež hovoríme, že priestor s mierou $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je *neatomický*.

Niekedy sa definícia atómu uvádza v nasledujúcom ekvivalentnom tvare.

Lema 3.12. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Potom $A \in \mathcal{B}$ je atóm vtedy a len vtedy, keď $\mu(A) > 0$ a pre každú merateľnú množinu $B \subseteq A$ je $\mu(B) = 0$ alebo $\mu(A \setminus B) = 0$.*

Dôkaz. Nech A je atóm. Predpokladajme, že by existovala merateľná množina $B \subseteq A$, pre ktorú $\mu(B) > 0$ aj $\mu(A \setminus B) > 0$. Potom rozklad $A = B \sqcup (A \setminus B)$ množiny A na dve merateľné množiny s kladnými mierami dáva spor s predpokladom, že A je atóm.

Obrátene, nech $A \in \mathcal{B}$ je taká, že $\mu(A) > 0$ a pre každú merateľnú množinu $B \subseteq A$ je $\mu(B) = 0$ alebo $\mu(A \setminus B) = 0$. Aby sme dokázali, že A je atóm, pripustíme, že by existoval rozklad $A = P \sqcup Q$, kde $P, Q \in \mathcal{B}$, $\mu(P) > 0$, $\mu(Q) > 0$. Potom $P \subseteq A$ je taká merateľná množina, že $\mu(P) > 0$ aj $\mu(A \setminus P) > 0$, spor s predpokladom. $\square$

Príklad 3.13. Nech $X = \{a, b\}$, $\mathcal{B} = 2^X$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(X) = \infty$. Potom $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Množiny $\{a\}$ a $\{b\}$ sú (jednobodové) atómy. Množina X nie je atóm, lebo $X = \{a\} \sqcup \{b\}$, pričom $\{a\}$ aj $\{b\}$ majú kladné miery.

Samozrejme vždy keď bod $x_0 \in X$ je taký, že $\{x_0\} \in \mathcal{B}$ a $\mu(\{x_0\}) > 0$, tak automaticky $\{x_0\}$ je atóm (trochu nepresne povedané, ak bod má kladnú mieru, tak je to automaticky atóm). V niektorých knihách sa za atómy považujú len jednobodové atómy.⁷ Nasledujúci príklad ukazuje, že atóm môže mať aj viac ako jeden bod a nemusí v sebe obsahovať jednobodový atóm.

Príklad 3.14. Nech $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = 1$, $\mu(\{b, c\}) = 2$, $\mu(X) = 3$. Potom $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Množiny $\{a\}$ a $\{b, c\}$ sú atómy, množiny $\emptyset$ a X atómami nie sú. Atóm $\{b, c\}$ neobsahuje v sebe jednobodový atóm.

Ak v priestore s mierou je A atóm a N množina nulovej miery, tak zrejme aj $A \cup N$ je atóm (ako zjednotenie dvoch merateľných množín je to samozrejme merateľná množina), pozri Cvičenie 3.5. Nasledujúci príklad ilustruje tento zrejmy fakt.

Príklad 3.15. Nech $X = \{a, b\}$, $\mathcal{B} = 2^X$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = 1$, $\mu(\{b\}) = 0$, $\mu(X) = 1$. Potom $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Zrejme $\{a\}$ je atóm. Aj $X = \{a\} \cup \{b\}$ je atóm, pričom je práve zjednotením jednobodového atómu a množiny nulovej miery.

Vieme už, že zjednotenie jednobodového atómu a nulovej množiny je vždy atóm, ale vo všeobecnosti nie každý atóm je takéhoto tvaru. Preto je zaujímavé, že v špeciálnych ale dôležitých priestoroch s mierou $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je *každý* atóm takéhoto tvaru.

Propozícia 3.16. *Nech (X, d) je separabilný metrický priestor, nech $\mathcal{B}$ je σ -algebra borelovských množín v priestore X a nech μ je miera na $\mathcal{B}$. Potom každý atóm miery μ (ak vôbec existuje) obsahuje jednobodový atóm a je zjednotením tohto jednobodového atómu a množiny nulovej miery.*

Dôkaz. Nech $A \in \mathcal{B}$ je atóm. Keďže priestor X je separabilný, obsahuje spočítateľnú hustú množinu C . Pre každé $n \in \mathbb{N}$ je zjednotenie gúl $\bigcup_{c \in C} B(c, 1/n) = X$. Potom $\bigcup_{c \in C} (A \cap B(c, 1/n)) = A$. Množiny v tomto zjednotení sú borelovské, takže patria do $\mathcal{B}$. Pretože $\mu(A) >$

⁷Jednobodový atóm sa v angličtine niekedy nazýva *point mass*.

0, aspoň jedna z množín v tomto spočítateľnom zjednotení má kladnú mieru (lebo μ je σ -subaditívna). Ukázali sme, že existuje taký bod $c_n \in C$, že

$$\mu(A \cap B(c_n, 1/n)) > 0 \quad (\text{pre každé } n \in \mathbb{N}).$$

Keďže $A = (A \cap B(c_n, 1/n)) \sqcup (A \setminus B(c_n, 1/n))$ je atóm a jeho podmnožina $A \cap B(c_n, 1/n)$ má kladnú mieru, musí byť

$$\mu(A \setminus B(c_n, 1/n)) = 0 \quad (\text{pre každé } n \in \mathbb{N}). \quad (3.2)$$

Rovnosť (3.2) znamená, že až na množinu miery nula je A obsiahnutá v $B(c_n, 1/n)$. Nech teraz

$$S := \bigcap_{n=1}^{\infty} B(c_n, 1/n).$$

Tvrdíme, že až na množinu miery nula je $A = (A \cap S) \sqcup (A \setminus S)$ obsiahnutá dokonca v tejto menšej množine S . Naozaj,

$$\mu(A \setminus S) = \mu\left(A \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B(c_n, 1/n)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus B(c_n, 1/n))\right) = 0$$

(druhá rovnosť využíva de Morganovo pravidlo, tretia rovnosť využíva σ -subaditívnosť a (3.2)). Máme teda rovnosť

$$A = (A \cap S) \sqcup \underbrace{(A \setminus S)}_{\text{množina nulovej miery}} \quad (3.3)$$

K ukončeniu dôkazu stačí ukázať, že $A \cap S$ je jednobodový atóm. To však ľahko vyplýva z dvoch faktov:

- S má nulový diameter (lebo pre každé n je S podmnožinou gule s polomerom $1/n$, odkiaľ $\text{diam } S \leq 2/n$). Z toho vyplýva, že S , a tým skôr $A \cap S$, obsahuje *najviac jeden bod*.
- Z rovnosti (3.3) vyplýva, že $\mu(A \cap S) = \mu(A) > 0$ (atóm má kladnú mieru). Množina $A \cap S$, súč kladnej miery, obsahuje *aspoň jeden bod*.

Teda $A \cap S$ je jednobodová a zároveň $\mu(A \cap S) > 0$, je to teda jednobodový atóm (obsiahnutý v A). Vzhľadom na (3.3) je dôkaz skončený. $\square$

Dôsledok 3.17. *Lebesguova miera v $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) je neatomická.⁸*

Dôkaz. Nech $\mathcal{B}$ je σ -algebra borelovských a $\mathcal{L}$ je σ -algebra lebesguovskych merateľných množín v $\mathbb{R}^n$, $\text{Leb}_{\mathcal{B}}$ a $\text{Leb}_{\mathcal{L}}$ sú príslušné miery. Tvrdíme, že oba priestory s mierou $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \text{Leb}_{\mathcal{B}})$ a $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \text{Leb}_{\mathcal{L}})$ sú neatomické. Keďže ten druhý je zúplnením toho prvého, stačí to dokázať pre ten prvý (pozri Cvičenie 3.7).

$\mathbb{R}^n$ je separabilný metrický priestor a Lebesguova miera definovaná na σ -algebri $\mathcal{B}$ borelovských množín v $\mathbb{R}^n$ nemá žiaden jednobodový atóm (jednobodová množina je síce borelovská, ale má nulovú Lebesguovu mieru). Preto podľa Propozície 3.16 nemá ani žiaden atóm. $\square$

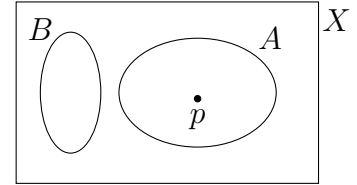
⁸Implicitne sa myslí Lebesguova miera na σ -algebri lebesguovskych merateľných množín.

Uvedieme jednoduchý ale veľmi dôležitý príklad miery, ktorá má jednobodový atóm a každý atóm je zjednotením tohto jednobodového atómu s nejakou nulovou množinou. Pritom X je tu hocijaká množina, nie nevyhnutne metrický priestor.

Príklad 3.18 (Diracova miera). Nech X je množina a nech $p \in X$ je pevne zvolený bod. Položme

$$\delta_p(A) := \begin{cases} 1, & \text{ak } p \in A, \\ 0, & \text{ak } p \in X \setminus A \end{cases}$$

pre každú množinu $A \subseteq X$, pozri Obr. 3.2. Potom zrejme δ_p je pravdepodobnostná miera na σ -algebre 2^X všetkých podmnožín množiny X (samozrejme, mohli by sme ju zúžiť na hocijakú menšiu σ -algebru). Nazývame ju *Diracova⁹ miera v bode p* alebo *miera sediaca v bode p* , či *miera sústredená v bode p* . Zrejme $\{p\}$ je (jednobodový) atóm.

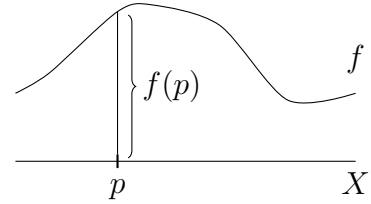


Obr. 3.2: $\delta_p(A) = 1, \delta_p(B) = 0$

Príklad 3.19 (Integrovanie podľa Diracovej miery). Podľa Diracovej miery sa ľahko integruje. Predovšetkým, každá reálna alebo komplexná funkcia f na X je δ_p -merateľná (lebo každá podmnožina množiny X je δ_p -merateľná). Je aj δ_p -integrovateľná, pričom

$$\int f d\delta_p = f(p)$$

(pozri Obr. 3.3). Dalo by sa to dokazovať štandardným spôsobom, t.j. najskôr pre charakteristické funkcie, potom pre jednoduché (schodovité) funkcie, potom pre nezáporné a nakoniec pre ľubovoľné funkcie. Jednoduchšie je však využiť, že funkcie rovnajúce sa skoro všade majú rovnaké integrály. Funkcia f sa δ_p -skoro všade rovná konštantnej funkcii $g \equiv f(p)$. Preto



Obr. 3.3: $\int_X f d\delta_p = f(p)$

$$\int f d\delta_p = \int g d\delta_p = \delta_p(X) f(p) = f(p).$$

3.6 Výroba nových mier zo starých

Miery možno násobiť (nezápornými) reálnymi číslami a možno ich aj sčítovať. Ak $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor a μ_1, μ_2 sú miery na $\mathcal{B}$ a c_1, c_2 sú nezáporné reálne čísla, tak symbolom

$$\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$$

označujeme funkciu $\mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ definovanú vzt'ahom

$$\mu(A) = c_1\mu_1(A) + c_2\mu_2(A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Všimnite si, že uvažujeme len lineárne kombinácie mier s *nezápornými* koeficientami, aby sme mali istotu, že μ je nezáporná (miera musí byť nezáporná).

⁹Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984) bol britský teoretický fyzik. Za svoju základnú prácu v kvantovej fyzike (Princípy kvantovej mechaniky) získal v roku 1933 Nobelovu cenu spoločne s Erwinom Schrödingerom.

Propozícia 3.20. *Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor a nech μ_1, μ_2 sú miery na $\mathcal{B}$. Potom platia nasledujúce tvrdenia.*

- (1) (násobok miery) Ak $c \geq 0$, tak $\mu := c\mu_1$ je miera na $\mathcal{B}$.
- (2) (súčet mier) $\mu := \mu_1 + \mu_2$ je miera na $\mathcal{B}$.
- (3) (lineárna kombinácia mier) Ak $c_1, c_2 \geq 0$, tak $\mu := c_1\mu_1 + c_2\mu_2$ je miera na $\mathcal{B}$. Ak μ_1, μ_2 sú konečné, resp. σ -konečné miery, tak aj μ je konečná, resp. σ -konečná miera.
- (4) (konverzná kombinácia mier) Ak $c \in [0, 1]$, tak $\mu := (1 - c)\mu_1 + c\mu_2$ je miera na $\mathcal{B}$. Pre každú merateľnú množinu A leží hodnota $\mu(A)$ v konverznom obale hodnôt $\mu_1(A)$ a $\mu_2(A)$. Ak μ_1, μ_2 sú pravdepodobnostné miery, tak aj μ je pravdepodobnostná miera.

Dôkaz. Cvičenie 3.9. □

Nasledujúca propozícia ukazuje, ako sa integruje podľa miery, ktorá je lineárnou kombináciou mier.

Propozícia 3.21. *Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor, $\mu_1, \dots, \mu_n$ sú miery na $\mathcal{B}$ a $c_1, \dots, c_n$ sú nezáporné reálne čísla. Nech f je reálna (alebo komplexná) funkcia na X , ktorá je integrovateľná vzhľadom na každú z mier μ_i . Potom je integrovateľná aj vzhľadom na mieru $c_1\mu_1 + \dots + c_n\mu_n$ a platí*

$$\int f d(c_1\mu_1 + \dots + c_n\mu_n) = c_1 \int f d\mu_1 + \dots + c_n \int f d\mu_n.$$

Dôkaz. Cvičenie 3.11. □

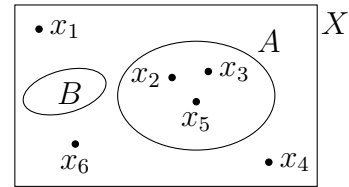
Príklad 3.22 (Miera sediaca v spočítateľnej množine). Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor. Zvoľme nekonečnú spočítateľnú množinu bodov $x_1, x_2, \dots \in X$ a kladné ‘váhy’ $w_1, w_2, \dots$.

Potom môžeme uvažovať o miere

$$\mu := \sum_{i=1}^{\infty} w_i \delta_{x_i}$$

definovanej na $\mathcal{B}$ vzt’ahom

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} w_i \delta_{x_i}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \{w_i : x_i \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}.$$



Obr. 3.4: $\mu(A) = w_2 + w_3 + w_5$, $\mu(B) = 0$

Ak rad konverguje, je $\mu(A)$ nezáporné číslo. Ak diverguje, je $\mu(A) = +\infty$. Ak je $\sum_{i=1}^{\infty} w_i = 1$, ide o pravdepodobnostnú mieru.

Podobne možno definovať (pravdepodobnostnú) mieru sediaca v konečnej množine (na Obr. 3.4 miera sedí v šesťprvkovej podmnožine priestoru X). (Ak X je nekonečná a používali by sme nezáporné váhy, potom konečný prípad by bol zahrnutý v nekonečnom spočítateľnom prípade.)

Príklad 3.23 (Výroba pravdepodobnostnej miery z konečnej miery). Predpokladajme, že $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľný priestor s konečnou nenulovou mierou, t.j. $0 < \mu(X) < \infty$. Pre každé $B \in \mathcal{B}$ položme

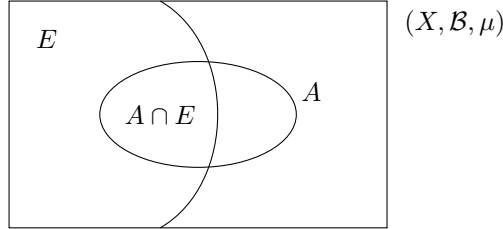
$$\nu(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(X)}.$$

Potom ν je zrejmé pravdepodobnostná miera na $(X, \mathcal{B})$. Teda medzi konečnými a pravdepodobnostnými mierami nie je v teórii veľký rozdiel.

Príklad 3.24 (Podmienená miera). Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľný priestor a nech $E \in \mathcal{B}$. Predpokladajme, že $0 < \mu(E) < \infty$ (aby sme touto hodnotou mohli bez problémov deliť). Potom môžeme definovať podmienenú mieru $\mu_E: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$:

$$\mu_E(A) := \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(E)}, \quad A \in \mathcal{B}.$$

(Pozri Obr 3.5.)



Obr. 3.5: Podmienená miera

Všimnite si, že takto definovaná podmienená miera je pravdepodobnostná miera.¹⁰

Ukážeme, ako možno Lebesguovu mieru preniesť na kružnicu.

Príklad 3.25 (Lebesguova miera na kružnici). Nech $\mathbb{S}^1$ je kružnica, teda $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Kružnicu môžeme chápať aj ako interval $[0, 1]$ so zlepenými koncami (číslo $1/10$ a $8/10$ majú na intervale $[0, 1]$ vzdialenosť $7/10$, na kružnici vzdialenosť $3/10$). Nech $\mathcal{B}$ je σ -algebra všetkých borelovských množín v $\mathbb{S}^1$. Mieru Leb na $\mathcal{B}$ definujeme nasledovne. Každá (borelovská) podmnožina kružnice jednoznačne zodpovedá (borelovská) podmnožina intervalu $[0, 1]$; jej Lebesguovu mieru prehlásime za Leb-mieru tej podmnožiny kružnice. Je prirodzené mieru Leb nazývať Lebesguovou mierou na kružnici. Podobne ako Lebesguova miera na $\mathbb{R}$ alebo na $[0, 1]$, označuje sa niekedy aj Leb alebo Leb_1 (kde index 1 zdôrazňuje, že ide o jednorozmernú Lebesguovu mieru).

3.7 Jednoznačnosť mier

Nech X je množina a nech 2^X je systém všetkých podmnožín množiny X . Nech $\mathcal{G} \subseteq 2^X$, teda nech $\mathcal{G}$ je *nejaký* systém podmnožín množiny X . Potom existuje najmenšia σ -algebra obsahujúca $\mathcal{G}$.¹¹ Označujeme ju $\sigma(\mathcal{G})$. Hovoríme tiež, že je to σ -algebra *generovaná* systémom $\mathcal{G}$. Systém $\mathcal{G}$ sa nazýva *generátor* tej σ -algebry. Pripomeňme, že $\sigma(\mathcal{G})$ nie je nič iné ako prienik všetkých σ -algebier na X , ktoré obsahujú $\mathcal{G}$.

Ak sa dve σ -konečné miery definované na tej istej σ -algebry zhodujú na generujúcej algebry, tak sa zhodujú na celej σ -algebry. To je štandardná veta z teórie miery. Jej presné znenie nasleduje.

Veta 3.26. Nech μ_1 a μ_2 sú dve σ -konečné miery na tom istom merateľnom priestore $(X, \mathcal{B})$. Nech $\mathcal{A}$ je algebra, ktorá generuje σ -algebru $\mathcal{B}$. Predpokladajme, že pre každú množinu $A \in \mathcal{A}$ je $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Potom $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ pre každú množinu $B \in \mathcal{B}$ (a teda $\mu_1 = \mu_2$).

¹⁰Porovnajte s definíciou podmienenej pravdepodobnosti.

¹¹Presnejšie: obsahujúca každú množinu z $\mathcal{G}$.

Teda aby sa dve σ -konečné miery na nejakej σ -algebri $\mathcal{B}$ zhodovali, stačí, aby sa zhodovali na nejakom takom generátore $\mathcal{A}$ tej σ -algebry, ktorý je algebrou.

Vo všeobecnosti k rovnosti σ -konečných mier na σ -algebri $\mathcal{B}$ nestačí, aby sa tieto zhodovali na nejakom generátore $\mathcal{G}$ tej σ -algebry. Inak povedané, vynechať predpoklad, že $\mathcal{G}$ je algebra (a nič namiesto neho nepridať) nemožno.

Uvedieme dva príklady, ktoré to ukazujú.

Príklad 3.27. Majme trojprvkový priestor $X = \{a, b, c\}$ a uvažujme o σ -algebri 2^X tvorenej všetkými jeho podmnožinami. Nech μ_1 je tá (jediná) miera na 2^X , pre ktorú

$$\mu_1(\{a\}) = \mu_1(\{b\}) = \mu_1(\{c\}) = \frac{1}{2}.$$

Podobne, nech miera μ_2 na 2^X je daná hodnotami

$$\mu_2(\{a\}) = \frac{1}{3}, \quad \mu_2(\{b\}) = \frac{2}{3}, \quad \mu_2(\{c\}) = \frac{1}{3}.$$

Na oboch množinách zo systému

$$\mathcal{G} = \{A, B\} \quad \text{kde} \quad A = \{a, b\}, \quad B = \{b, c\}$$

sa tieto dve miery zhodujú. Pritom $\mathcal{G}$ je zrejme generátor pre σ -algebru 2^X . Napriek tomu sa tie miery nezhodujú na celej σ -algebri 2^X . Nie je to spor s Vetou 3.26, lebo systém $\mathcal{G}$ nie je algebra.

Vo vete je dôležité, že $\mathcal{A}$ je generujúca algebra a nielen nejaký generujúci podsystem σ -algebry $\mathcal{B}$, hoc by sa nám ten podsystem aj zdal dostatočne veľký na to, aby veta preň platila.

Príklad 3.28. Podľa [Dav71],

- existuje kompaktný metrický priestor X a dve konečné miery μ_1 a μ_2 na σ -algebri $\mathcal{B}$ všetkých borelovských podmnožín priestoru X s tou vlastnosťou, že $\mu_1(G) = \mu_2(G)$ pre každú uzavretú guľu v priestore X , ale napriek tomu sa μ_1 a μ_2 nerovnajú.

To je prekvapujúce, veď nielenže systém $\mathcal{G}$ všetkých uzavretých gúl v X je generátorom borelovskej σ -algebry $\mathcal{B}$,¹² ale sa zdá byť aj dostatočne veľkým na to, aby preň Veta 3.26 platila. Nie je to pravda.¹³

Vyvstáva otázka, aké dodatočné predpoklady o generátore $\mathcal{G}$ (namiesto požiadavky, aby to bola algebra), stačia na to, aby platila analógia Vety 3.26. Také podmienky udáva Dynkinova veta o jednoznačnosti miery, pozri napr. [C13, Corollary 1.6.4] alebo [Sch05, Theorem 5.7].

Veta 3.29 (Dynkinova veta o jednoznačnosti mier). *Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor. Predpokladajme, že $\mathcal{G}$ je generátor σ -algebry $\mathcal{B}$ (t.j. $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$), ktorý má tieto vlastnosti:*

(i) $\mathcal{G}$ je uzavretý vzhľadom na konečné prieniky (t.j. $G, H \in \mathcal{G} \implies G \cap H \in \mathcal{G}$);

(ii) v $\mathcal{G}$ existuje rastúca postupnosť množín $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ taká, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = X$.

¹²Borelovská σ -algebra $\mathcal{B}$ je generovaná systémom všetkých otvorených množín. Lenže každá otvorená množina v kompaktnom metrickom priestore je spočítateľným zjednotením uzavretých gúl. Preto $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$.

¹³To mimochodom znamená, že v uvedenom priestore X systém $\mathcal{G}$ všetkých uzavretých gúl určite nie je algebrou generujúcou borelovskú σ -algebru $\mathcal{B}$. Neprekvapuje nás, že tento konkrétny priestor X má túto vlastnosť. Veď v kompaktnom metrickom priestore X systém všetkých uzavretých gúl väčšinou nie je uzavretý napr. na konečné zjednotenia, teda nie je to algebra.

Potom ak sa dve miery μ, ν definované na $\mathcal{B}$ zhodujú na generátore $\mathcal{G}$ a sú konečné na množinách $G_1, G_2, \dots$ z podmienky (ii), tak je to jedna a tá istá miera (μ, ν sa zhodujú na $\mathcal{B}$, t.j. $\mu(A) = \nu(A)$ pre všetky $A \in \mathcal{B}$).

Pripojme niekoľko poznámok.

- Z predpokladov o mierach μ, ν vzhľadom na podmienku (ii) vyplýva, že sa veta týka len prípadu, keď μ a ν sú σ -konečné miery.
- V podmienke (ii) možno vynechať predpoklad, že postupnosť množín $G_1, G_2, \dots$ je rastúca. (Naozaj, predpoklad $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = X$ nám pre množiny $\tilde{G}_j := G_1 \cup \dots \cup G_j$ dá, že $\tilde{G}_1 \subseteq \tilde{G}_2 \subseteq \dots$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{G}_j = X$. Navyše, ak sa miery μ, ν zhodujú a sú konečné na množinách $G_1, G_2, \dots$, tak sa zhodujú a sú konečné aj na množinách $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \dots$, takže môžeme použiť Vetu 4.11.)
- Ak μ a ν sú konečné, tak podmienku (ii) možno vynechať úplne, je splnená automaticky. (Naozaj, stačí do $\mathcal{G}$ pridať množinu X . Tým sa splnenie podmienky (i) nenaruší a podmienka (ii) bude splnená napr. pre voľbu $G_j = X$, $j = 1, 2, \dots$)

3.8 Absolútne spojité miery

Absolútna spojitosť má v matematike viacero významov. Nás teraz zaujíma absolútna spojitosť mier.

Definícia 3.30. Nech μ a ν sú dve miery na tom istom merateľnom priestore $(X, \mathcal{B})$. Potom hovoríme, že miera ν je *absolútne spojitá* vzhľadom na mieru μ , ak pre každú merateľnú množinu E platí implikácia

$$\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

V takom prípade píšeme $\nu \ll \mu$. Ak každá z mier μ a ν je absolútne spojitá vzhľadom na druhú mieru, t.j. ak platí $\nu \ll \mu$ a zároveň $\mu \ll \nu$, tak hovoríme, že miery μ a ν sú *ekvivalentné* a píšeme $\mu \sim \nu$. Teda dve miery sú ekvivalentné, ak majú presne tie isté množiny nulovej miery.

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $\varrho: X \rightarrow [0, +\infty)$ je nezáporná merateľná funkcia.¹⁴ Pripomeňme známu vetu, že potom množinová funkcia

$$\nu: A \mapsto \int_A \varrho d\mu = \int \chi_A \varrho d\mu, \quad A \in \mathcal{B} \quad (3.4)$$

je nová miera na $(X, \mathcal{B})$. Zdôraznime: ν je definovaná na tej istej σ -algebre ako μ .

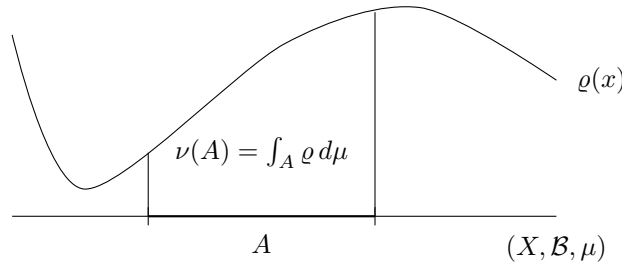
Definícia 3.31. Miera (3.4) sa nazýva *miara s hustotou ϱ vzhľadom na mieru μ* , pozri Obr. 3.6. Píšeme

$$\nu = \varrho \mu \quad \text{alebo} \quad d\nu = \varrho d\mu.$$

Ak ν má hustotu vzhľadom na μ , tak na označenie tejto hustoty sa tradične používa označenie $d\nu/d\mu$ (toto označenie treba chápať čisto symbolicky). Teda $d\nu = \varrho d\mu$ znamená to isté ako

$$\varrho = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Funkcii ϱ sa niekedy namiesto *hustota* hovorí *Radonova-Nikodymova hustota* alebo *Radonova-Nikodymova derivácia* miery ν vzhľadom na mieru μ .

Obr. 3.6: Miera s hustotou ϱ vzhľadom na mieru μ

Príklad 3.32. Nech Leb je Lebesguova miera na $\mathbb{R}$ (precíznejšie: Lebesguova miera na σ -algebre $\mathcal{L}$ lebesguovsky merateľných množín v $\mathbb{R}$; potom $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \text{Leb})$ je priestor s mierou). Uvažujme o miere $\nu = 2 \text{Leb}$ alebo ekvivalentne zapísané $d\nu = 2d\text{Leb}$. Teda miera ν má konštantnú hustotu $\varrho(x) \equiv 2$ vzhľadom na mieru Leb . Pre každú lebesguovsky merateľnú množinu A je potom jej ν -miera

$$\nu(A) = \int_A \varrho d\text{Leb} = \int_A 2 d\text{Leb} = 2 \text{Leb}(A)$$

(využili sme, že integrál konštantnej funkcie na množine A je definovaný ako súčin tej konštanty a miery tej množiny).

Propozícia 3.33. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $\varrho: X \rightarrow [0, +\infty)$ je nezáporná merateľná funkcia.

$$(1) \nu = \varrho \mu \implies \nu \ll \mu.$$

$$(2) \nu = \varrho \mu \text{ a } \varrho \text{ je } \mu\text{-skoro všade ostro kladná} \implies \nu \sim \mu.$$

Dôkaz. (1) Nech $\nu = \varrho \mu$ a nech $\mu(A) = 0$ pre nejakú množinu $A \in \mathcal{B}$. Potom podľa (3.4) je $\nu(A) = \int_A \varrho d\mu = 0$, lebo integrál na množine miery 0 je 0.¹⁵

(2) Nech $\nu = \varrho \mu$ a nech $N = \varrho^{-1}(0)$. Keďže ϱ je merateľná, je množina N merateľná, t.j. $N \in \mathcal{B}$. Podľa predpokladu je $\mu(N) = 0$. Vzhľadom na (1) potrebujeme dokázať, že $\mu \ll \nu$. Nech teda $\nu(A) = 0$ pre nejakú množinu $A \in \mathcal{B}$. Aby sme dokázali, že potom aj $\mu(A) = 0$, predpokladajme, že je $\mu(A) > 0$ a odvodíme spor. Vyjadrieme množinu A v tvare

$$A = (A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup \dots) \sqcup N,$$

kde $A_1 = \varrho^{-1}([1, \infty))$, $A_2 = \varrho^{-1}([1/2, 1))$, $A_3 = \varrho^{-1}([1/3, 1/2))$, $\dots$. Sú to merateľné množiny, lebo ϱ je merateľná. Pretože predpokladáme $\mu(A) > 0$, existuje k tak, že $\mu(A_k) > 0$. Potom však $\nu(A) = \int_A \varrho d\mu \geq \int_{A_k} \varrho d\mu \geq \int_{A_k} (1/k) d\mu = \mu(A_k) \cdot (1/k) > 0$, spor. $\square$

Propozícia 3.33(1) ukazuje, že $\nu \ll \mu$, teda absolútna spojitosť ν vzhľadom na μ je nutná podmienka na to, aby sa miera ν dala vyjadriť v tvare (3.4), t.j. aby Radonova-Nikodymova

¹⁴Teda má integrál na každej merateľnej množine, v najhoršom prípade nekonečný.

¹⁵Podrobne: $\nu(A) = \int_A \varrho d\mu \leq \mu(A) \cdot \infty = 0 \cdot \infty = 0$, lebo v teórii miery sa pri výrazoch typu $\mu(A) \cdot a$ používa konvencia $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Zdôrazňujeme, že len pri výrazoch tohto typu (veď napr. z matematickej analýzy viete, že pri výpočte limit ide o tzv. neurčité výrazy, ktoré nemožno vždy interpretovať ako nulu). Dôvod tejto konvencie je zrejmy: Uvažujme o funkcii $f \equiv 0$ v $\mathbb{R}^2$. Potom, intuitívne, podgraf funkcie f má nulový objem a teda integrál $\int_{\mathbb{R}^2} f dx = \infty \cdot 0$ by mal mať hodnotu 0. Podobne, pre funkciu g , ktorá má hodnotu nekonečno v počiatku P a hodnotu 0 v každom inom bode štvorca $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$, má podgraf funkcie g zase nulový objem a preto aj integrál $\int_A g dx = \int_P \infty dx = 0 \cdot \infty$ by mal mať hodnotu 0.

derivácia miery ν vzhľadom na mieru μ existovala. Radonova-Nikodymova veta hovorí, že ak miera μ je σ -konečná, tak je to aj postačujúca podmienka.

Veta 3.34 (Radonova-Nikodymova veta). *Nech μ a ν sú dve miery na tom istom merateľnom priestore $(X, \mathcal{B})$. Ak μ je σ -konečná, tak nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:*

- (1) $\nu = \varrho \mu$ (t.j. $\nu(A) = \int_A \varrho d\mu$, $A \in \mathcal{B}$) pre nejakú $\mathcal{B}$ -merateľnú funkciu $\varrho \geq 0$;
- (2) $\nu \ll \mu$.

*Funkcia ϱ je jediná v tom zmysle, že každé dve také funkcie splňajúce (1) sa rovnajú μ -skoro všade.*¹⁶

Ide o hlbokú vetu, pozri napr. [Yeh14, Theorem 11.16 a Proposition 11.2] alebo [Sch05, Theorem 20.2]. Nasledujúcu vetu možno nájsť napr. v [Yeh14, Theorem 11.21].

Veta 3.35. *Nech μ a ν sú dve miery na tom istom merateľnom priestore $(X, \mathcal{B})$. Ak sú obe σ -konečné a ak $\nu = \varrho \mu$, tak platí nielen $\nu(A) = \int_A \varrho d\mu$, $A \in \mathcal{B}$,¹⁷ ale dokonca*

$$\int f d\nu = \int f \varrho d\mu \quad \left(= \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \right) \quad \text{pre každú } \mathcal{B}\text{-merateľnú funkciu } f: X \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.5)$$

(v tom zmysle, že ak existuje integrál na jednej zo strán, tak existuje aj integrál na druhej strane a rovnajú sa).

Príklad 3.36. Na σ -algebre $\mathcal{L}$ lebesguovsky merateľných podmnožín reálnej osi uvažujme Lebesguovu mieru Leb a jej dvojnásobok $\nu = 2 \text{Leb}$. Potom tieto dve miery sú zrejme ekvivalentné. Nájsť obe príslušné Radonove-Nikodymove derivácie je v tomto jednoduchom prípade ľahké. Obidve tie derivácie sú konštantné funkcie na $\mathbb{R}$. Platí $\frac{d\nu}{d\text{Leb}} = 2$, lebo pre každú množinu $A \in \mathcal{L}$ je $\nu(A) = 2 \text{Leb}(A) = \int_A 2 d\text{Leb}$. Podobne, $\frac{d\text{Leb}}{d\nu} = \frac{1}{2}$.

Príklad 3.37. Nech c je kladná konštanta. Uvažujme o miere ν definovanej takto:¹⁸

$$\nu(A) = \int_A \frac{c}{1+x} dx, \quad \text{pre každú lebesguovsky merateľnú množinu } A \subseteq [0, 1].^{19}$$

Pretože hustota $\varrho(x) = c/(1+x)$ je kladná na $[0, 1]$, hneď podľa Propozície 3.33(2) vieme, že miera ν je ekvivalentná s Lebesguovou mierou na $[0, 1]$. V tomto prípade je kladná funkcia ϱ navyše spojitá a $[0, 1]$ je kompaktný metrický priestor. Preto má ϱ na $[0, 1]$ kladné dolné ohraničenie (dokonca kladné minimum) ako aj horné ohraničenie (dokonca maximum). To umožňuje dokázať ekvivalenciu ν a Lebesguovej miery aj bez použitia Propozície 3.33. Ukážeme ako.

Podľa toho, čo sme povedali o (3.4), je ν miera na σ -algebre $\mathcal{L}_{[0,1]}$ lebesguovsky merateľných podmnožín intervalu $[0, 1]$. Navyše, integrovaná funkcia $\varrho(x)$ je klesajúca na $[0, 1]$ a tak ľahko vidieť, že nadobúda len hodnoty z intervalu $[c/2, c]$. Preto

$$\frac{c}{2} \cdot \text{Leb}(A) \leq \nu(A) \leq c \cdot \text{Leb}(A) \quad \text{pre každú množinu } A \in \mathcal{L}_{[0,1]}.$$

¹⁶Teda aj ν -skoro všade, lebo $\nu \ll \mu$.

¹⁷To dostanete z nasledujúceho vzťahu voľbou $f = \chi_A$.

¹⁸Prísne vzaté, mali by sme ju označiť napr. ν_c , lebo závisí od c .

¹⁹Teda ide o Lebesguov integrál a mohli sme precíznejšie písať $\int_A \frac{c}{1+x} d\text{Leb}$. Keďže tu integrujeme spojitú kladnú funkciu, je zrejmé, že množinová funkcia ν je dobre definovaná.

Z toho vyplýva (keďže c je kladné číslo), že

$$\nu(A) = 0 \Leftrightarrow \text{Leb}(A) = 0 \quad \text{pre každú množinu } A \in \mathcal{L}_{[0,1]}.$$

Miera ν je teda ekvivalentná s Lebesguovou mierou; $\nu \sim \text{Leb}$ alebo presnejšie $\nu \sim \text{Leb}_{[0,1]}$.

Funkcia $\varrho(x) = c/(1+x)$ je hustota miery ν vzhľadom na mieru $\text{Leb}_{[0,1]}$, teda Radonova-Nikodymova derivácia miery ν vzhľadom na mieru $\text{Leb}_{[0,1]}$. Môžeme písať $\varrho = d\nu/d\text{Leb}_{[0,1]}$.²⁰

3.9 Push-forward miera a integrovanie podľa nej

Nech $(X, \mathcal{B})$ a $(Y, \mathcal{S})$ sú merateľné priestory. Pripomeňme, že zobrazenie

$$T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$$

sa volá *merateľné*,²¹ ak

$$A \in \mathcal{S} \Rightarrow T^{-1}(A) \in \mathcal{B}.$$

Symbolom $T^{-1}(A)$, alebo kratšie $T^{-1}A$, tu označujeme plný *vzor* množiny A , teda $T^{-1}(A) = \{x \in X: T(x) \in A\}$. Zdôraznime, že nepožadujeme, aby *obraz* merateľnej množiny bola merateľná množina. Vždy, keď budeme písať

$$T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{S}),$$

budeme mať na mysli, že T je merateľné. Nemerateľnými zobrazeniami sa vôbec nebudeme zaoberať.

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou ale $(Y, \mathcal{S})$ je iba merateľný priestor. Majme merateľné zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$. Dovoľme si to zapísať v tvare, ktorý zdôrazňuje, že ‘vľavo’ máme aj mieru:

$$T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{S}).$$

V takom prípade existuje prirodzený spôsob ako ‘potlačiť’ mieru μ ‘zľava doprava’, teda ako preniesť mieru v smere merateľného zobrazenia T . Definujeme tzv. *push-forward mieru* $T_*(\mu)$, krátko $T_*\mu$,

$$T_*\mu: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$$

vzt'ahom $T_*\mu := \mu \circ T^{-1}$, čím máme na mysli, že (pozri Obr. 3.7)

$$T_*\mu(A) := \mu(T^{-1}A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

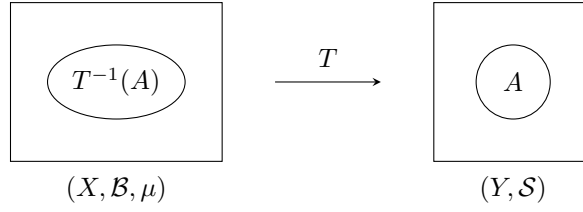
Uvedomte si, že vďaka merateľnosti T veličina $\mu(T^{-1}A)$ existuje, teda množinová funkcia $T_*\mu$ je dobre definovaná. Je to dokonca miera.

Propozícia 3.38. *Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ je merateľné zobrazenie. Potom push-forward miera $T_*\mu$ je miera na $\mathcal{S}$.*

Dôkaz. Cvičenie 3.12. □

²⁰Keďže nielen $\nu \ll \text{Leb}$, ale aj $\text{Leb} \ll \nu$, tak podľa Radonovej-Nikodymovej verty existuje aj Radonova-Nikodymova derivácia $d\text{Leb}/d\nu$, určiť ju by však bolo ťažšie.

²¹Takéto zobrazenie sa v ergodickej teórii volá aj transformácia, preto je štandardné označenie T . Niektorí autori však používajú označenie f .



Obr. 3.7: Mieru možno preniesť v smere zobrazenia T . Dostaneme push-forward mieru, $T_*\mu(A) := \mu(T^{-1}A)$

Príklad 3.39 (Push-forward Diracovej miery). Ak máme merateľné zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \delta_x) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ a potlačíme ‘dopredu’ (‘zl’ava doprava’) Diracovu mieru δ_x , teda mieru sediacu v bode $x \in X$, dostaneme mieru sediacu v bode $T(x) \in Y$. Inak povedané, tvrdíme, že

$$T_*\delta_x = \delta_{T(x)}.$$

Aby sme sa o tom presvedčili, zvolíme $A \in \mathcal{S}$ (môžete si to kresliť, podobne ako na Obr. 3.7). Ak A obsahuje/neobsahuje bod $T(x)$, tak $T^{-1}(A)$ obsahuje/neobsahuje bod x a $T_*\delta_x(A) = \delta_x(T^{-1}A)$ sa rovná jednej/nule. Teda $T_*\delta_x$ je práve miera $\delta_{T(x)}$. Formálnejšie zapísané:

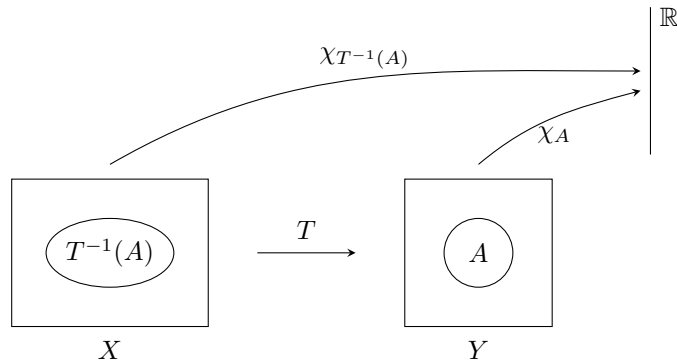
$$\begin{aligned} T_*\delta_x(A) &= \delta_x(T^{-1}A) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in T^{-1}A, \\ 0, & \text{ak } x \in X \setminus T^{-1}A \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ak } T(x) \in A, \\ 0, & \text{ak } T(x) \in Y \setminus A \end{cases} \\ &= \delta_{T(x)}(A). \end{aligned}$$

Bude užitočné ujasniť si, ako sa integruje podľa push-forward miery. Využijeme nasledujúci jednoduchý fakt.

Lema 3.40. *Nech $T: X \rightarrow Y$, $A \subseteq Y$. Potom pre charakteristické funkcie platí*

$$\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}.$$

Dôkaz. Obe funkcie sú definované na X a majú hodnoty v $\mathbb{R}$, dokonca v $\{0, 1\}$; pozrite Obr. 3.8.



Obr. 3.8: Ilustrácia k Leme 3.40

Pre každé $x \in X$ je

$$\begin{aligned}\chi_A \circ T(x) &= \chi_A(T(x)) = \begin{cases} 1, & \text{ak } T(x) \in A \\ 0, & \text{ak } T(x) \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in T^{-1}(A) \\ 0, & \text{ak } x \notin T^{-1}(A) \end{cases} \\ &= \chi_{T^{-1}(A)}(x).\end{aligned}$$

□

Propozícia 3.41 (Integrovanie podľa push-forward miery). *Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ je merateľné zobrazenie a nech $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ je funkcia.*

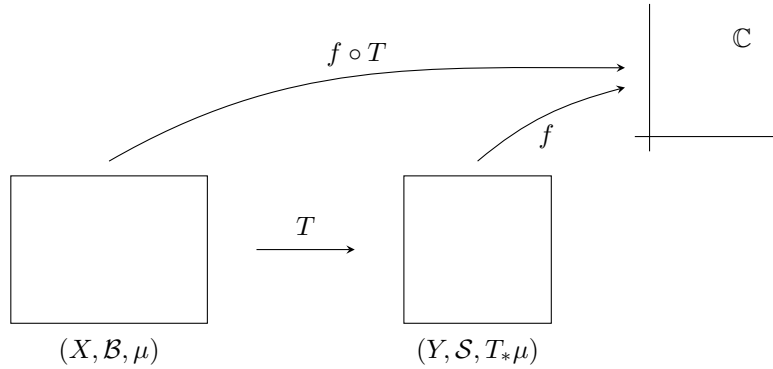
(1) *Ak $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ je merateľná, tak aj $f \circ T: X \rightarrow \mathbb{C}$ je merateľná.*²²

(2) *Nech $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ je merateľná. Potom platí (pozri Obr. 3.10)*

$$\int_Y f dT_*\mu = \int_X f \circ T d\mu \quad (3.6)$$

v tom zmysle, že ak existuje jeden integrál, tak existuje aj druhý a rovnajú sa.

(3) *Za predpokladu, že $T(X)$ je merateľná množina (t.j. $T(X) \in \mathcal{S}$), tak v časti (2) namiesto $\int_Y f dT_*\mu$ možno písať $\int_{T(X)} f dT_*\mu$.*



Obr. 3.9: Situácia pri integrovaní podľa push-forward miery; pozri (3.6)

Dôkaz. (1) Nech f je merateľná. Aby sme dokázali merateľnosť $f \circ T$, zvolíme otvorenú množinu $U \subseteq \mathbb{C}$. Potom $(f \circ T)^{-1}(U) = T^{-1}(f^{-1}U)$ je otvorená v X , lebo $f^{-1}(U)$ je otvorená v Y (vďaka predpokladu merateľnosti f) a T je merateľná.

(2) Vzhľadom na (1) predpokladáme, že f aj $f \circ T$ sú merateľné. Máme dokázať (3.6).

²²Obrátené tvrdenie neplatí. Napr. nech $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{B} = \mathcal{S}$ je σ -algebra borelovských množín v $[0, 1]$. Nech μ je Lebesguova miera na $(X, \mathcal{B})$. Nech T je konštantné zobrazenie zobrazujúce X do bodu 0. Potom T je merateľné a push-forward miera $T_*\mu$ na $\mathcal{S}$ sa zhoduje s Diracovou mierou δ_0 . Nech $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá nie je merateľná. Funkcia $f \circ T$ však merateľná je, lebo je konštantná na X .

- Najskôr predpokladajme, že $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{S}$. Potom $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ a podľa Lemy 3.40 je $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}$. Dostávame

$$\begin{aligned} \int_Y f dT_*\mu &= \int_Y \chi_A dT_*\mu = T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}A) = \\ &= \int_X \chi_{T^{-1}(A)} d\mu = \int_X \chi_A \circ T d\mu = \int_X f \circ T d\mu. \end{aligned}$$

Rovnosť (3.6) sme teda dokázali pre charakteristické (merateľné) funkcie. Špeciálne, (3.6) platí pre každú nezápornú charakteristickú (merateľnú) funkciu (tá nie je nevyhnutne integrovateľná, môže mať integrál $+\infty$).

- Z linearity integrálu pre nezáporné merateľné funkcie²³ je zrejmé, že ak tá rovnosť platí pre dve nezáporné (nie nutne integrovateľné) merateľné funkcie,²⁴ tak platí aj pre akúkoľvek ich lineárnu kombináciu.²⁵ Preto tá rovnosť platí pre každú jednoduchú nezápornú merateľnú funkciu $s = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$, $c_j > 0$.
- Nech teraz f je nezáporná merateľná funkcia (potom integrál f , nie nutne konečný, existuje). Keďže existuje neklesajúca postupnosť s_n jednoduchých nezáporných merateľných funkcií konvergujúca ku f , tak (podľa Beppo Leviho vety o monotónnej konvergencii) dostávame

$$\int f dT_*\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n dT_*\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (s_n \circ T) d\mu = \int (f \circ T) d\mu$$

(využili sme aj, že ak s_n bodovo konverguje k f , tak $s_n \circ T$ bodovo konverguje ku $f \circ T$).

- Nech teraz f je ľubovoľná reálna merateľná funkcia. Vyjadríme ju v tvare $f = f_+ - f_-$, kde f_+ , f_- sú nezáporné merateľné funkcie (a teda funkcie spĺňajúce rovnosť (3.6)). Opäť vďaka linearite integrálu aj f spĺňa rovnosť (3.6) (ak náhodou existuje jeden integrál, tak existuje aj druhý a rovnajú sa).
- Konečne, nech f je komplexná merateľná funkcia. Potom $f = f_1 + if_2$ kde f_1 , f_2 sú reálne merateľné funkcie. Už vieme, že f_1 , f_2 spĺňajú (3.6). Potom, znovu vďaka linearite integrálu, aj f spĺňa (3.6) (ak existuje jeden integrál, tak existuje aj druhý a rovnajú sa).

(3) Nech $T(X) \in \mathcal{S}$. Potom aj $Y \setminus T(X) \in \mathcal{S}$ a podľa definície push forward miery je

$$T_*\mu(Y \setminus T(X)) = 0.$$

Potom však $\int_Y f dT_*\mu = \int_{T(X)} f dT_*\mu$ v tom zmysle, že ak existuje jeden integrál, tak existuje aj druhý a rovnajú sa. $\square$

Poznámka 3.42 (Heuristické úvahy vedúce k Vete 3.43). Všimnime si výpočet integrálu substitúciou:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin x^2 dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{matrix} \right| = \int_0^{\pi} \sin t dt$$

²³ $\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\mu = c_1 \int f_1 d\mu + c_2 \int f_2 d\mu$ s nezápornými koeficientami c_1, c_2

²⁴ Pripomeňme, že nezáporná merateľná funkcia na priestore s mierou má integrál, ale tento integrál môže byť nekonečný, teda funkcia nemusí byť integrovateľná.

²⁵ Vysvetlite podrobne, využije sa, že $(f_1 \circ T) + (f_2 \circ T) = (f_1 + f_2) \circ T$.

Tieto Riemannove integrály môžeme chápať ako Lebesguove integrály, stačí namiesto dx písať $d\text{Leb}$. Ak ďalej formálne budeme uvažovať o miere $\mu = 2x \text{Leb}$ (teda $d\mu = 2x d\text{Leb}$, pozri Sekciu 3.8), tak môžeme výpočet formálne prepísať takto:

$$\int_{[0, \sqrt{\pi}]} \sin x^2 \underbrace{2x d\text{Leb}(x)}_{d\mu(x)} = \int_{[0, \pi]} \sin t d\text{Leb}(t).$$

Ak ešte zavedieme funkciu $T: [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow [0, \pi]$, $T(x) = x^2$, môžeme túto rovnosť zapísať v tvare

$$\int_{[0, \sqrt{\pi}]} \sin \circ T \underbrace{d\mu}_{2x d\text{Leb}} = \int_{[0, \pi]} \sin d\text{Leb}.$$

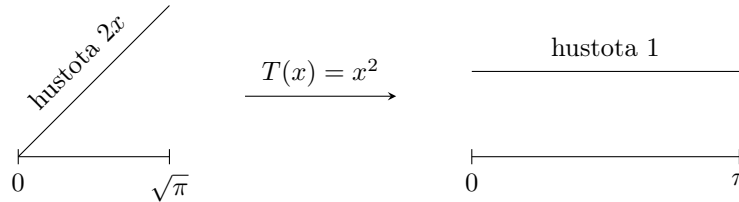
Podľa (3.6) pre integrál vľavo platí

$$\int_{[0, \sqrt{\pi}]} \sin \circ T \underbrace{d\mu}_{2x d\text{Leb}} = \int_{[0, \pi]} \sin dT_*\mu.$$

V posledných dvoch rovnostiach sa ľavé strany zhodujú, preto sa zhodujú aj pravé strany:

$$\int_{[0, \pi]} \sin d\text{Leb} = \int_{[0, \pi]} \sin dT_*\mu.$$

Z toho síce formálne nevyplýva, že $T_*\mu = \text{Leb}$, ale heuristicky sa predsa len zdá, že miera μ s hustotou $2x$ (vzhľadom na Lebesguovu mieru) sa potlačí dopredu zobrazením $T(x) = x^2$ tak, že hustotu $2x$ predelíme deriváciou $T'(x) = 2x$ (a tak dostaneme mieru Leb s hustotou 1, pozri aj Obr. 3.10).



Obr. 3.10: Vľavo je miera s hustotou $2x$ (čím viac doprava, tým je hustota úsečky väčšia). Zobrazenie $T(x) = x^2$ ju potlačí doprava do miery s hustotou 1, čo zodpovedá predeleniu deriváciou $T'(x) = 2x$.

Ide tu o heuristiku. Tiež je tu problém, že $T'(0) = 0$ a nulou deliť nemožno. Na druhej strane, Lebesguov integrál nie je chýlostivý na hodnotu v jednom bode, dokonca na hodnoty v bodoch množiny nulovej Lebesguovej miery, takže nás nemusí trápiť, ak je T' nenulová len Leb-skoro všade.

Pozrime sa ešte na dva jednoduché príklady.

Nech $T: [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$, $T(x) = 2x$. Nech μ je Lebesguova miera v $[0, 1/2]$, teda miera s hustotou $\varrho = 1$ vzhľadom na Lebesguovu mieru. Potom podľa definície push-forward miery je $T_*\mu([0, 1]) = \mu([0, 1/2]) = 1/2$, čo je len polovica Lebesguovej miery množiny $[0, 1]$ a podobne by to vyšlo pre každú lebesguovsky merateľnú množinu $A \subseteq [0, 1]$. Teda $T_*\mu$ je miera s hustotou $1/2$ vzhľadom na Lebesguovu mieru. Opäť sme dostali, že hustota miery $T_*\mu$ sa rovná hustote miery μ predelenej deriváciou zobrazenia T .

Teraz nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zobrazenie stan. Nech μ je Lebesguova miera na $[0, 1]$, teda miera s hustotou 1. Tentoraz $T_*\mu([0, 1]) = \mu([0, 1]) = 1$, čo je opäť miera s hustotou 1. Pritom derivácia T je $+2$ na $[0, 1/2]$ a -2 na $[1/2, 1]$. Zdanlivo nedošlo k predeleniu hustoty deriváciou T' . Vtip je v tom, že $T_*\mu([0, 1]) = \mu([0, 1]) = \mu([0, 1/2]) + \mu([1/2, 1]) = 1/2 + 1/2 = 1$. Hustota push-forward miery je 1, ale prirodzeným spôsobom je to súčet dvoch hustôt (zodpovedajúcich dvom častiam zobrazenia), pričom každá z nich sa získava ako podiel hustoty miery μ a *absolútnej hodnoty* derivácie T' .

V posledných dvoch príkladoch bola derivácia T' konštantná resp. konštantná na jednotlivých častiach, preto bola situácia zvlášť jednoduchá. Ak si však ešte pripomenieme situáciu s integrovaním sínusu zo začiatku tejto poznámky, nasledujúca veta nás určite neprekvapí.

Veta 3.43. *Nech $T: [a, b] \rightarrow [c, d]$ je také zobrazenie, že v intervale $[a, b]$ existujú po dvoch disjunktné otvorené intervaly $I_1, I_2, \dots$ (konečne alebo nekonečne²⁶ veľa intervalov tvaru $I_k = (a_k, b_k)$) s vlastnosťami:*

- (1) *zjednotenie $\bigsqcup_k I_k$ má plnú Lebesguovu mieru v $[a, b]$,*
- (2) *pre každé k , zúženie $T_k := T|_{I_k}$ je C^1 -difeomorfizmus otvoreného intervalu I_k na otvorený interval (c, d) .*

Ak na $[a, b]$ máme mieru μ s hustotou ϱ (vzhľadom na Lebesguovu mieru), tak push-forward miera T_μ na $[c, d]$ je miera s hustotou*

$$(T_*\varrho)(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y) \cap \bigsqcup_k I_k} \frac{\varrho(x)}{|T'(x)|}, \quad \text{pre } y \in (c, d). \quad (3.7)$$

(Teda $\mu = \varrho \text{Leb}_{[a,b]} \Rightarrow T_\mu = (T_*\varrho) \text{Leb}_{[c,d]}$, pričom hustota $T_*\varrho$ je určená vzťahom (3.7). Ked' tu hovoríme o Lebesguovej miere, máme na mysli Lebesguovu mieru definovanú na σ -algebre všetkých lebesguovsky merateľných podmnožín daného intervalu.)*

Skôr než začneme vetu dokazovať, uvedieme pár poznámok.

Hustotu $T_*\varrho$ sme vzťahom (3.7) určili len na otvorenom intervale (c, d) . To nevadí, lebo na jej hodnotách v dvoch bodoch vôbec nezáleží (ak ϱ_1 a ϱ_2 sa rovnajú Leb-skoro všade, tak miery $\varrho_1 \text{Leb}$ a $\varrho_2 \text{Leb}$ sa zhodujú).

Vzťah (3.7) sa dá zrejme prehľadnejšie prepísať takto:

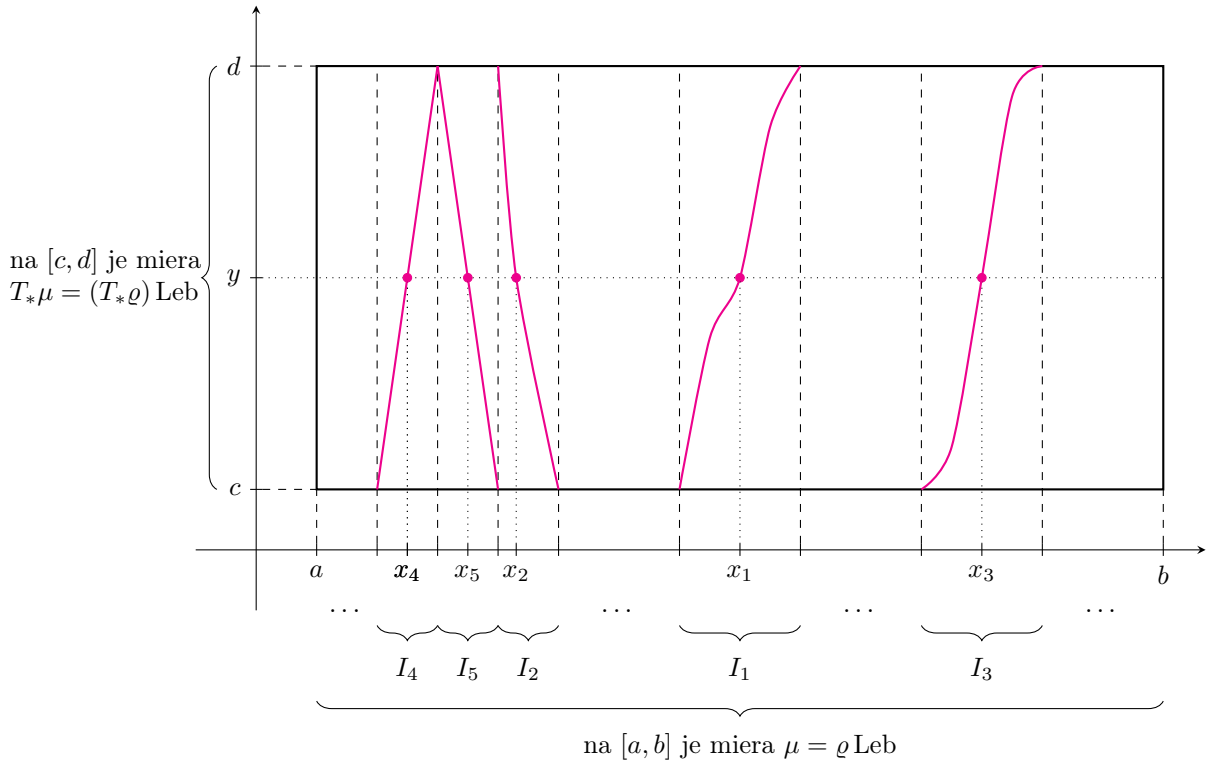
$$(T_*\varrho)(y) = \sum_k \frac{\varrho(x_k)}{|T'(x_k)|}, \quad \text{kde } x_k = T_k^{-1}(y), \quad \text{pre } y \in (c, d). \quad (3.8)$$

Situáciu znázorňuje Obr. 3.11.

Pre každé k , derivácia $T'(x_k)$ je konečná a nenulová (C^1 -difeomorfizmus má v každom bode konečnú nenulovú deriváciu.)

Množina $Z = [a, b] \setminus \bigsqcup_k I_k$ má nulovú Lebesguovu mieru a je to uzavretá množina v $[a, b]$, obsahujúca koncové body a, b . Môže to byť ľubovoľná uzavretá množina v $[a, b]$ s uvedenými vlastnosťami (komplement každej takej množiny je zjednotenie otvorených intervalov). Napríklad to môže byť strednotretinová Cantorova množina (je uzavretá a má Lebesguovu mieru nula, teda je aj nespočítateľná), intervaly I_k sú jej styčné intervaly nejako očíslované indexami $k = 1, 2, \dots$

²⁶samozrejme spočítateľne



Obr. 3.11: Ilustrácia Vety 3.43 a vzťahu (3.8). Nezáleží na tom, aké sú hodnoty T na množine $[a, b] \setminus \bigcup_k I_k$ nulovej Lebesguovej miery (vo vete sa o tých hodnotách nič nepredpokladá), preto ich na obrázku ani nevyznačujeme; tieto hodnoty môžu byť hocikde v $[c, d]$.

Keby sme vo vzťahu (3.7) písali $\sum_{x \in T^{-1}(y)}$, mohlo by sa stať, že pre nejaké $y \in (c, d)$ by išlo o nespočítateľnú sumu.²⁷ Lenže nespočítateľná suma sa nedá rozumne definovať, nehovoriac o tom, že v tých vzoroch bodu y , ktoré patria do Z , by neexistovala derivácia vystupujúca v (3.7).

Na intervaloch I_k máme C_1 -difeomorfizmy T_k . V predpokladoch sa však nič nehovorí o zobrazení T na množine Z . To má nasledujúce dôsledky.

- Na jednej strane, $T: ([a, b], \mathcal{L}_{[a, b]}) \rightarrow ([c, d], \mathcal{L}_{[c, d]})$ je určite merateľné zobrazenie.

Aby sme to ukázali, nech $A \subseteq [c, d]$ je lebesguovsky merateľná. Potom

$$T^{-1}(A) = \underbrace{(T^{-1}(A) \cap Z)}_{A_Z} \cup \bigcup_k \underbrace{T_k^{-1}(A)}_{A_k} \quad (3.9)$$

je tiež lebesguovsky merateľná. Naozaj, A_Z je lebesguovsky merateľná a má nulovú mieru, lebo je to podmnožina nulovej množiny Z (Lebesguova miera je úplná). Každá množina A_k je tiež lebesguovsky merateľná, lebo T_k je C_1 -difeomorfizmus (pozri Dôsledok 4.35 resp. koniec Sekcie 3.3).

- Na druhej strane, $T: ([a, b], \mathcal{B}_{[a, b]}) \rightarrow ([c, d], \mathcal{B}_{[c, d]})$ nemusí byť merateľné zobrazenie.

Naozaj, ak v (3.9) je množina A borelovská, jej vzor $T^{-1}(A)$ nemusí byť borelovská množina. Množiny A_k síce borelovské sú (spojitý vzor borelovskej množiny je borelovská), ale ukážeme,

²⁷Napr., okrem iných aj všetky body z horeuvedenej množiny Z , ktorá môže byť nespočítateľná, by sa mohli zobrazovať do y .

že množina A_Z nemusí byť borelovská (potom ani $T^{-1}(A)$ nie je borelovská). Napr. ak Z je strednotretinová Cantorova množina a Z_1 je taká jej podmnožina, ktorá nie je borelovská (pozri Príklad 3.7), tak v prípade, že $T(Z_1) = \{p\}$ a $T(Z \setminus Z_1)$ neobsahuje bod p , pre borelovskú množinu $A = \{p\}$ dostaneme $A_Z = Z_1$, čo nie je borelovská množina.

Ideme dokázať vetu.

Dôkaz. Vzhľadom na definíciu hustoty miery potrebujeme dokázať, že ak $A \subseteq [c, d]$ je lebesguovsky merateľná, tak

$$T_*\mu(A) \stackrel{?}{=} \int_A (T_*\varrho)(y) d\text{Leb}(y) = \int_{[c,d]} \chi_A(y)(T_*\varrho)(y) dy$$

(namiesto $d\text{Leb}(y)$ píšeme krátko dy). Podľa definície push-forward miery, ako aj s ohľadom na predpoklad, že $\mu = \varrho \text{Leb}$ a s využitím Lemy 3.40 môžeme ľavú stranu prepísať takto:

$$\begin{aligned} T_*\mu(A) &= \mu(T^{-1}A) = \int_{[a,b]} \chi_{T^{-1}A}(x) d\mu = \int_{[a,b]} \chi_{T^{-1}A}(x) \varrho(x) d\text{Leb}(x) \\ &= \int_{[a,b]} \chi_A(T(x)) \varrho(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} \chi_A(T_k(x)) \varrho(x) dx. \end{aligned}$$

(Mali by sme ešte pripočítat' integrál na množine $Z = [a, b] \setminus \bigcup_k I_k$, ale tento integrál je nulový, pretože podľa predpokladu je $\text{Leb}(Z) = 0$.) Našu úlohu teda môžeme preformulovať nasledovne. Pre fixovanú lebesguovsky merateľnú množinu $A \subseteq [c, d]$ máme dokázať rovnosť

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_{I_k} \chi_A(T_k(x)) \varrho(x) dx}_{J_k} \stackrel{?}{=} \int_{[c,d]} \chi_A(y)(T_*\varrho)(y) dy. \quad (3.10)$$

Túto rovnosť ideme teraz dokázať (budeme upravovať ľavú stranu a dostaneme pravú stranu).

Pre každé jedno k budeme integrál J_k počítať substitúciou $T_k(x) = y$; presnejšie, aby to bolo presne v súlade s Vetou 4.34(b), budeme dosadzovať

$$x = T_k^{-1}(y).^{28}$$

Pre dané k , zobrazenie T_k je C^1 -difeomorfizmom I_k na (c, d) , takže pre $y \in (0, 1)$ máme v I_k jediný vzor $T_k^{-1}(y)$. Pre deriváciu potom platí

$$(T_k^{-1})'(y) = \frac{1}{(T_k)'(T_k^{-1}(y))} = \frac{1}{T'(T_k^{-1}(y))}$$

Pomocou Vety 4.34(b) môžeme potom písať (namiesto integrálu na (c, d) píšeme integrál na $[c, d]$; tieto integrály sa zhodujú):

$$J_k = \int_{I_k} \chi_A(T_k(x)) \varrho(x) dx = \int_{[c,d]} \chi_A(y) \varrho(T_k^{-1}(y)) \left| \frac{1}{T'(T_k^{-1}(y))} \right| dy.$$

²⁸Vo Vete 4.34(b) išlo o dosadzovanie $y = T(x)$, takže tu máme vymenené označenie premenných.

Integrujú sa tu nezáporné funkcie, takže pri sumovaní takýchto integrálov v (3.10) môžeme podľa vety o monotónnej konvergencii zameniť poradie sumovania integrovania. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_{I_k} \chi_A(T_k(x)) \varrho(x) dx}_{J_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[c,d]} \chi_A(y) \frac{\varrho(T_k^{-1}(y))}{|T'(T_k^{-1}(y))|} dy \\ &= \int_{[c,d]} \chi_A(y) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho(T_k^{-1}(y))}{|T'(T_k^{-1}(y))|}}_{(T_*\varrho)(y)} dy = \int_{[c,d]} \chi_A(y) (T_*\varrho)(y) dy, \end{aligned}$$

takže sme naozaj dostali pravú stranu v (3.10) a dôkaz je skončený. $\square$

3.10 Cvičenia a projekty

Cvičenie 3.1. Nech X je množina a nech $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ je akákoľvek funkcia. Pre každú množinu $A \subseteq X$ definujeme

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x).$$

(Definujeme $\sum_{x \in \emptyset} f(x) = 0$. Ak je $A \neq \emptyset$, tak v sume $\sum_{x \in A} f(x)$ ignorujeme nulové členy a dostaneme sumu kladných členov. Ak je ich konečne veľa, je definícia sumy zrejmá. Ak je ich nekonečne spočítateľne veľa, interpretujeme sumu ako sumu nekonečného radu; keďže f je nezáporná, nezáleží na poradí členov. Ak je kladných členov nespočítateľne veľa, tak zrejme existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pre nespočítateľne veľa bodov $x \in A$ je $f(x) > 1/k$ (vysvetlite) a prirodzene definujeme $\sum_{x \in A} f(x) = +\infty$.) Presvedčte sa o tom, že platia nasledujúce tvrdenia.

- (a) $\sum_{x \in A} f(x) = \sup\{\sum_{x \in I} f(x) : I \subseteq A \text{ je konečná}\},$
- (b) μ je miera na σ -algebre 2^X .
- (c) Ak $f(x) = 1$ pre každé $x \in X$, tak μ je sčítacia miera (pozri Príklad 3.3).

Cvičenie 3.2. Na množine $X = \mathbb{R}$ uvažujme o σ -algebre $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$ a miere μ definovanej vzťahmi $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Je miera μ nonatomicná?

Cvičenie 3.3. Určte všetky atómy v priestore so sčítacou mierou.

Cvičenie 3.4. Nech X je nespočítateľná množina a nech

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq X : A \text{ je spočítateľná alebo } X \setminus A \text{ je spočítateľná}\}.$$

Definujme funkciu $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ takto:

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ak } A \text{ je spočítateľná,} \\ \infty & \text{ak } A \text{ je nespočítateľná.} \end{cases}$$

Dokážte nasledujúce tvrdenia.

- (a) $\mathcal{B}$ je σ -algebra.

- (b) μ je miera na $\mathcal{B}$, ale nie je σ -konečná.
- (c) Miera μ nemá jednobodové atómy a každá množina kladnej miery je atóm.

Cvičenie 3.5. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Dokážte nasledujúce tvrdenia.

- (a) Ak A je atóm a N množina nulovej miery, tak $A \cup N$ je atóm.
- (b) Ak $B \subseteq A$ sú dva atómy, tak $\mu(A \setminus B) = 0$.
- (c) Ak A je atóm, tak každá merateľná množina $B \subseteq A$ s kladnou mierou je tiež atóm.
- (d) Ak A, B sú atómy, tak, až na množinu nulovej miery, sa rovnajú alebo sú disjunktné.
- (e) Predpokladajme, že μ je σ -konečná. Dokážte, že existuje množina $X_0 \subseteq X$ taká, že X_0 je disjunktné zjednotenie spočítateľne veľa atómov priestoru $(X, \mathcal{B}, \mu)$ a $X \setminus X_0$ neobsahuje žiadne atómy. (Špeciálne to znamená, že σ -konečná miera má len spočítateľne veľa atómov, ak vôbec nejaké.)

Cvičenie 3.6. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Definujme *kváziatóm* ako množinu $A \in \mathcal{B}$, ktorá má kladnú mieru a nemá podmnožinu s *menšou kladnou* mierou (t.j. každá merateľná množina $B \subseteq A$ má mieru $\mu(B) = 0$ alebo $\mu(B) = \mu(A)$). Dokážte nasledujúce tvrdenia.

- (a) Každý atóm je aj kváziatóm.
- (b) Existuje priestor s mierou a v ňom kváziatóm, ktorý nie je atóm.²⁹
- (c) Dokážte, že v priestoroch s konečnou mierou pojmy atóm a kváziatóm splývajú.

Cvičenie 3.7. Nech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je priestor s mierou a $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ jeho zúplnenie. Dokážte, že jeden z nich je neatomický vtedy a len vtedy, keď druhý je neatomický.

Cvičenie 3.8. Ukážte priamo, bez Dôsledku 3.17, že Lebesguova miera na $\mathbb{R}$ je neatomická.

Cvičenie 3.9. Dokážte Propozíciu 3.20.

Cvičenie 3.10. Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor. Dokážte, že lineárna kombinácia neatomických mier na $\mathcal{B}$ je neatomická miera na $\mathcal{B}$.

Cvičenie 3.11. Dokážte Propozíciu 3.21. (Návod: Začnite prípadom, keď f je charakteristická funkcia množiny.)

Cvičenie 3.12. Dokážte Propozíciu 3.38.

Cvičenie 3.13. Nech $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X', \mathcal{B}')$ je merateľné zobrazenie a nech x, y sú dva rôzne body z X . Označme $T(x) = x'$, $T(y) = y'$. Určte

- (a) $T_*(\delta_x + \delta_y)$ ak $x' \neq y'$,
- (b) $T_*(\delta_x + \delta_y)$ ak $x' = y'$.

²⁹Poznamenajme, že niektorí autori definujú atóm práve podmienkou, ktorú sme my zvolili ako definíciu kváziatómu. To je dosť nešťastné, lebo kvôli tomu sa v literatúre objavujú neekvivalentné definície atómu. Časť (c) však ukazuje, že ak sa uvažujú len priestory s konečnou mierou, tak to až tak nevádi.

Kapitola 4

Mieru zachovávajúce systémy

4.1 Invariantné miery

V sekcii 3.9 sme k merateľnému zobrazeniu $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ zaviedli zobrazenie

$$T_*: \{\text{miery na } (X, \mathcal{B})\} \rightarrow \{\text{miery na } (Y, \mathcal{S})\}$$

definované nasledovne. Ak μ je miera na $(X, \mathcal{B})$, tak $T_*\mu$ je taká miera na $(Y, \mathcal{S})$, že

$$T_*\mu(A) := \mu(T^{-1}A), \quad A \in \mathcal{S}$$

(a naučili sme sa aj, ako sa integruje podľa takto definovanej push-forward miery).

V tejto sekcii sa pozrieme na špeciálny prípad, keď

$$(Y, \mathcal{S}) = (X, \mathcal{B}).$$

Ten má totiž súvis s tzv. invariantnými mierami, čo je fundamentálny pojem celej ergodickej teórie.

Nech teda $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ je merateľné zobrazenie. Keďže tu navyše máme aj mieru μ , budeme písať

$$T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu),$$

hoci zatiaľ predpokladáme len merateľnosť (čo nesúvisí s hodnotami miery). Pripomeňme, že merateľnosť zobrazenia T znamená to, že vzor každej merateľnej množiny je merateľná množina (formálne: ak $A \in \mathcal{B}$, tak $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$).

Teraz príde dôležitá definícia ergodickej teórie.

Definícia 4.1. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie. Povieme, že T je *mieru zachovávajúce zobrazenie* alebo že T *zachováva mieru* μ alebo že μ je *invariantná miera* pre T , ak

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \quad \text{pre všetky } A \in \mathcal{B}, \quad (4.1)$$

t.j. ak $\mu \circ T^{-1} = \mu$ na $\mathcal{B}$ alebo, inak zapísané,

$$T_*\mu = \mu \quad \text{na } \mathcal{B}. \quad (4.2)$$

(Teda μ je invariantná miera pre T , ak je to pevný bod zobrazenia T_* .)

Pripojme niekoľko poznámok k definícii:

- Zobrazenie T zachovávajúce mieru je merateľné podľa definície.
- Keďže T je merateľné, pre každé $A \in \mathcal{B}$ máme $T^{-1}A \in \mathcal{B}$ a teda $\mu(T^{-1}A)$ existuje. Dôležité je pamätať si, že v definícii je T^{-1} a nie T . Množina $T(A)$ by ani nemusela byť merateľná, takže hovoriť o $\mu(T(A))$ by ani nebolo dost' dobre možné.¹
- Samozrejme, môže sa stať, že T je náhodou bijekcia a navyše taká, že nielen T je merateľná ale aj T^{-1} je merateľná. Potom pre $A \in \mathcal{B}$ je nielen $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ ale aj $T(A) \in \mathcal{B}$, lebo $T(A) = (T^{-1})^{-1}(A)$ je vzor množiny A pri merateľnom zobrazení T^{-1} . V takomto špeciálnom prípade obojstranne merateľnej bijekcie by sme v definícii invariantnej miery mohli písať T namiesto T^{-1} , pretože v takomto prípade zrejme platí, že podmienka (4.1) je ekvivalentná s podmienkou

$$\mu(T(A)) = \mu(A) \quad \text{pre všetky } A \in \mathcal{B}. \quad (4.3)$$

Vo všeobecnosti však ekvivalentné nie sú, pozri Príklad 4.16.

- Definícia invariantnej miery, aspoň v prípade, že μ je pravdepodobnostná miera, heuristicky znamená nasledujúce. Pre $A \in \mathcal{B}$ hodnotu $\mu(A)$ interpretujeme ako pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod z X patrí do množiny A . Potom $\mu(T^{-1}A)$ je pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod z X patrí do množiny $T^{-1}A$, čo je ekvivalentné s tým, že T -obraz toho bodu patrí do množiny A . Teda invariantnosť miery znamená, že pre každú merateľnú množinu A je pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod patrí do A , rovnaká ako pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod má obraz patriaci do A .

Príklad 4.2 (Pre identitu je každá miera invariantná). Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je akýkoľvek priestor s mierou a nech $T: X \rightarrow X$ je identita (teda $T(x) = x$ pre každé $x \in X$, píšeme $T = \text{Id}_X$.) Potom $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné a zachováva mieru μ , lebo triviálne $T^{-1}(A) = A$ pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$.

Príklad 4.3 (Lebesguova miera v $\mathbb{R}^n$ je invariantná pre zhodné zobrazenia). Nech $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{L}$ je σ -algebra borelovských resp. lebesguovsky merateľných množín v $\mathbb{R}^n$ a nech Leb je Lebesguova miera v $\mathbb{R}^n$. Ako vieme z geometrie, každé zhodné zobrazenie $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je bijekcia a inverzné zobrazenie T^{-1} je tiež zhodné. Ak $A \in \mathcal{B}$, resp. $A \in \mathcal{L}$, tak aj $T(A), T^{-1}(A)$ patria do $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{L}$ a ako vieme z teórie miery, platí $\text{Leb}(T(A)) = \text{Leb}(A) = \text{Leb}(T^{-1}(A))$. Druhá rovnosť znamená, že Lebesguova miera je invariantná pre zhodné zobrazenia. Formálnejšie, ak $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zhodné zobrazenie, tak $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \text{Leb}_{\mathcal{B}}, T)$ a $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \text{Leb}_{\mathcal{L}}, T)$ sú mieru zachovávajúce systémy (namiesto $\mathcal{B}$ a $\mathcal{L}$ by sme mali písať $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ a $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$).

Ak miera μ je invariantná pre T , tak je invariantná aj pre iterácie T^k , $k \geq 2$. To je zrejmé a vyplýva to aj z nasledujúcej propozície.

Propozícia 4.4. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T, S: X \rightarrow X$ zachovávajú mieru μ . Potom aj $T \circ S$ ju zachováva.*

Dôkaz. Stačí si uvedomiť, že $(T \circ S)^{-1}(A) = S^{-1}(T^{-1}A)$. □

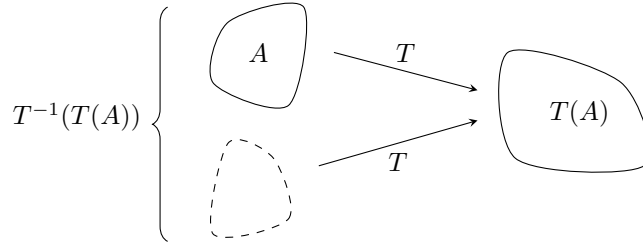
Nasledujúca propozícia ukazuje, trochu nepresne povedané, že pozdĺž trajektórie invariantná miera (neostro) rastie.

¹Poznamenajme, že v matematike sa vzory a nie obrazy dobre správajú. To je tiež akýsi formálny dôvod na použitie T^{-1} a nie T .

Propozícia 4.5. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T: X \rightarrow X$ zachováva mieru μ . Potom pre každé $A \in \mathcal{B}$ také, že aj $T(A) \in \mathcal{B}$,² platí*

$$\mu(T(A)) \geq \mu(A).$$

Dôkaz. Celý vtip je v tom, že vzor množiny $T(A)$ obsahuje množinu A , ale vo všeobecnosti je väčší ako množina A , pozri Obr. 4.1.



Obr. 4.1: T -vzor množiny $T(A)$ je vo všeobecnosti vlastnou nadmnožinou množiny A . (Môže sa stať, že napr. $\mu(T(A)) = 2$, $\mu(A) = 1$ a ‘druhá’ časť vzoru množiny $T(A)$ má tiež mieru 1. Vo všeobecnosti teda môže byť $\mu(T(A)) > \mu(A)$, hoci T zachováva mieru μ .)

Formálny dôkaz propozície nasleduje. Nech $A, T(A) \in \mathcal{B}$. Keďže T je merateľné, tak aj $T^{-1}(T(A)) \in \mathcal{B}$. Keďže T zachováva mieru, platí $\mu(T(A)) = \mu(T^{-1}(T(A)))$. Lenže triviálne je $T^{-1}(T(A)) \supseteq A$, takže monotónnosť miery dá $\mu(T^{-1}(T(A))) \geq \mu(A)$. Teda $\mu(T(A)) \geq \mu(A)$. $\square$

Príklad 4.6 (Invariantná miera sediaca v periodickej orbite). Nech $T: X \rightarrow X$ je zobrazenie majúce periodický bod x_0 s periódou p , teda $x_0, x_1 = T(x_0), \dots, x_{p-1} = T^{p-1}(x_0)$ je periodická orbita pozostávajúca z p navzájom rôznych bodov. Posadíme do tej orbity mieru, ktorá uvedeným bodom (presnejšie príslušným jednobodovým množinám) v danom poradí priraduje miery $w_0, w_1, \dots, w_{p-1}$. Uvažujeme teda o miere μ , definovanej na σ -algebre 2^X vzťahom (porovnaj s Príkladom 3.22)

$$\mu := w_0 \delta_{x_0} + w_1 \delta_{x_1} + \dots + w_{p-1} \delta_{x_{p-1}}.$$

Ak chceme, aby μ bola invariantná pre T , tak podľa Propozície 4.5 musíme váhy w_i zvolit’ tak, aby neklesali pozdĺž trajektórie. Lenže za p krokov sa z bodu x_0 dostaneme znovu do neho, teda sa nám nerovnosti ‘zacykľia’: $w_0 \leq w_1 \leq \dots \leq w_{p-1} \leq w_0$. Všetky váhy sú teda rovnaké. Odtiaľ dostávame, že μ má nevyhnutne tvar

$$\mu = w_0 (\delta_{x_0} + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_{p-1}}). \quad (4.4)$$

Obrátene, miera tohto tvaru je invariantná pre T . Naozaj, nech v každom z p bodov tej periodickej orbity sedí rovnaká miera w_0 a nech $A \subseteq X$. Ak A obsahuje k spomedzi tých p bodov, tak aj $T^{-1}(A)$ ich obsahuje presne k (vysvetlite). To ale znamená, že $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) = kw_0$, čo dokazuje, že μ je invariantná. Samozrejme, ak chceme aby invariantná miera (4.13) bola navyše pravdepodobnostná, treba zvolit’ $w_0 = 1/p$.

Špeciálne, Diracova miera sediaca v bode p je invariantná pre T vtedy a len vtedy, keď p je pevný bod pre T .

Ak miera μ je invariantná pre T , tak triviálne aj miera $T_*\mu$ je invariantná pre T , veď predpoklad invariantnosti μ dáva, že $T_*\mu = \mu$. Obrátené tvrdenie vo všeobecnosti neplatí. Ak $T_*\mu$ je

²Tento predpoklad znamená, že aj $\mu(T(A))$ existuje.

invariantná pre T , tak μ nemusí byť invariantná pre T . Inak povedané, môže sa stať, že μ nie je invariantná, ale $T_*\mu$ je. Uvedieme na to asi najjednoduchší možný príklad.

Príklad 4.7 ($T_*\mu$ môže byť invariantná aj keď μ nie je invariantná). Nech $X = \{a, b\}$, $a \neq b$. Uvažujme o σ -algebre 2^X a Diracovej miere δ_a na σ -algebre 2^X . Nech zobrazenie $T: X \rightarrow X$ je definované tak, že $T(a) = T(b) = b$. Potom δ_a nie je invariantná miera pre T , ale jej push-forward miera $T_*\delta_a = \delta_{T(a)} = \delta_b$ je invariantná pre T .

Ak merateľné zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ má pevný bod p , môžeme uvažovať o Diracovej miere δ_p sediacej v bode p . Pomocou tejto miery vieme odmerať nielen každú množinu z $\mathcal{B}$ (napr. $X \in \mathcal{B}$ a $\delta_p(X) = 1$, ide teda o pravdepodobnostnú mieru), ale dokonca každú podmnožinu X . Podľa predchádzajúceho príkladu je to invariantná miera pre merateľné zobrazenie $T: (X, 2^X) \rightarrow (X, 2^X)$. Ak však z nejakých dôvodov nechceme zväčšovať našu σ -algebru $\mathcal{B}$ a chceme uvažovať len o invariantných mierach na $\mathcal{B}$, môžeme uvažovať o miere δ_p zúženej len na $\mathcal{B}$, teda (ak ponecháme aj pre zúženú mieru pôvodné označenie δ_p)

$$\delta_p(A) := \begin{cases} 1, & \text{ak } p \in A, \\ 0, & \text{ak } p \in X \setminus A \end{cases} \quad (\text{len pre } A \in \mathcal{B}.$$

Keďže $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ je podľa predpokladu merateľné, je miera δ_p zúžená na $\mathcal{B}$ zrejme stále invariantná miera pre T . (Aj všeobecne, ak invariantnú mieru pre $T: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$, definovanú na nejakej “veľkej” σ -algebre $\mathcal{A}$, zúžime na nejakú menšiu σ -algebru $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, vzhľadom na ktorú je T tiež merateľné, tak táto zúžená miera je invariantná pre $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$).

Lenže T môže mať aj iný pevný bod q a potom aj δ_q je invariantná miera pre T . Už táto jednoduchá úvaha ukazuje, že merateľné zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ môže mať viacero, aj podstatne rôznych, invariantných mier. Potom vieme pomocou nasledujúcej propozície vyrobiť nekonečne veľa invariantných mier pre T .

Propozícia 4.8. *Lineárna kombinácia invariantných mier pre merateľné zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ je opäť invariantná miera pre T .*

Dôkaz. Nech μ_1, μ_2 sú invariantné miery pre T a nech $\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$. Nech $A \in \mathcal{B}$. Potom $T^{-1}A \in \mathcal{B}$ a $\mu_1(T^{-1}A) = \mu_1(A)$ a rovnako $\mu_2(T^{-1}A) = \mu_2(A)$. Preto

$$\mu(T^{-1}A) = c_1\mu_1(T^{-1}A) + c_2\mu_2(T^{-1}A) = c_1\mu_1(A) + c_2\mu_2(A) = \mu(A),$$

čo dokazuje, že μ je invariantná. Podobne pre dlhšie ako dvojčlenné lineárne kombinácie (prípadne použite matematickú indukciu). $\square$

Predstavme si, že chceme dokázať, že nejaké zobrazenie $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zachováva Lebesguovu mieru — dokazujeme teda, že

$$([0, 1], \mathcal{L}_{[0,1]}, \text{Leb}, T)$$

je mieru zachovávajúci systém. Mali by sme dokázať, že pre každú lebesguovskú merateľnú množinu $L \subseteq [0, 1]$ je aj $T^{-1}(L)$ lebesguovskú merateľná a $\text{Leb}(T^{-1}(L)) = \text{Leb}(L)$. Lebesguovské merateľných množín je viac ako borelovských, v skutočnosti však stačí dokázať, že pre každú borelovskú množinu $B \subseteq [0, 1]$ je aj $T^{-1}(B)$ borelovská a $\text{Leb}(T^{-1}(B)) = \text{Leb}(B)$. Inak povedané, tvrdíme, že stačí dokázať, že

$$([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \text{Leb}, T)$$

je mieru zachovávajúci systém. To vyplýva z nasledujúcej propozície, pretože priestor s mierou $([0, 1], \mathcal{L}_{[0,1]}, \text{Leb})$ je zúplnením priestoru s mierou $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \text{Leb})$.³

Propozícia 4.9 (Zúplnenie m.z. systému je m.z. systém). *Nech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je priestor s mierou a $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ jeho zúplnenie. Nech T je zobrazenie $X \rightarrow X$. Potom platí, že ak $T: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$ je merateľné a zachováva mieru μ , tak $T: (X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}) \rightarrow (X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ je merateľné a zachováva mieru $\overline{\mu}$.*

Dôkaz. Najskôr pripomeňme, že podľa Vety 3.5 množina patrí do $\overline{\mathcal{A}}$ práve vtedy, keď je zjednotením $\mathcal{A}$ -merateľnej A a sub-nulovej Z , pritom jej $\overline{\mu}$ -miera sa rovná $\mu(A)$. Predpokladajme, že

$$T: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{je merateľné a zachováva mieru } \mu. \quad (4.5)$$

Aby sme dokázali merateľnosť $T: (X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}) \rightarrow (X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$, vezmime ľubovoľnú množinu $\overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}$, teda množinu tvaru $\overline{A} = A \cup Z$ kde $A \in \mathcal{A}$ a $Z \subseteq N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$. Potom

$$T^{-1}\overline{A} = T^{-1}(A \cup Z) = \underbrace{T^{-1}A}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{T^{-1}Z}_{\text{sub-nulová}},$$

kde vďaka (4.5) je $T^{-1}A \in \mathcal{A}$ a $T^{-1}Z$ je sub-nulová, lebo $T^{-1}Z \subseteq T^{-1}N$, $\mu(T^{-1}N) = \mu(N) = 0$. Teda $T^{-1}(\overline{A}) \in \overline{\mathcal{A}}$, ako sme potrebovali dokázať.⁴ Navyše, potom podľa Vety 3.5 je

$$\overline{\mu}(T^{-1}\overline{A}) = \overline{\mu}(T^{-1}A \cup T^{-1}Z) = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) = \overline{\mu}(A \cup Z) = \overline{\mu}(\overline{A}).$$

Teda T zachováva mieru $\overline{\mu}$. □

Propozíciu budeme používať nielen na prechod od m.z. systému $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \text{Leb}_{\mathcal{B}_{[0,1]}}, T)$ ku systému $([0, 1], \mathcal{L}_{[0,1]}, \text{Leb}_{\mathcal{L}_{[0,1]}}, T)$, ale aj v situáciách o niečo všeobecnejších, keď namiesto Lebesguovej miery budeme mať mieru majúcu (skoro všade kladnú) hustotu vzhľadom na Lebesguovu mieru.

Budeme pracovať s borelovskou množinou $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Pripomeňme, že $\mathcal{B}_X$ označuje σ -algebru borelovských množín priestoru X a $\text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$ je Lebesguova miera definovaná na tejto σ -algebre. Podobne $\mathcal{L}_X$ je σ -algebra lebesguovsky merateľných množín priestoru X a $\text{Leb}_{\mathcal{L}_X}$ je Lebesguova miera definovaná na nej.

Dôsledok 4.10. *Nech $X \subseteq \mathbb{R}^d$ je borelovská množina a nech*

$$\varrho: X \rightarrow [0, \infty) \quad \text{je } \mathcal{B}_X\text{-merateľná a } \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}\text{-skoro všade kladná.}^5$$

Potom

(1) $\varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$ je miera na $\mathcal{B}_X$, ekvivalentná s Lebesguovou mierou $\text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$. Podobne $\varrho \text{Leb}_{\mathcal{L}_X}$ je miera na $\mathcal{L}_X$, ekvivalentná s Lebesguovou mierou $\text{Leb}_{\mathcal{L}_X}$.

(2) Zúplnením priestoru s mierou $(X, \mathcal{B}_X, \varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X})$ je priestor s mierou $(X, \mathcal{L}_X, \varrho \text{Leb}_{\mathcal{L}_X})$.

³Keby sme chceli byť veľmi precízni, mali by sme písať $\text{Leb}_{\mathcal{L}_{[0,1]}}$ a $\text{Leb}_{\mathcal{B}_{[0,1]}}$.

⁴Všimnite si, že na dôkaz merateľnosti $T: (X, \overline{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \overline{\mathcal{A}})$ sme využili nielen merateľnosť $T: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$, ale aj to, že T zachováva mieru μ na $\mathcal{A}$. Samotná merateľnosť $T: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ by nestačila. Ak napr. vezmeme homeomorfizmus $(1/2)^F$ z Príkladu 3.8 a k nemu inverzný homeomorfizmus $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, tak T je zobrazenie, ktoré je merateľné vzhľadom na σ -algebru $\mathcal{B}_{[0,1]}$ borelovských množín (avšak T nezachováva Lebesguovu mieru $\text{Leb}_{\mathcal{B}_{[0,1]}}$ na $\mathcal{B}_{[0,1]}$). Zúplnením priestoru s mierou $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \text{Leb}_{\mathcal{B}_{[0,1]}})$ je priestor s mierou $([0, 1], \mathcal{L}_{[0,1]}, \text{Leb}_{\mathcal{L}_{[0,1]}})$. Homeomorfizmus T však nie je merateľný vzhľadom na σ -algebru $\mathcal{L}_{[0,1]}$.

⁵Je známe, že každá lebesguovsky merateľná množina nulovej Lebesguovej miery je obsiahnutá v borelovskej množine nulovej Lebesguovej miery. Tiež si všimnite, že ϱ je $\mathcal{B}_X$ -merateľná, preto množina $\varrho^{-1}(0)$ je automaticky borelovská. To znamená, že nasledujúce tri podmienky sú ekvivalentné: (i) ϱ je $\text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$ -skoro všade kladná, (ii) ϱ je kladná mimo nejakej množiny z $\mathcal{L}_X$ s nulovou Lebesguovou mierou, (iii) (borelovská) množina $\varrho^{-1}(0)$ má nulovú Lebesguovu mieru.

- (3) Ak $T: (X, \mathcal{B}_X, \varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}) \rightarrow (X, \mathcal{B}_X, \varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X})$ je merateľné a zachovávajúce mieru $\varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$, tak $T: (X, \mathcal{L}_X, \varrho \text{Leb}_{\mathcal{L}_X}) \rightarrow (X, \mathcal{L}_X, \varrho \text{Leb}_{\mathcal{L}_X})$ je merateľné a zachovávajúce mieru $\varrho \text{Leb}_{\mathcal{L}_X}$.

Dôkaz. (1) Podľa (3.4) ide o miery. Podľa Propozície 3.33(2) je $\varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X} \sim \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$.

(2) Nech $\mathcal{Z}$ je systém všetkých podmnožín množín nulovej $\varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$ -miery (táto miera je definovaná na $\mathcal{B}_X$). Podľa Vety 3.5 je zúplnením priestoru s mierou $(X, \mathcal{B}_X, \varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X})$ priestor s mierou $(X, \overline{\mathcal{B}_X}, \varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X})$, kde

$$\overline{\mathcal{B}_X} = \{B \cup Z : B \in \mathcal{B}_X, Z \in \mathcal{Z}\} \quad a \quad \overline{\varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}}(B \cup Z) = \varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}(B). \quad (4.6)$$

Teraz si treba uviesť dve veci:

- Podľa Propozície 3.33(2) je $\varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X} \sim \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$, preto $\mathcal{Z}$ splýva so systémom všetkých podmnožín množín nulovej $\text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$ -miery. To hneď ukazuje, že $\overline{\mathcal{B}_X} = \mathcal{L}_X$, pozri (3.1). Zároveň to ukazuje, že ak $Z \in \mathcal{Z}$, tak $\text{Leb}_{\mathcal{L}_X}(Z) = 0$.
- Pre $B \in \mathcal{B}_X$ je $\text{Leb}_{\mathcal{B}_X}(B) = \text{Leb}_{\mathcal{L}_X}(B)$, lebo $\text{Leb}_{\mathcal{L}_X}$ na $\mathcal{B}_X$ splýva s $\text{Leb}_{\mathcal{B}_X}$, a pre $Z \in \mathcal{Z}$ sme pred chvíľou ukázali, že $\text{Leb}_{\mathcal{L}_X}(Z) = 0$. Odtiaľ rovnosť vpravo v (4.6) možno upraviť takto:

$$\overline{\varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}}(B \cup Z) = \varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}(B) = \varrho \text{Leb}_{\mathcal{L}_X}(B) = \varrho \text{Leb}_{\mathcal{L}_X}(B \cup Z).$$

Ukázali sme, že priestor $(X, \overline{\mathcal{B}_X}, \overline{\varrho \text{Leb}_{\mathcal{B}_X}})$ nie je nič iné ako priestor $(X, \mathcal{L}_X, \varrho \text{Leb}_{\mathcal{L}_X})$, čím je dôkaz (2) skončený.

(3) Toto vyplýva z (2) a Propozície 4.9. □

4.2 Dynkinova veta a overovanie invariantnosti mier

Ak overujeme, či T zachováva mieru μ , mali by sme overiť, že $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ pre všetky $A \in \mathcal{B}$. To je väčšinou oveľa ťažšie ako v príkladoch v predchádzajúcej sekcii. Našťastie, v skutočnosti netreba overiť podmienku $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ pre všetky množiny $A \in \mathcal{B}$, stačí to urobiť len pre niektoré množiny. Budeme využívať Dynkinovu vetu, pozri Vetu 3.29, ktorú však mierne preformulujeme, aby sa nám na overovanie invariantnosti mier potom ľahšie používala.

Veta 4.11 (Dynkinova veta o jednoznačnosti mier, ekvivalentný tvar). *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Nech $\mathcal{G}$ je systém množín v X , s vlastnosťami:*

(D1) $\mathcal{G}$ je generátorom pre $\mathcal{B}$ (t.j. $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}$),

(D2) $\mathcal{G}$ je uzavretý vzhľadom na konečné prieniky (t.j. $G, H \in \mathcal{G} \implies G \cap H \in \mathcal{G}$),

(D3) v $\mathcal{G}$ existuje rastúca postupnosť množín $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ s konečnými μ -mierami taká, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = X$.

Nech ν je ďalšia miera na $(X, \mathcal{B})$ a nech

(D4) $\nu = \mu$ na $\mathcal{G}$.

Potom $\nu = \mu$ na celej σ -algebre $\mathcal{B}$, t.j. $\nu(A) = \mu(A)$ pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$.

Ešte raz pripomeňme, že ak miera μ je konečná, tak podmienku (D3) netreba overovať, je splnená automaticky.

Dokazovať, že μ je invariantná miera pre $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$, znamená dokazovať rovnosť dvoch mier:

$$\underbrace{T_*\mu}_{\nu} = \mu \quad \text{na } \mathcal{B}. \quad (4.7)$$

Teda mali by sme overiť, že

$$\underbrace{\mu(T^{-1}A)}_{\nu(A)} = \mu(A) \quad \text{pre každú množinu } A \in \mathcal{B}.$$

To môže byť veľmi ťažké, lebo často je to tak, že nevieme presne opísať, ako presne vyzerajú všetky merateľné množiny A . Podľa Dynkinovej vety však stačí nájsť systém $\mathcal{G}$ spĺňajúci predpoklady (D1), (D2), (D3) z vety a overiť ešte (D4), teda že $\nu = \mu$ na $\mathcal{G}$, t.j.

$$\mu(T^{-1}G) = \mu(G) \quad \text{pre každé } G \in \mathcal{G}.$$

Potom $\nu = \mu$ na celej σ -algebry $\mathcal{B}$, teda

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \quad \text{pre všetky } A \in \mathcal{B},$$

čiže miera μ je invariantná pre T . Dospeli sme k záveru, že

na dôkaz invariantnosti miery μ stačí nájsť $\mathcal{G}$ ako v Dynkinovej vete a dokázať

$$\mu(T^{-1}G) = \mu(G), \quad G \in \mathcal{G}.$$

(4.8)

Pritom “ $\mathcal{G}$ ako v Dynkinovej vete” tu znamená $\mathcal{G}$ spĺňajúce (D1), (D2), (D3).

Poznámka 4.12 (Vhodná voľba $\mathcal{G}$ v dôležitých prípadoch). V nasledujúcej Tabuľke 4.1 je ukázané, ako možno voliť systém $\mathcal{G}$ v niektorých dôležitých prípadoch ($\mathcal{G}$ je systém množín takého tvaru, ako je uvedené v pravom stĺpci). Presvedčte sa, že v každom z tých prípadov sú naozaj splnené predpoklady (D1) a (D2) z Dynkinovej vety. V prípade, že μ je konečná na množinách z $\mathcal{G}$, vidieť, že je splnená aj podmienka (D3). Pripomeňme ešte, že $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je kružnica (s jednotkovým obvodom, teda interval $[0, 1]$, v ktorom zlepíme koncové body).

Overovanie, že merateľné zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva mieru μ		
X	$\mathcal{B}$	$\mu(T^{-1}G) = \mu(G)$ stačí overiť napr. pre (ak μ je na nich konečná)
$\mathbb{R}$	borelovské množiny	intervaly $[a, b]$
$[0, 1]$		intervaly $[0, b]$
$\mathbb{R}^2$		intervaly $[a, b] \times [c, d]$
$[0, 1]^2$		intervaly $[0, b] \times [0, d]$
$[0, 1)$		intervaly $[0, b]$ (alebo $[0, b)$)
$\mathbb{S}^1$		oblúky $[0, b]$ (alebo $[0, b)$)

Tab. 4.1: Overovanie invariantnosti miery v niektorých dôležitých prípadoch

Poznámka 4.13 (Ak v Tabuľke 4.1 je $\mu = \text{Leb}$). Ak náhodou miera μ v tejto tabuľke je Lebesguovou mierou Leb (na $\mathcal{B}$) a dokážeme jej invariantnosť pre T (pomocou voľby množín G ako je naznačené v tabuľke alebo hocijako inak), tak podľa Propozície 4.9 (resp. Dôsledku 4.10 s voľbou $\varrho \equiv 1$) vieme, že potom automaticky T zachováva aj Lebesguovu mieru Leb na väčšej σ -algebre $\mathcal{L}$.

Poznámka 4.14 (Ak v Tabuľke 4.1 je $\mu = \varrho \text{Leb}$, ϱ kladná Leb-skoro všade). Nech miera μ v tejto tabuľke je tvaru ϱLeb (na $\mathcal{B}$), ϱ kladná Leb-skoro všade. Predpokladajme, že dokážeme jej invariantnosť pre T (pomocou voľby množín G ako je naznačené v tabuľke alebo hocijako inak). Podľa Dôsledku 4.10 vieme, že potom T automaticky zachováva aj mieru ϱLeb na väčšej σ -algebre $\mathcal{L}$.

Poznámka 4.15 (Ak v Tabuľke 4.1 je $\mu \neq \varrho \text{Leb}$, ale μ je stále definovaná aj na $\mathcal{L}$). Uvažujme teraz o situácii, keď miera μ v tabuľke nie je tvaru ako v predchádzajúcej poznámke, ale stále je prirodzene definovaná nielen na borelovských, ale dokonca na všetkých lebesguovsky merateľných množinách v X . Predpokladajme, že nám vyjde, že T zachováva μ na $\mathcal{B}$. V takom prípade je prirodzené sa pýtať, či T zachováva μ aj na $\mathcal{L}$.

Predovšetkým, museli by sme vedieť, že $T: (X, \mathcal{L}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{L}, \mu)$ je merateľné, teda že vzor lebesguovsky merateľnej množiny je opäť lebesguovsky merateľná množina (vieme, že dokonca ani v prípade homeomorfizmu T to tak nemusí byť, hoci vtedy vzor borelovskej množiny je automaticky borelovská množina; pozri Príklad 3.8 a diskusiu za ním). Predpokladajme však, že tomu tak je. Ak chceme potom overiť, či je miera μ (definovaná na $\mathcal{L}$) invariantná pre T , čo vtedy zvolit' ako generátor $\mathcal{G}$?

Ako sme už povedali v Sekcii 3.3, σ -algebra $\mathcal{L}$ lebesguovsky merateľných množín je generovaná otvorenými množinami a množinami nulovej Lebesguovej miery, pričom samozrejme namiesto všetkých otvorených množín môžeme vziať iný systém, ktorý generuje σ -algebru $\mathcal{B}$ borelovských množín. Z toho vyplýva, že

- v analogickej tabuľke pre σ -algebru $\mathcal{L}$ lebesguovsky merateľných množín možno za “dynkinovský” generátor zvolit' systém

$$\mathcal{G} = \{\text{intervaly ako v Tabuľke 4.1 a okrem toho množiny nulovej Leb-miery}\},$$

ak sú splnené už spomínané predpoklady:

- (i) miera μ je definovaná na $\mathcal{L}$,
- (ii) $T: (X, \mathcal{L}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{L}, \mu)$ je merateľné.

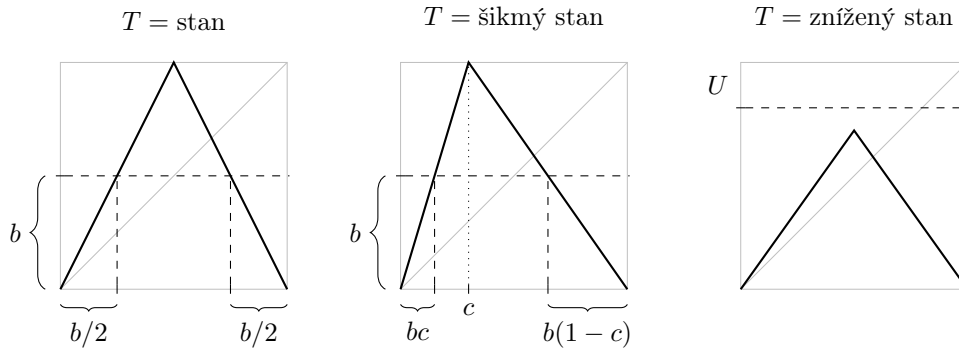
Naozaj, takýto systém je, ako sme povedali, generátorom pre $\mathcal{L}$ (teda platí (D1)) a spĺňa aj ostatné predpoklady Dynkinovej Vety 4.11. Predpoklad (D3) je splnený automaticky, lebo ho spĺňal systém intervalov z Tabuľky 4.1. Predpoklad (D2) je splnený, lebo ho spĺňal systém intervalov z Tabuľky 4.1 a prienik množiny nulovej Leb-miery s inou množinou je opäť množina nulovej Leb-miery (lebo Leb je úplná).

Záver teda znie, že v opísanej situácii treba, ak sú splnené uvedené predpoklady (i) a (ii), overovať rovnosť $\mu(T^{-1}G) = \mu(G)$ pre intervaly ako v Tabuľke 4.1 a okrem toho ešte pre množiny nulovej Leb-miery.

Príklad 4.16 (Lebesguova miera je invariantná pre zobrazenie “stan”). Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zobrazenie “stan”, definované vzťahom $T(x) := 1 - |2x - 1|$, teda

$$T(x) := \begin{cases} 2x & \text{ak } x \in [0, 1/2], \\ 2 - 2x & \text{ak } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(pozri Obr. 4.2 vľavo). Ukážeme, že toto zobrazenie zachováva Lebesguovu mieru na σ -algebri $\mathcal{B}$ borelovských množín.



Obr. 4.2: Stan aj šikmý stan zachovávajú Lebesguovu mieru, znížený stan nie.

Zobrazenie T je $\mathcal{B}$ -merateľné, takže podľa Tabuľky 4.1 stačí overiť, že $\text{Leb}(T^{-1}[0, b]) = \text{Leb}([0, b])$ pre každé $0 < b \leq 1$. Platí $\text{Leb}([0, b]) = b$. Ďalej, $T^{-1}[0, b] = [0, b/2] \sqcup [1 - b/2, 1]$ (lebo ľavá aj pravá časť stanu majú smernicu v absolútnej hodnote rovnú 2), takže $\text{Leb}(T^{-1}[0, b]) = b/2 + b/2 = b$ a rovnosť je dokázaná.⁶

Pretože T zachováva Lebesguovu mieru na σ -algebri $\mathcal{B}$ borelovských množín, tak podľa Propozície 4.9 zachováva Lebesguovu mieru aj na $\mathcal{L}$.

Príklad 4.17 (Lebesguova miera je invariantná pre “šikmý stan”). Nech $0 < c < 1$ a nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zobrazenie “(plný) šikmý stan”, pozri Obr. 4.2 v strede, teda zobrazenie také, že $T(0) = 0$, $T(c) = 1$, $T(1) = 0$ a T je lineárne na $[0, c]$ aj na $[c, 1]$. Ľahko vidieť, že T má na $[0, c]$ smernicu $1/c$ a na $[c, 1]$ smernicu $-1/(1 - c)$. T -vzor intervalu $[0, b]$ je preto disjunktným zjednotením dvoch intervalov. Jeden má dĺžku $b/(1/c) = bc$ a druhý $b/(1/(1 - c)) = b(1 - c)$. Ich súčet má teda Lebesguovu mieru $bc + b(1 - c) = b$, t.j. $\text{Leb}(T^{-1}[0, b]) = \text{Leb}([0, b])$ pre každé $0 < b \leq 1$. To podľa Tabuľky 4.1 dokazuje, že T zachováva Lebesguovu mieru na σ -algebri borelovských množín. Z rovnakých dôvodov ako v predchádzajúcom príklade, zachováva aj Lebesguovu mieru na σ -algebri lebesguovsky merateľných množín.

Príklad 4.18 (Lebesguova miera nie je invariantná pre “znížený stan”). Nech zobrazenie $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je také, že $T(0) = 0$, $T(1/2) = d \in (0, 1)$, $T(1) = 0$ a T je lineárne na $[0, 1/2]$ aj na $[1/2, 1]$, pozri Obr. 4.2 vpravo. Potom malé okolie jednotky (ktoré má kladnú Lebesguovu mieru!; na obrázku okolie U) má prázdny vzor. Preto Lebesguova miera nie je invariantná pre T .

Príklad 4.19 (Lebesguova miera na kružnici je invariantná pre rotácie). Nech $(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ je kružnica s Lebesguovou mierou na σ -algebri všetkých borelovských množín.

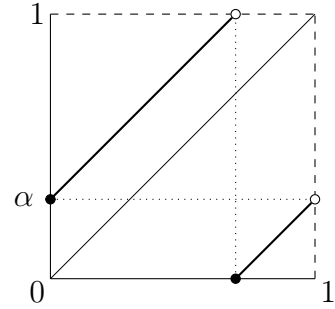
⁶Všimnime si, že obrazom intervalu $[0, 1/2]$ je interval $[0, 1]$ s dvojnásobnou mierou, teda podmienka (4.3) tu splnená nie je.

Lebesguova miera je zrejme invariantná pre každú rotáciu kružnice. To vidieť z toho, že sa zachováva miera oblúkov $[0, b]$ (pozri Tabuľku 4.1); vzor oblúka $[0, b]$ je oblúk rovnakej dĺžky (miery).

Iná možnosť je interpretovať $\mathbb{S}^1$ ako interval $[0, 1)$. Potom každá rotácia kružnice sa dá zapísať v tvare

$$T(x) = x + \alpha \mod 1$$

pre nejaké $\alpha > 0$. Ak si nakreslíte graf tohto zobrazenia v štvorci $[0, 1)^2$, pozri Obr. 4.3, tak metódami ako v prípade stanov možno nahliadnuť, že T zachováva Lebesguovu mieru na $\mathcal{B}$ (a rovnako ako v prípade stanov aj Lebesguovu mieru na $\mathcal{L}$).

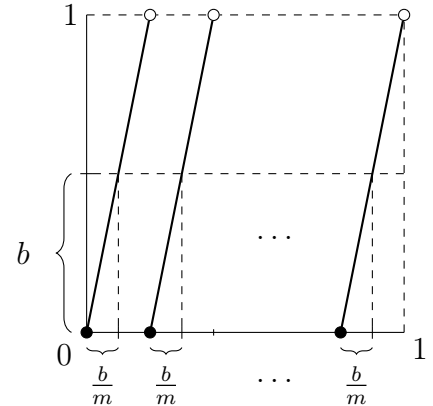


Obr. 4.3: $T(x) = x + \alpha \mod 1$

Príklad 4.20 (Lebesguova miera je invariantná pre expandujúce zobrazenia E_m). Nech $m \geq 2$ je prirodzené číslo a nech $E_m: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ je zobrazenie definované vzt'ahom

$$E_m(x) = mx \mod 1.$$

(pozri Obr. 4.4). Toto zobrazenie zachováva Lebesguovu mieru na borelovských množinách. Naozaj, zvolíme $0 < b < 1$. Vzor intervalu $[0, b]$ s dĺžkou (mierou) b pozostáva z m navzájom disjunktných intervalov, z ktorých každý má dĺžku b/m . Teda vzor intervalu $[0, b]$ má rovnakú Lebesguovu mieru ako interval $[0, b]$, čo stačilo dokázať (pozri Tabuľku 4.1). Potom podľa Propozície 4.9 zobrazenie E_m zachováva aj Lebesguovu mieru na lebesguovsky merateľných množinách.



Obr. 4.4: $E_m(x) = mx \mod 1$

Poznamenajme, že interval $[0, 1)$ môžeme stotožniť s kružnicou $\mathbb{S}^1$, vtedy sa E_m nazýva expandujúcim zobrazением kružnice.

Príklad 4.21 (Neatomická invariantná miera pre Gaussovo zobrazenie). Nech $X = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ je σ -algebra borelovských množín v $[0, 1]$ a $T: X \rightarrow X$ je zobrazenie

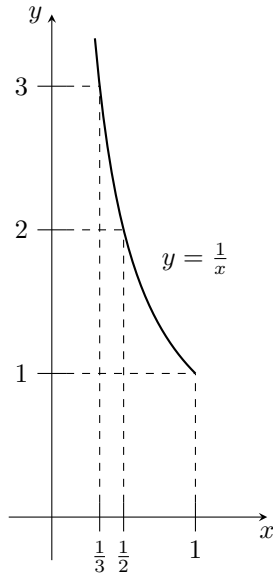
$$T(x) := \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0, \\ \frac{1}{x} \mod 1, & \text{ak } x \in (0, 1] \end{cases}$$

(pre $x \in (0, 1]$ to možno zapísať aj pomocou necelej časti resp. celej časti: $T(x) = \{\frac{1}{x}\} = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$). Ak si nakreslíme graf funkcie $1/x$ na $(0, 1]$ (pozri Obr. 4.5), tak vidíme, že použitie $\mod 1$ z neho

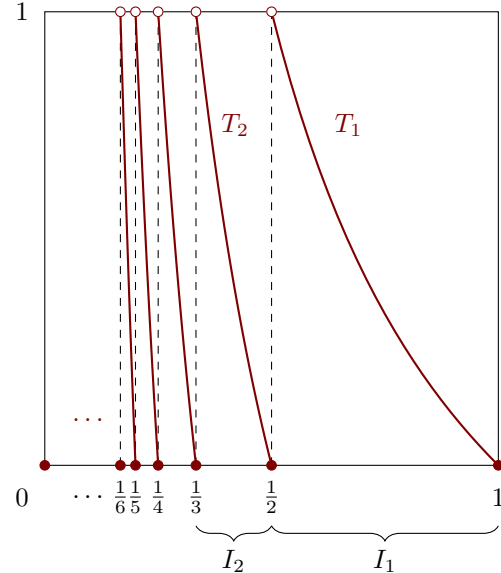
vyrobí nekonečne veľa klesajúcich úsekov. Teda graf T pozostáva z počiatku a z grafov funkcií

$$\begin{aligned} T_1(x) &:= \frac{1}{x} - 1 && \text{pre } x \in I_1 := \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ T_2(x) &:= \frac{1}{x} - 2 && \text{pre } x \in I_2 := \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \\ &\dots && \\ T_n(x) &:= \frac{1}{x} - n && \text{pre } x \in I_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \\ &\dots, \end{aligned}$$

pozri Obr. 4.6.



Obr. 4.5: Funkcia $1/x$ na $(0, 1]$



Obr. 4.6: Gaussovo zobrazenie

Keďže každé zo zobrazení T_k je na svojom definičnom intervale spojité a teda merateľné (vzor otvorenej množiny je borelovská alebo, ekvivalentne, vzor borelovskej množiny je borelovská), ľahko vidieť, že aj $T: ([0, 1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B})$ je merateľné.

Nie je problém nájsť atomickú invariantnú mieru pre T . Takou je napr. Diracova miera δ_0 sediaca v pevnom bode 0. Možno tiež vziať Diracovu mieru sediacu v niektorom inom pevnom bode (je ich nekonečne veľa), prípadne nejakú ich lineárnu kombináciu (podľa Propozície 4.8 je to invariantná miera). Inou možnosťou je nájsť nejakú periodickú orbitu s vyššou periódou a vziať invariantnú mieru sediacu v nej (pozri Príklad 4.6). Konečne, možno vziať aj lineárne kombinácie doteraz uvedených invariantných mier.

Má Gaussovo zobrazenie aj nejakú neatomickú mieru? Dá sa ukázať, že Lebesguova miera nie je pre T invariantnou mierou (Cvičenie 4.12). A čo iná miera? Ukážeme, že T zachováva tzv. Gaussovu mieru na σ -algebre $\mathcal{B}$ borelovských množín v $[0, 1]$. Definovaná je vzt'ahom (symbolom

$\log$ označíme prirodzený logaritmus, integrujeme podľa Lebesguovej miery)

$$\mu(B) = \frac{1}{\log 2} \int_B \frac{1}{1+x} dx, \quad B \in \mathcal{B}. \quad (4.9)$$

(Ide teda o mieru v tvare $\mu = \varrho \text{Leb}$, ekvivalentnú s Lebesguovou mierou, pozri Príklad 3.37.⁷) Aby sme dokázali, že miera μ je invariantná pre T , podľa Tabuľky 4.1 stačí ukázať, že pre každé $0 < b \leq 1$ je

$$\mu(T^{-1}[0, b]) = \mu([0, b]). \quad (4.10)$$

Na pravej strane máme

$$\mu([0, b]) = \frac{1}{\log 2} \int_0^b \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{\log 2} [\log(1+x)]_{x=0}^b = \frac{\log(1+b)}{\log 2}. \quad (4.11)$$

Aby sme určili ľavú stranu (4.10), uvedomme si najskôr, že $T^{-1}[0, b] = \{0\} \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}[0, b]$. Keďže $\mu(\{0\}) = 0$, je

$$\mu(T^{-1}[0, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n^{-1}[0, b]).$$

Pritom $T_n^{-1}[0, b] = [\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n}]$, lebo T_n je definovaná a klesajúca na intervale I_n a korene rovníc $T_n(x) = b$ a $T_n(x) = 0$ sú v danom poradí čísla $1/(n+b)$ a $1/n$ z tohto intervalu. Preto

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}[0, b]) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n^{-1}[0, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left[\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \int_{\frac{1}{n+b}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n+b}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\log 2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N [\log(n+1) - \log n] - \sum_{n=1}^N [\log(n+b+1) - \log(n+b)] \right). \end{aligned}$$

Ak teraz využijeme, že pre teleskopickú sumu $\sum_{n=1}^N (v_{n+1} - v_n)$ platí

$$\sum_{n=1}^N (v_{n+1} - v_n) = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \cdots + (v_{N+1} - v_N) = v_{N+1} - v_1,$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}[0, b]) &= \frac{1}{\log 2} \lim_{N \rightarrow \infty} ([\log(N+1) - \log 1] - [\log(N+b+1) - \log(1+b)]) \\ &= \frac{1}{\log 2} \lim_{N \rightarrow \infty} \log \frac{(N+1)(1+b)}{N+b+1} = \frac{\log(1+b)}{\log 2}. \end{aligned}$$

⁷Teda napr. μ -miera spočítateľnej množiny je nula. Ďalej si všimnite, že koeficient $1/\log 2$ je zvolený tak, aby išlo o pravdepodobnostnú mieru: $\mu([0, 1]) = 1$ podľa (4.11).

To je to isté ako v (4.11), takže Gaussova miera $\mu = \varrho \text{Leb}$, $\varrho(x) = 1/((1+x)\log 2)$ na σ -algebre borelovských množín v $[0, 1]$ je naozaj invariantná miera pre Gaussovo zobrazenie. Podľa Dôsledku 4.10 Gaussovo zobrazenie zachováva Gaussovú mieru $\mu = \varrho \text{Leb}$ dokonca aj na σ -algebre $\mathcal{L}$ všetkých lebesguovsky merateľných podmnožín $[0, 1]$.

4.3 Overovanie invariantnosti mier pomocou integrálov

Uvedieme ekvivalentné definície invariantnej miery. Sú formulované pomocou integrálov. To nie je až také prekvapujúce, ak si uvedomíme, že pre $A \in \mathcal{B}$ sa dá rovnosť $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ ekvivalentne zapísať v tvare

$$\int \chi_{T^{-1}(A)} d\mu = \int \chi_A d\mu.$$

Užitočná bude aj Lema 3.40. Podľa nej, v našej situácii, keď máme zobrazenie $T: X \rightarrow X$, pre každú množinu $A \subseteq X$ platí

$$\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}.$$

Uvažujme o dynamickom systéme (X, T) . Ak zvolíme bod $x \in X$, môžeme ho interpretovať ako stav systému teraz, teda v čase 0. Potom $T(x)$ je stav systému po uplynutí jednej jednotky času, teda v čase 1, $T^2(x)$ je jeho stav v čase 2 atď. Uvažujme teraz o funkcii $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Napr. $f(x)$ môže byť teplota systému v stave x alebo nejaká iná fyzikálna veličina, ktorú možno v každom stave systému pozorovať, merať. Pripomeňme, že takúto funkciu nazývame jedným slovom pozorovateľná, angl. observable. Všeobecnejšie, ako pozorovateľné môžu vystupovať funkcie $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ (nie je v tom veľký rozdiel, veď komplexné číslo je dvojica reálnych čísel). V špeciálnom prípade, ak $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie, tak má zmysel obmedziť sa na pozorovateľné, ktoré sú integrovateľné, teda patria do $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Nasledujú slúbené ekvivalentné definície invariantnej miery.

Veta 4.22 (Ekvivalentné definície invariantnej miery). *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

- (1) T zachováva mieru μ .
- (2) Pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ je

$$\int \chi_A d\mu = \int (\chi_A \circ T) d\mu.$$

- (3) Pre každú nezápornú merateľnú funkciu $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je

$$\int f d\mu = \int (f \circ T) d\mu. \quad (4.12)$$

Ak navyše X je priestor s konečnou mierou, tak aj nasledujúce podmienky sú s nimi ekvivalentné.

- (4) Pre každú integrovateľnú funkciu $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (t.j. $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{B}, \mu)$) platí (4.12).
- (5) Pre každú integrovateľnú funkciu $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ (t.j. $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{B}, \mu)$) platí (4.12).

(6) Pre každú funkciu $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{B}, \mu)$ platí (4.12).

(7) Pre každú funkciu $f \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{B}, \mu)$ platí (4.12).

Dôkaz. $\boxed{(1) \Leftrightarrow (2)}$ $\mu(A) = \int \chi_A d\mu$ a $\mu(T^{-1}(A)) = \int \chi_{T^{-1}(A)} d\mu = \int (\chi_A \circ T) d\mu$ (v poslednej rovnosti sme využili Lemu 3.40).⁸

$\boxed{(2) \Leftrightarrow (3)}$ Implikácia sprava doľava je triviálna, lebo ak $A \in \mathcal{B}$, tak χ_A je nezáporná merateľná funkcia. Nech teraz platí (2) a nech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná merateľná funkcia (potom integrál f , nie nutne konečný, existuje).

- Podľa predpokladu rovnosť $\int f d\mu = \int (f \circ T) d\mu$ platí pre každú charakteristickú merateľnú funkciu, špeciálne pre každú nezápornú charakteristickú merateľnú funkciu (pozor, tá nie je nevyhnutne integrovateľná, môže mať integrál $+\infty$).
- Z linearity integrálu pre nezáporné merateľné funkcie⁹ je zrejmé, že ak tá rovnosť platí pre charakteristické funkcie merateľných množín, tak platí aj pre akúkoľvek ich lineárnu kombináciu (vysvetlite podrobne). Preto tá rovnosť platí pre každú jednoduchú nezápornú merateľnú funkciu s . Teda ak s je taká funkcia, platí $\int s d\mu = \int (s \circ T) d\mu$.
- Keďže existuje neklesajúca postupnosť s_n jednoduchých nezáporných merateľných funkcií konvergujúca ku f , tak (podľa Beppo Leviho vety o monotónnej konvergencii) dostávame

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (s_n \circ T) d\mu = \int (f \circ T) d\mu$$

(využili sme aj, že ak s_n bodovo konverguje k f , tak $s_n \circ T$ bodovo konverguje ku $f \circ T$).

Nech teraz $\mu(X) < \infty$ (potom každá charakteristická merateľná funkcia je automaticky integrovateľná, následne aj každá jednoduchá merateľná funkcia je integrovateľná). Navyše sa vie, že ak $\mu(X) < \infty$, tak $L^2(\mu) \subseteq L^1(\mu)$.

$\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ Máme dokázať rovnosť (4.12) pre každú reálnu integrovateľnú funkciu. Podľa predpokladu (3) rovnosť (4.12) platí pre každú nezápornú merateľnú funkciu, teda špeciálne pre každú nezápornú integrovateľnú funkciu. Nech teraz $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je ľubovoľná integrovateľná funkcia. Keďže $f = f_+ - f_-$, kde f_+, f_- sú nezáporné integrovateľné funkcie (a teda funkcie spĺňajúce rovnosť (4.12)), tak opäť vďaka linearite integrálu aj f spĺňa rovnosť (4.12).

$\boxed{(4) \Rightarrow (5)}$ Nech rovnosť (4.12) platí pre každú reálnu integrovateľnú funkciu a nech f je komplexná integrovateľná funkcia. Potom $f = f_1 + if_2$ kde f_1, f_2 sú reálne integrovateľné funkcie. Podľa predpokladu f_1, f_2 spĺňajú (4.12). Potom, znovu vďaka linearite integrálu, aj f spĺňa (4.12).

$\boxed{(5) \Rightarrow (7)}$ Ak $\mu(X) < \infty$, tak $L^2(\mu) \subseteq L^1(\mu)$.

$\boxed{(7) \Rightarrow (6)}$ Reálna funkcia je aj komplexná funkcia.

$\boxed{(6) \Rightarrow (2)}$ Ak $A \in \mathcal{B}$, tak $\chi_A \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{B}, \mu)$, pretože $(\chi_A)^2 = \chi_A$ a teda $\int |(\chi_A)|^2 d\mu = \int \chi_A d\mu = \mu(A) \leq \mu(X) < \infty$. $\square$

⁸Keďže invariantnosť miery μ nie je nič iné ako rovnosť $T_*\mu = \mu$, mohli sme ekvivalenciu $(1) \Leftrightarrow (2)$ dokazovať aj použitím Propozície 3.41.

⁹ $\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\mu = c_1 \int f_1 d\mu + c_2 \int f_2 d\mu$ s nezápornými koeficientami c_1, c_2

Poznámka 4.23. Možno nahliadnúť, že do vety by sa dali pridať aj podmienky, v ktorých vystupujú priestory L^p , $p \geq 1$.

Poznámka 4.24. Druhá časť Vety 4.22 (o priestoroch s konečnou mierou) vo všeobecnosti neplatí ak X má nekonečnú mieru. Ukážeme príklad, v ktorom (4) neimplikuje (1). Zvoľme $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{B} = 2^X$, $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = +\infty$ (a $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = +\infty$). Nech ďalej $T(0) = T(1) = 0$. Ľahko sa overí, že $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a $T: X \rightarrow X$ je merateľné zobrazenie.

- Ukážeme, že podmienka (4) je splnená. Nech teda $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná funkcia. Potom však, ako je dobre známe z teórie integrálu, je f integrovateľná na množine $\{0\}$ aj na množine $\{1\}$. Keďže však $\mu(\{0\}) = +\infty$ aj $\mu(\{1\}) = +\infty$, musí byť $f(0) = 0$ aj $f(1) = 0$. Odtiaľ $\int f d\mu = \int 0 d\mu = 0$ a rovnako $\int (f \circ T) d\mu = \int 0 d\mu = 0$.
- Podmienka (1) splnená nie je. Zobrazenie T nezachováva mieru μ , lebo $\mu(\{1\}) = +\infty$ ale $\mu(T^{-1}(\{1\})) = \mu(\emptyset) = 0$.

Poznámka 4.25. Keby sme nepoznali definíciu invariantnej miery a mali by sme navrhnúť takú definíciu, mohla by nás napadnúť práve podmienka (3) z Vety 4.22. Naozaj, intuitívne by ju bolo možné interpretovať ako zachovávanie miery μ zobrazením T . Toto možno chápať ako jeden z dôvodov, prečo sa invariantná miera definuje pomocou T^{-1} a nie pomocou T .

Príklad 4.26 (Invariantná miera sediaca v periodickej orbite II). Nech $T: X \rightarrow X$ je zobrazenie majúce periodický bod x s periódou p . Podľa Príkladu 4.6 je miera

$$\mu = w_0 (\delta_x + \delta_{T(x)} + \cdots + \delta_{T^{p-1}(x)}) . \quad (4.13)$$

invariantnou mierou pre T (pre $w_0 = 1/p$ je to navyše pravdepodobnostná miera). Dokážeme to teraz iným spôsobom, pomocou Vety 4.22(4) $\Rightarrow$ (1). Nech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná funkcia. Potom, ak využijeme Propozíciu 3.21 a Príklad 3.18,

$$\begin{aligned} \int (f \circ T) d\mu &= w_0 \left(\int (f \circ T) d\delta_x + \int (f \circ T) d\delta_{T(x)} + \cdots + \int (f \circ T) d\delta_{T^{p-1}(x)} \right) \\ &= w_0 ((f \circ T)(x) + (f \circ T)(T(x)) + \cdots + (f \circ T)(T^{p-1}(x))) \\ &= w_0 \left(f(T(x)) + f(T^2(x)) + \cdots + f(\underbrace{T^p(x)}_{=x}) \right) \\ &= w_0 (f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^{p-1}(x))) \\ &= \int f d\mu . \end{aligned}$$

Príklad 4.27 (Lebesguova miera je invariantná pre expandujúce zobrazenia E_m II). Podľa Príkladu 4.20 expandujúce zobrazenia E_m zachovávajú Lebesguovu mieru. Dokážeme to iným spôsobom, pomocou Vety 4.22(4) $\Rightarrow$ (1). Pre jednoduchosť zvoľme $m = 2$, uvažujeme teda o zobrazení $T(x) = 2x \pmod{1}$, $x \in [0, 1)$. Inak povedané, $T(x) = 2x$ ak $x \in [0, 1/2)$ a $T(x) = 2x - 1$ ak $x \in [1/2, 1)$. Ide o zobrazenie kružnice $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ktorú si môžeme predstaviť aj ako interval $[0, 1]$, v ktorom stotožníme konce. Nech teraz $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je lebesguovsky integrovateľná funkcia taká, že $f(0) = f(1)$ (aby f predstavovala dobre definovanú funkciu na $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Potom (Leb označuje

Lebesguovu mieru na kružnici resp. na intervale $[0, 1)$, namiesto $d\text{Leb}$ píšeme aj dx)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} (f \circ T) d\text{Leb} &= \int_0^{1/2} (f \circ T) d\text{Leb} + \int_{1/2}^1 (f \circ T) d\text{Leb} \\ &= \int_0^{1/2} f(2x) dx + \int_{1/2}^1 f(2x-1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f d\text{Leb}, \end{aligned}$$

pričom sme pri výpočte prvého integrálu použili substitúciu $2x = t$ a pri výpočte druhého integrálu substitúciu $2x - 1 = t$.

Príklad 4.28. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zobrazenie definované vzt'ahom $T(x) = 4x(1-x)$. Z Príkladu 3.10 vieme, že T je $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}$ merateľné.¹⁰ Dokážeme, že zobrazenie T zachováva mieru μ definovanú ako integrál jej (mimočodom neohraničenej) funkcie hustoty vzľadom na Lebesguovu mieru:

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx, \quad A \in \mathcal{L}.$$

Inak povedané, dokážeme, že T zachováva mieru $\mu = \varrho \text{Leb}$ kde $\varrho(x) = 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$, definovanú na σ -algebre lebesguovsky merateľných množín v $[0, 1]$.¹¹ To sa dá urobiť vyšetrením vzorov intervalov $[0, b]$ (pozri Tabuľku 4.1) alebo pomocou Vety 4.29, ale tu predvedieme jednoduchšie riešenie (tie ďalšie spôsoby si vyskúšajte v Cvičení 4.13).

Použijeme Vetu 4.22. Nech $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná funkcia.¹² Potrebujeme dokázať rovnosť dvoch integrálov. Podľa Vety 3.35 máme (namiesto $d\text{Leb}$ píšeme dx)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) d\mu(x) &= \int_0^1 f(x) \varrho(x) d\text{Leb} = \int_0^1 f(x) \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \sin^2 t \\ dx = 2 \sin t \cos t dt \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\sin^2 t) dt \end{aligned}$$

a podobne

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f \circ T)(x) d\mu(x) &= \int_0^1 f(T(x)) \varrho(x) d\text{Leb} = \int_0^1 f(4x(1-x)) \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \sin^2 t \\ dx = 2 \sin t \cos t dt \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\sin^2(2t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\sin^2 z) dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\sin^2 t) dt \end{aligned}$$

(prečo platí posledná rovnosť?). Oba integrály sa rovnajú, takže dôkaz je skončený.

¹⁰V teórii dynamických systémov sa dokazuje, že plná parabola je topologicky konjugovaná so zobrazením stan. Zatiaľ čo stan zachováva Lebesguovu mieru, plná parabola ju nezachováva, pozrite Cvičenie 4.13.

¹¹Kedže T je aj $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ merateľné, automaticky to bude znamenať, že T zachováva mieru μ aj ako zobrazenie $([0, 1], \mathcal{B}, \mu) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B}, \mu)$.

¹²Stačilo by uvažovať o nezáporných merateľných funkciách či dokonca len o merateľných charakteristických funkciách.

4.4 Absolútne spojité invariantné miery pre zobrazenia intervalu

Máme na mysli miery, ktoré sú absolútne spojité vzhľadom na Lebesguovu mieru.

Pripomeňme, že ak $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie, tak to, že miera μ je invariantná pre T znamená práve to, že

$$T_*\mu = \mu \quad \text{na } \mathcal{B}.$$

Zároveň Veta 3.43 ukazovala, že pre istú triedu zobrazení $T: [a, b] \rightarrow [c, d]$ vieme určiť $T_*\mu$, ak μ je miera, ktorá má hustotu vzhľadom na Lebesguovu mieru (t.j. je absolútne spojitá vzhľadom na Lebesguovu mieru). Pre zobrazenia T zo spomínanej triedy zobrazení veta hovorila (pre význam symbolu x_k pozri Vetu 3.43):

$$\mu = \varrho \text{ Leb} \Rightarrow T_*\mu = (T_*\varrho) \text{ Leb}, \quad \text{pričom} \quad (T_*\varrho)(y) = \sum_k \frac{\varrho(x_k)}{|T'(x_k)|}, \quad y \in (c, d).$$

Tieto fakty nám dávajú silný nástroj na overovanie, či nejaká absolútne spojitá miera vzhľadom na Lebesguovu mieru je invariantná pre nejaké zobrazenie intervalu. Pravda, musí ísť o zobrazenie správneho typu.

Poznamenajme ešte, že namiesto $d \text{ Leb}_{[a,b]}$ budeme, ako býva zvykom, písať dx . Mieru $\text{Leb}_{[a,b]}$ uvažujeme definovanú na σ -algebre $\mathcal{L}_{[a,b]}$ všetkých lebesguovsky merateľných podmnožín intervalu $[a, b]$. V nasledujúcej vete uvažujeme o takých zobrazeniach ako vo Vete 3.43, avšak v špeciálnom prípade $[c, d] = [a, b]$.

Veta 4.29. *Nech $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ je také zobrazenie, že v intervale $[a, b]$ existujú po dvoch disjunktné otvorené intervaly $I_1, I_2, \dots$ (konečne alebo nekonečne veľa intervalov tvaru $I_k = (a_k, b_k)$) s vlastnosťami:*

- (1) *zjednotenie $\bigsqcup_k I_k$ má plnú Lebesguovu mieru v $[a, b]$,*
- (2) *pre každé k , zúženie $T_k := T|_{I_k}$ je C^1 -difeomorfizmus otvoreného intervalu I_k na otvorený interval (a, b) .*

Nech $\mu = \varrho d \text{ Leb}$ pre nejakú hustotu ϱ na $[a, b]$. Potom μ (definovaná na σ -algebre $\mathcal{L}_{[a,b]}$ všetkých lebesguovsky merateľných podmnožín $[a, b]$) je invariantná pre T vtedy a len vtedy, keď

$$\varrho(y) = \sum_k \frac{\varrho(x_k)}{|T'(x_k)|}, \quad \text{pre Leb-skoro všetky } y \in [a, b], \quad (4.14)$$

kde $x_k = T_k^{-1}(y)$.

Dôkaz. Podľa definície invariantnej miery je daná miera $\mu = \varrho \text{ Leb}_{[a,b]}$ invariantná pre T vtedy a len vtedy, keď

$$\mu = T_*\mu \quad \text{na } \mathcal{L}_{[a,b]}. \quad (4.15)$$

Podľa Vety 3.43 má miera $T_*\mu$ hustotu (vzhľadom na Lebesguovu mieru)

$$(T_*\varrho)(y) = \sum_k \frac{\varrho(x_k)}{|T'(x_k)|}, \quad \text{pre } y \in (a, b). \quad (4.16)$$

Dve miery na $\mathcal{L}_{[a,b]}$ s hustotami vzhľadom na Lebesguovu mieru sa rovnajú zrejme vtedy a len vtedy, keď sa ich hustoty zhodujú Leb-skoro všade na $[a, b]$. Preto podmienka (4.15) je ekvivalentná s podmienkou

$$\varrho(y) = (T_*\varrho)(y) \quad \text{pre Leb-skoro všetky } y \in [a, b].$$

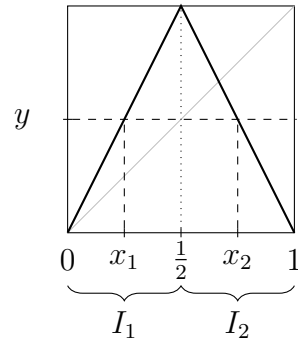
Vzhľadom na (4.16) je to ekvivalentné s (4.14), ako sme mali dokázať. $\square$

Poznámka 4.30. Poznamenajme, že podobne ako vo Vete 3.43, zobrazenie T nemusí byť $\mathcal{B}_{[a,b]}$ -merateľné. V takom prípade formálne nemožno hovoriť, že T zachováva mieru μ na borelovských množinách.

Príklad 4.31. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zobrazenie stan. Z Príkladu 4.16 vieme, že Lebesguova miera je invariantná pre T . Ukážeme, že tento fakt vyplýva aj z Vety 4.29.

Naozaj, predovšetkým si všimnime, že zobrazenie T spĺňa predpoklady Vety 4.29, a to s dvomi intervalmi $I_1 = (0, 1/2)$ a $I_2 = (1/2, 1)$. Ďalej, Lebesguova miera má konštantnú hustotu $\varrho = 1$ vzhľadom na Lebesguovu mieru ($\text{Leb} = 1 \text{ Leb}$). Pretože každý bod $y \in (0, 1)$ má dva vzory x_1, x_2 , pričom v jednom z nich má T deriváciu $+2$ a v druhom deriváciu -2 , rovnosť (4.14) je pre hustotu $\varrho = 1$ splnená. Pre každé $y \in (0, 1)$ totiž platí:

$$1 = \frac{\varrho(x_1)}{|T'(x_1)|} + \frac{\varrho(x_2)}{|T'(x_2)|} = \frac{1}{|+2|} + \frac{1}{|-2|}.$$



Obr. 4.7: $y \in (0, 1)$ má vzory $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$

Príklad 4.32. V Príklade 4.21 sme ukázali, že miera

$$\mu(B) = \frac{1}{\log 2} \int_B \frac{1}{1+x} dx, \quad B \in \mathcal{L}_{[0,1]}$$

je invariantná pre Gaussovo zobrazenie T . Uvedieme iný dôkaz, založený na Vete 4.29.

Pretože T spĺňa predpoklady Vety 4.29 (s nekonečným množstvom po dvoch disjunktných otvorených intervalov $I_1, I_2, \dots$, ktorých zjednotenie má plnú mieru a T je C^1 -difeomorfizmus na každom z nich), stačí dokázať, že hustota

$$\varrho(x) = \frac{1}{(1+x) \log 2}, \quad x \in [0, 1].$$

spĺňa podmienku

$$\varrho(y) = \sum_k \frac{\varrho(x_k)}{|T'(x_k)|}, \quad \text{pre Leb-skoro všetky } y \in [0, 1]. \quad (4.17)$$

Dokážeme, že táto rovnosť je splnená pre každé $y \in (0, 1)$.

Fixujme teda $y \in (0, 1)$ a pripomeňme, že T má nekonečne veľa vetiev $T_k(x) = (1/x) - k$, $k = 1, 2, \dots$. Preto bod y má nekonečne veľa vzorov

$$T_k^{-1}(y) = \frac{1}{y+k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Všetky tieto vzory sú v zjednotení $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$, na ktorom má T deriváciu $T'(x) = (1/x)' = -1/x^2$. Potom pre pravú stranu (4.17) dostávame:

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\varrho(x_k)}{|T'(x_k)|} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho(T_k^{-1}(y))}{|T'(T_k^{-1}(y))|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho\left(\frac{1}{y+k}\right)}{\left|T'\left(\frac{1}{y+k}\right)\right|} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y+k}{(y+k+1)\log 2} \cdot \frac{1}{(y+k)^2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(y+k)(y+k+1)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ide tu o teleskopickú sumu. Ak použijeme rozklad

$$\frac{1}{(y+k)(y+k+1)} = \frac{1}{y+k} - \frac{1}{y+k+1},$$

v n -tom čiastočnom súčte sa vyrušia všetky členy okrem prvého a posledného, takže

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(y+k)(y+k+1)} = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+n+1}.$$

Limitovaním pre $n \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(y+k)(y+k+1)} = \frac{1}{y+1}.$$

a, po dosadení do (4.18),

$$\sum_k \frac{\varrho(x_k)}{|T'(x_k)|} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{y+1} = \varrho(y),$$

čo sme potrebovali dokázať.

4.5 Invariantnosť Lebesguovej miery pre niektoré C^1 -difeomorfizmy

Teraz sa ideme venovať systémom na priestore $\mathbb{R}^n$, prípadne na tórise $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, v ktorých je invariantnou mierou Lebesguova miera.

4.5.1 C^1 -difeomorfizmy zachovávajúce Lebesguovu mieru

Nech U je otvorená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a nech $T: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ je zobrazenie so súradnicovými funkciami $g_1, \dots, g_m$. To znamená, že

$$T(x_1, \dots, x_n) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Hovoríme, že zobrazenie T je *triedy* C^1 (alebo presnejšie triedy $C^1(U)$), ak má spojité parciálne derivácie prvého rádu na celej množine U . Týchto derivácií je mn a štandardným spôsobom sa usporadúvajú do matice $m \times n$. Ak $\mathbf{p} \in U$, tak

$$J_T(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

je tzv. *Jacobiho matica* zobrazenia T v bode $\mathbf{p}$. Ak $T: U \rightarrow V$ je triedy C^1 , tak je aj spojitý.

Budeme sa zaoberať prípadom $m = n$, ktorý je zvlášť dôležitý v dynamike. Vtedy je Jacobiho matica štvorcová, typu $n \times n$ a má teda determinant, tzv. *Jacobián* $\det J_T(\mathbf{p})$. Jeho hodnota samozrejme závisí od bodu $\mathbf{p}$, v ktorom ho vyčíslujeme. Ak T je triedy C^1 , sú parciálne derivácie spojitý, a preto je aj Jacobián spojitou funkciou (spojite závisí od voľby bodu $\mathbf{p}$).

Ak U, V sú otvorené množiny v $\mathbb{R}^n$, tak zobrazenie $T: U \rightarrow V$ sa nazýva *C^1 -difeomorfizmus*, ak T je bijekcia, T je triedy C^1 a aj inverzné zobrazenie $T^{-1}: V \rightarrow U$ je triedy C^1 . Na zisťovanie, či je nejaké zobrazenie C^1 -difeomorfizmus, nie je nevyhnutné vyjadriť inverzné zobrazenie. Dá sa používať nasledujúce dobre známe tvrdenie.¹³

Propozícia 4.33. *Ak $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená množina, tak zobrazenie $T: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ je C^1 -difeomorfizmom $U \rightarrow T(U)$ práve vtedy, keď je to injektívne C^1 -zobrazenie, ktorého Jacobián je v každom bode z U rôzny od nuly.*

V Lebesguovej teórii veta o substitúcii v Lebesguovom integrále hovorí nasledovné, pozri napr. [Yeh14, Theorem 26.9]. Symbolom Leb_n označme Lebesguovu mieru v $\mathbb{R}^n$.

Veta 4.34 (Substitúcia v Lebesguovom integrále). *Nech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Nech $T: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ je injektívne C^1 -zobrazenie. Potom platia nasledujúce tvrdenia.*

(a) *Ak $A \subseteq U$ je Leb_n -merateľná množina, tak aj $T(A)$ je Leb_n -merateľná a*

$$\text{Leb}_n(T(A)) = \int_A |\det J_T| d\text{Leb}_n.$$

(b) *Ak $f: T(U) \rightarrow \mathbb{R}$ (alebo do rozšírenej reálnej osi) je Leb_n -merateľná funkcia, tak*

$$\int_{T(U)} f d\text{Leb}_n = \int_U (f \circ T) |\det J_T| d\text{Leb}_n$$

v tom zmysle, že akonáhle jeden z tých dvoch integrálov existuje, tak existuje aj druhý a rovnajú sa. Špeciálne, táto rovnosť automaticky platí, ak merateľná funkcia f je nezáporná na $T(U)$.

Vetu tu nebudeme dokazovať, všimnite si však, že (a) dostaneme z (b) voľbou $f = \chi_{T(A)}$. Všimneme si niektoré dôsledky vety.

Dôsledok 4.35. *Nech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Nech $T: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Potom*

- (a) *Ak T je injektívne C^1 -zobrazenie, tak obraz lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina a obraz množiny nulovej Lebesguovej miery je množina nulovej Lebesguovej miery.*
- (b) *Ak $T: U \rightarrow T(U)$ je C^1 -difeomorfizmus, tak obraz aj vzor lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina a obraz aj vzor množiny nulovej Lebesguovej miery je množina nulovej Lebesguovej miery.*

Dôkaz. (a) Toto je Veta 4.34(a) (integrál na A je nulový, ak A má nulovú mieru).

(b) vyplýva z (a). □

¹³Pripomeňme, že ak T je difeomorfizmus, tak je to aj homeomorfizmus, lebo diferencovateľnosť implikuje spojitosť. Preto difeomorfný obraz otvorenej množiny je otvorená množina.

Dôsledok 4.36. *Nech T je injektívne C^1 -zobrazenie $\mathbb{R}^n$ na seba. Potom Lebesguova miera Leb_n je invariantná pre T vtedy a len vtedy, keď $|\det J_T| = 1$ v každom bode z $\mathbb{R}^n$.*

Dôsledok dokážeme. Najskôr si však všimnime, že T je tu bijekcia, takže zachovávanie miery tu možno opisovať nielen rovnosťami tvaru $\text{Leb}_n(T^{-1}(A)) = \text{Leb}_n(A)$ (ako je to v definícii invariantnej miery), ale rovnako dobre rovnosťami tvaru $\text{Leb}_n(A) = \text{Leb}_n(T(A))$.

Tiež si všimnime, že vzhľadom na Propozíciu 4.33 tento dôsledok ukazuje, že ak injektívne C^1 -zobrazenie $\mathbb{R}^n$ na seba zachováva Lebesguovu mieru, tak je to C^1 -difeomorfizmus.

Dôkaz. Ak $|\det J_T| = 1$ v každom bode, tak Veta 4.34(a) pre každú lebesguovsky merateľnú množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dá $\text{Leb}_n(T(A)) = \text{Leb}_n(A)$. Teda T zachováva Lebesguovu mieru.

Nech teraz T zachováva Lebesguovu mieru a nech v nejakom bode $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ je $|\det J_T|(\mathbf{t}) \neq 1$ (chceme odvodiť spor). Nech napr. $|\det J_T|(\mathbf{t}) > 1$ (ak $0 \leq |\det J_T|(\mathbf{t}) < 1$), je dôkaz podobný). Keďže Jacobián $\det J_T$ je spojitou funkciou bodu, tak existuje otvorené okolie V bodu $\mathbf{t}$ a $\varepsilon > 0$ také, že $|\det J_T| > 1 + \varepsilon$ v každom bode z V . Pritom V je Lebesguovsky merateľná množina, takže podľa Vety 4.34(a) je

$$\text{Leb}_n(T(V)) = \int_V |\det J_T| d\text{Leb}_n \geq \int_V (1 + \varepsilon) d\text{Leb}_n = (1 + \varepsilon) \text{Leb}_n(V) > \text{Leb}_n(V),$$

čo odporuje predpokladu, že T zachováva Lebesguovu mieru. $\square$

Ak v horeuvedenom dôsledku T zachováva Lebesguovu mieru, tak $|\det J_T| = 1$ v každom bode z $\mathbb{R}^n$ a podľa Propozície 4.33 je T difeomorfizmus $\mathbb{R}^n$ na seba. Mohlo by sa zdať, že v niektorých bodoch môže byť $\det J_T = +1$ a v iných $\det J_T = -1$. Lenže Jacobián C^1 -difeomorfizmu je spojitou funkciou bodu a $\mathbb{R}^n$ je súvislý priestor. Preto v uvedenom dôsledku sú práve dve možnosti. Buď je v každom bode Jacobián $\det J_T = +1$ alebo je v každom bode $\det J_T = -1$. Zobrazenie T je v prvom (resp. druhom) prípade C^1 -difeomorfizmus zachovávajúci (resp. obracajúci) orientáciu. Tak sa totiž nazýva každý C^1 -difeomorfizmus, ktorý má v každom bode kladný (resp. záporný) Jacobián.

4.5.2 Lineárne zobrazenia zachovávajúce Lebesguovu mieru

Fakty uvedené vyššie nám pomôžu zistiť, ktoré lineárne zobrazenia $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zachovávajú Lebesguovu mieru. Pôjde tu o zovšeobecnenie toho, čo je v dimenzii 1 zrejmé (vysvetlite):

- Medzi lineárnymi zobrazeniami $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, t.j. zobrazeniami tvaru $T(x) = ax$ zachovávajú Lebesguovu mieru práve tie, pre ktoré $|a| = 1$, teda práve dve zobrazenia: $T(x) = x$ a $T(x) = -x$.

Teraz ukážeme, že medzi lineárnymi zobrazeniami $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, t.j. medzi zobrazeniami tvaru

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

kde A je nejaká matica typu $n \times n$ s reálnymi koeficientami, zachovávajú Lebesguovu mieru v $\mathbb{R}^n$ práve tie, pre ktoré $|\det A| = 1$.¹⁴

Začneme pripomenutím dobre známych faktov z lineárnej algebry.

¹⁴Pre $n = 1$ je matica A daná číslom a , teda je to matica typu 1×1 a jej determinant je a . Teda oba výsledky sú v súlade.

Propozícia 4.37. *Nech $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ je lineárne zobrazenie $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (1) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ je injekcia,
- (2) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ je surjekcia,
- (3) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ je bijekcia,
- (4) $\det A \neq 0$ (t.j. matica A je regulárna),
- (5) existuje inverzná matica A^{-1} ,
- (6) k zobrazeniu $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ existuje inverzné zobrazenie.

Navyše platí:

- (a) Ak k danému zobrazeniu existuje inverzné zobrazenie, tak toto je tiež lineárne, dané inverznou maticou A^{-1} (teda je to zobrazenie $\mathbf{x} \mapsto A^{-1}\mathbf{x}$).
- (b) Lineárne zobrazenie $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (bez ohľadu na to, či je injektívne alebo nie) zobrazuje $\mathbb{R}^n$ na vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$.

V nasledujúcej propozícii spojitost' v (a) vyplýva z (b), lebo spojitost' parciálnych derivácií implikuje spojitost' zobrazenia. V skutočnosti časť (a) ani nebudeme potrebovať, zaradili sme ju však pre úplnosť a z pedagogických dôvodov.

Propozícia 4.38. *Nech $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ je lineárne zobrazenie $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

- (a) T je Lipschitzovské (teda aj spojité).
- (b) T má konštantné (teda spojité) parciálne derivácie. Jacobiho matica $J_T(\mathbf{p}) = A$ v každom bode $\mathbf{p}$.
- (c) T je C^1 -difeomorfizmus práve vtedy, keď $\det A \neq 0$ (teda práve vtedy, keď je to bijekcia, pozri Propozíciu 4.37(3) $\Leftrightarrow$ (4)).

Dôkaz. (a) Toto je dobre známe z funkcionálnej analýzy (platí, že $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|T(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|T\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, kde $\|T\|$ je tzv. norma operátora T). Bez tejto znalosti možno postupovať nasledovne.

Ak pre bod (stĺpcový vektor) $\mathbf{z} = (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ definujeme jeho tzv. euklidovskú normu (veľkosť vektora zo strednej školy) vzt'ahom $\|\mathbf{z}\| := (\sum_{i=1}^n z_i^2)^{1/2}$, tak euklidovská vzdialenosť bodov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ nie je nič iné ako $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, teda norma ich rozdielu.

Nech $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Vezmime $\mathbf{z} = (z_i)_{i=1}^n$ a jeho obraz

$$\mathbf{z}' := T(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} = (z'_i)_{i=1}^n, \quad \text{kde} \quad z'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j. \quad (4.19)$$

Potom

$$\|T(\mathbf{z})\|^2 = \sum_{i=1}^n (z'_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}z_j \right)^2$$

Podľa Cauchy-Schwartzovej nerovnosti je

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right) \left(\sum_{j=1}^n z_j^2\right) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right) \|\mathbf{z}\|^2.$$

Po dosadení do predchádzajúcej rovnosti dostaneme

$$\|T(\mathbf{z})\|^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right) \|\mathbf{z}\|^2$$

Zavedme konštantu $M := \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$. Táto konštanta závisí od matice A (teda od zobrazenia T), nie však od voľby vektora $\mathbf{z}$. Z posledného vzťahu dostávame

$$\|T(\mathbf{z})\| \leq M \|\mathbf{z}\|.$$

Z toho už ľahko vyplýva lipschitzovskosť zobrazenia T . Naozaj, pre euklidovskú vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov (stĺpcových vektorov) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dostávame

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|T(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

(b) Parciálne derivácie sa vypočítajú z vyjadrenia pre T , pozri (4.19).

(c) Ak T je C^1 -difeomorfizmus, tak je to predovšetkým bijekcia a z Propozície 4.37 dostaneme, že $\det A \neq 0$. Obrátene, nech $\det A \neq 0$. Potom z Propozície 4.37 dostaneme, že T je bijekcia, teda existuje inverzné zobrazenie, ktoré je podľa Propozície 4.37 tiež lineárne. Podľa (b) majú obe tieto zobrazenia spojitú parciálne derivácie. Teda T je C^1 -difeomorfizmus. $\square$

Dôsledok 4.39. Ak $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ je lineárne zobrazenie $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticou A , tak T zachováva Lebesguovu mieru vtedy a len vtedy, keď $|\det A| = 1$.

Dôkaz. Ak T nie je bijekcia, tak to nie je ani surjekcia (pozri Propozíciu 4.37(2) $\Leftrightarrow$ (3)). Potom však, využijúc aj Propozíciu 4.37(b), je oborom hodnôt *vlastný* vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$. Ten má však nulovú (n -rozmernú) Lebesguovu mieru a keďže jeho vzor je celý priestor $\mathbb{R}^n$, zobrazenie nezachováva Lebesguovu mieru.

Ukázali sme tak, že keď zistíme, ktoré lineárne zobrazenia zachovávajú Lebesguovu mieru, stačí si všímať bijekcie. Bijektívne lineárne zobrazenie je však automaticky C^1 -difeomorfizmus (pozri Propozíciu 4.38(c)). Ak ešte vezmeme do úvahy, že $J_T = A$ (pozri Propozíciu 4.38(b)), tak Dôsledok 4.36 dáva požadovaný výsledok: T zachováva Lebesguovu mieru práve vtedy, keď $|\det A| = 1$. $\square$

Dôsledok 4.40. Ak T je zobrazenie $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ také, že pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a každé $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ je

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - T(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}^n,$$

tak T indukuje zobrazenie $\mathcal{T}$ tórusu $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ do seba. Pritom platia nasledujúce tvrdenia.

(a) $\mathcal{T}$ je lebesguovsky merateľné na $\mathbb{T}^n$ práve vtedy, keď T je lebesguovsky merateľné na $\mathbb{R}^n$.

(b) $\mathcal{T}$ zachováva Lebesguovu mieru na $\mathbb{T}^n$ práve vtedy, keď T zachováva Lebesguovu mieru na $\mathbb{R}^n$.

Pomocou horeuvedených dôsledkov možno pre niektoré špeciálne zobrazenia dokázať, že zachovávajú Lebesguovu mieru.

Príklad 4.41 (Arnol'dovo CAT zobrazenie zachováva Lebesguovu mieru). Matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

prislúcha lineárne zobrazenie roviny, $T(x, y) = (2x + y, x + y)$. Pretože matica A je celočíselná, je splnená podmienka $T(x + a, y + b) - T(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ pre každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a každé $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Preto zobrazeniu T prislúcha indukované zobrazenie $\mathcal{T}$ na dvojrozmernom tórise,

$$\mathcal{T}(x, y) = (2x + y \bmod 1, x + y \bmod 1).$$

Pre danú konkrétnu maticu sa niekedy nazýva Arnol'dovo¹⁵ CAT-zobrazenie, kde CAT pochádza zo slov “continuous automorphism of the torus”, ale ide zároveň o slovnú hračku, lebo Arnol'd toto zobrazenie ilustroval tak, že ukazoval, ako sa obrázok hlavy mačky v jednotkovom štvorci (z ktorého stotožnením protiláhlých strán vzniká tórus) mení pri iterovaní pomocou zobrazenia T .¹⁶

Pretože $\det A = 1$, na základe Dôsledkov 4.39 a 4.40(b) Arnol'dovo CAT zobrazenie zachováva Lebesguovu mieru na tórise.

Príklad 4.42. Pre $\alpha \in \mathbb{R}$ definujme zobrazenie na dvojrozmernom tórise vzt'ahom

$$\mathcal{T}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad \mathcal{T}(x, y) = (x + \alpha, x + y) \bmod 1.$$

Dokážeme, že zachováva Lebesguovu mieru na tórise.

Toto zobrazenie je indukované (afinným, ale nelineárnym) zobrazením v rovine,

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + \alpha, x + y).$$

Naozaj, pre zobrazenie T je splnená podmienka $T(x + a, y + b) - T(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ pre každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a každé $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Teda podľa Dôsledku 4.40 zobrazenie T naozaj indukuje nejaké zobrazenie na tórise. Týmto indukovaným zobrazením na tórise je zrejme naše zobrazenie $\mathcal{T}$.

Podľa Dôsledku 4.40(b) stačí preto dokázať, že rovinné zobrazenie T zachováva Lebesguovu mieru. Na to použijeme Dôsledok 4.36. Zobrazenie T je injektívne C^1 -zobrazenie $\mathbb{R}^2$ na seba. Pritom jeho Jakobián

$$\det J_T(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x+\alpha)}{\partial x} & \frac{\partial(x+\alpha)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x+y)}{\partial x} & \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

takže jeho absolútna hodnota je v každom bode (x, y) rovná 1. Preto T (a potom aj $\mathcal{T}$) zachováva Lebesguovu mieru.

Poznamenajme, že sme mohli postupovať aj inak. Zobrazenie T sa dá vyjadriť ako kompozícia lineárneho zobrazenia $(x, y) \mapsto (x, x + y)$, ktoré zachováva Lebesguovu mieru (lebo jeho matica má determinant rovný 1, pozri Dôsledok 4.39) a posunutia $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y)$, ktoré tiež zachováva Lebesguovu mieru (pozri Príklad 4.3). Potom podľa Propozície 4.4 aj T zachováva Lebesguovu mieru.

¹⁵ Владимир Игоревич Арнольд (Vladimír Igorevič Arnol'd, 1937-2010) bol významný sovietsky a ruský matematik, v r. 1957 vyriešil trinásť Hilbertov problém, je známy ako spolutvorca tzv. KAM (Kolmogorov-Arnol'd-Moser) teórie a ako autor mnohých ďalších významných výsledkov v rôznych oblastiach matematiky, o.i. v dynamických systémoch a diferenciálnych rovniciach.

¹⁶ Angl. cat = mačka. Na internete ľahko nájdete príslušné obrázky.

4.6 Cvičenia a projekty

Cvičenie 4.1. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $T(x) = x^2$. Ukážte, že Lebesguova miera na borelovských množinách nie je invariantná pre T .

(Precízna formulácia: Zobrazenie T je spojité, z čoho vyplýva, že je merateľné ako zobrazenie $([0, 1], \mathcal{B}, \text{Leb}_{\mathcal{B}})$ do seba, kde $\mathcal{B}$ je σ -algebra borelovských podmnožín $[0, 1]$ a $\text{Leb}_{\mathcal{B}}$ je Lebesguova miera na $\mathcal{B}$. Ukážte, že miera $\text{Leb}_{\mathcal{B}}$ nie je invariantná pre T .)

Cvičenie 4.2. Uvažujme o merateľnom priestore $([0, 1], \mathcal{B})$, kde $\mathcal{B}$ je σ -algebra borelovských podmnožín intervalu $[0, 1]$. Nech $T(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.

- (a) Zdôvodnite, prečo je $T: ([0, 1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B})$ merateľné.
- (b) Presvedčte sa o tom, že ak $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(A) = +\infty$ pre každú neprázdnu borelovskú množinu $A \subseteq [0, 1]$, tak μ je miera na $\mathcal{B}$, je invariantná pre T a $\mu((0, 1)) = +\infty$.
- (c) Nájdite aspoň tri konkrétne príklady pravdepodobnostných invariantných mier μ pre T .
- (d) Nech μ je pravdepodobnostná miera na $\mathcal{B}$, invariantná pre T . Dokážte, že potom

$$\mu((0, 1)) = 0$$

(a teda $\mu(\{0, 1\}) = \mu([0, 1]) = 1$, čiže μ sedí na dvojbodovej množine $\{0, 1\}$).

Cvičenie 4.3. Nech T je merateľné zobrazenie z jedného priestoru s mierou do druhého. Ako by ste v tejto situácii definovali, že T zachováva mieru?

Cvičenie 4.4. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T: X \rightarrow X$ je bijekcia taká, že T aj T^{-1} sú merateľné. Dokážte, že T zachováva mieru μ vtedy a len vtedy, keď T^{-1} zachováva mieru μ .

Cvičenie 4.5. Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva mieru μ a nech $k \geq 2$. Potom Propozície 4.4 aj iterácia T^k zachováva mieru μ . Je obrátené tvrdenie pravdivé?

Cvičenie 4.6. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci dynamický systém (teda μ je invariantná miera pre T). Nech $A \in \mathcal{B}$ má konečnú μ -mieru. Dokážte, že potom $\mu(T^{-1} \setminus A) = \mu(A \setminus T^{-1}A)$.

Cvičenie 4.7. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci dynamický systém. Predpokladajme, že T je také, že obraz každej merateľnej množiny je merateľná množina. Povieme, že množina W je *slabo blúdivá*, ak existuje postupnosť $n_i \nearrow +\infty$ taká, že $T^{n_i}W \cap T^{n_j}W = \emptyset$ pre každé $i \neq j$. Dokážte, že ak je miera μ konečná, tak slabo blúdivé množiny s kladnou mierou v takom systéme nemôžu existovať.

Cvičenie 4.8. Nech X je nespočítateľná množina a nech

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq X : A \text{ je spočítateľná alebo } X \setminus A \text{ je spočítateľná}\}.$$

Definujme funkcie $\mu, \nu: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ takto (porovnajte s Cvičením 3.4):

$$\begin{aligned} \mu(A) &= 0 \text{ ak } A \text{ je spočítateľná a } \mu(A) = 1 \text{ ak } A \text{ je nespočítateľná,} \\ \nu(A) &= 0 \text{ ak } A \text{ je spočítateľná a } \nu(A) = 2 \text{ ak } A \text{ je nespočítateľná.} \end{aligned}$$

Dokážte nasledujúce tvrdenia.

- (a) $\mu \neq \nu$ sú (konečné) miery na σ -algebre $\mathcal{B}$.
- (b) Systém $\mathcal{G} = \{A \subseteq X : A \text{ je spočítateľná}\}$ spĺňa predpoklady (D1), (D2) z Dynkinovej vety (pozri Vetu 4.11) a pre miery μ, ν platí (D4). Napriek tomu, hoci μ, ν sú konečné, a teda aj σ -konečné, nie je $\mu = \nu$ na celej σ -algebre $\mathcal{B}$.
- (c) Výsledok z časti (b) nie je spor s Dynkinovou vetou, lebo nie je splnená podmienka (D3), neexistuje požadovaná rastúca postupnosť množín.
- (d) Ak za systém $\mathcal{G}$ nezvolíme systém z (b) ale priamo σ -algebru $\mathcal{B}$, tak sú splnené (D1), (D2), (D3) ale nie D(4).

Cvičenie 4.9. Nech $X = [0, 1)$ a

$$T(x) = \begin{cases} 2x \pmod{1}, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 4x \pmod{1}, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Ukážte, že T zachováva Lebesguovu mieru.

Cvičenie 4.10. Nájdite príklad priestoru s mierou $(X, \mathcal{B}, \mu)$ a merateľného zobrazenia $T: X \rightarrow X$, ktoré nie je surjektívne a napriek tomu zachováva mieru μ . (Porovnajte s Príkladom 4.18.)

Cvičenie 4.11. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je také zobrazenie, že

- (a) $T(0) = 1/2, T(1/4) = 0, T(3/4) = 1, T(1) = 1/2,$
- (b) $T(0) = 1/2, T(1/4) = 1, T(3/4) = 0, T(1) = 1/2,$

pričom je lineárne na každom z intervalov $[0, 1/4], [1/4, 3/4], [3/4, 1]$. Vyšetrite, či T zachováva Lebesguovu mieru.

Cvičenie 4.12. Ukážte, že Gaussovo zobrazenie nezachováva Lebesguovu mieru.

Cvičenie 4.13. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zobrazenie definované vzťahom¹⁷ $T(x) = 4x(1 - x)$. Keďže T je spojité, je merateľné vzhľadom na σ -algebru $\mathcal{B}$ borelovských množín. Dokážte nasledujúce tvrdenia.

- (a) Zobrazenie T nezachováva Lebesguovu mieru.
- (b) Zobrazenie T zachováva mieru μ definovanú ako integrál jej (mimocho dom neohraničenej) funkcie hustoty vzhľadom na Lebesguovu mieru:

$$\mu(B) = \int_B \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx, \quad B \in \mathcal{B}$$

(uvedomte si najskôr, že T je $\mathcal{B}$ -merateľná).

- (c) Prečo asi je v menovateli koeficient π ?
- (d) Presvedčte sa, že T dokonca zachováva mieru μ na lebesguovsky merateľných množinách (pozrite Dôsledok 4.10).

¹⁷Je to jedno z tzv. logistických zobrazení $x \mapsto rx(1-x)$, $r \in [0, 4]$. Niekedy sa nazýva tiež plná parabola (plná preto, lebo práve pre $r = 4$ je to surjekcia $[0, 1]$ na seba). V teórii dynamických systémov sa dokazuje, že plná parabola je topologicky konjugovaná so zobrazením stan. Zatiaľ čo stan zachováva Lebesguovu mieru, plná parabola ju nezachováva.

Cvičenie 4.14. Majme konečne veľa alebo nekonečne spočítateľne veľa po dvoch disjunktných otvorených intervalov $I_k = (a_k, b_k) \subseteq [0, 1]$, pre $k \in K$. Nech $\sum_{k \in K} (b_k - a_k) = 1$. Nech zobrazenie $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je také, že na každom z otvorených intervalov I_k je lineárne a zobrazuje ho na otvorený interval $(0, 1)$. Dokážte, že T zachováva Lebesguovu mieru (na σ -algebre všetkých lebesguovsky merateľných podmnožín $[0, 1]$; pozrite aj Poznámku 4.30).

Cvičenie 4.15. Dokážte, že zobrazenie $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definované vzťahom

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1-x}{x}, & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

zachováva mieru μ definovanú na lebesguovsky merateľných množinách v $[0, 1]$ vzťahom

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx}{x},$$

teda mieru s hustotou $1/x$ vzhľadom na Lebesguovu mieru. (Na rozdiel od všeobecnej situácie vo Vetách 3.43 a 4.29, T je aj borelovsky merateľné.)

Cvičenie 4.16. Dokážte, že

$$T(x, y) = (x + y, x + 2y) \pmod{1}.$$

je dobre definované zobrazenie dvojrozmerného tórusu, ktoré zachováva Lebesguovu mieru.

Cvičenie 4.17. Ktoré afinné zobrazenia $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, teda zobrazenia tvaru $T(x) = ax + b$, zachovávajú Lebesguovu mieru? Zovšeobecnite na afinné zobrazenia $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, teda zobrazenia tvaru $T(x) = Ax + B$, kde A, B sú matice $n \times n$ s reálnymi koeficientami.

Projekt 4.18. V Cvičení 4.7 hovoríme o slabo blúdívých množinách. Mali by teda existovať aj blúdivé či silno blúdivé množiny. Okrem toho, popri obrazoch množiny W by sme mohli uvažovať aj vzory. Rozpracujte, aj s pomocou literatúry, túto problematiku do formy sekcie alebo aspoň súboru cvičení do tohto učebného textu.

Projekt 4.19. Všimnite si, že Dôsledky 4.39, 4.40 a Príklad 4.41 možno zovšeobecniť. Podstatné je len to, že matica A je celočíselná a má determinat $+1$ alebo -1 . Dimenzia nie je dôležitá a namiesto lineárnych zobrazení možno uvažovať afinné zobrazenia. Spracujte túto problematiku a aplikujte ju aj na rotácie kružnice.

Projekt 4.20. V Poznámke 4.24 sme ukázali, že druhá časť Vety 4.22 neplatí, ak vynecháme predpoklad, že $\mu(X) < \infty$. Je možné tento predpoklad nahradiť nejakým iným rozumným predpokladom? (Napri. že T je surjekcia alebo že v (4) a (5) namiesto integrovateľných funkcií budeme uvažovať funkcie majúce integrál apod. Autor sa s týmto nestretol, dokonca sa nestretol ani s Poznámkou 4.24, veta sa v knihách formuluje len pre priestory s konečnou mierou.)

Kapitola 5

Rekurentnosť

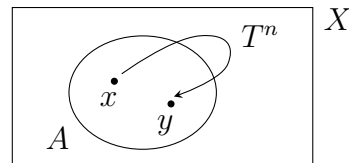
5.1 Počet návratov. Poincarého veta o rekurencii

Predpoklad, že $T: X \rightarrow X$ zachováva *konečnú* mieru, má dôležité dynamické dôsledky. Jedným z nich je Poincarého veta o rekurencii.¹

Nech T je zobrazenie $X \rightarrow X$ a $A \subseteq X$. Predpokladajme, že $x \in A$. To sa dá vyjadriť aj tak, že $T^0(x) \in A$, teda bod x je v “čase” 0 v množine A . Ak existuje také $n \geq 1$, že aj $T^n(x) \in A$, je prirodzené povedať, že bod x sa v čase n *vrátil do množiny* A . Ak je takých prirodzených čísel n nekonečne veľa (alebo presne k), budeme hovoriť, že bod x sa nekonečne veľakrát (alebo presne k -krát) vrátil do A .² Nasledujúce podmienky sú pre $n \geq 1$ ekvivalentné:

- (1) Existuje bod $x \in A$, ktorý sa v čase n vráti do A .
- (2) $T^n(A) \cap A \neq \emptyset$.
- (3) $T^{-n}(A) \cap A \neq \emptyset$.

Každá z troch podmienok je totiž ekvivalentná s tým, že v A existuje bod, ktorého T^n -obraz je tiež v A (v označení z Obr. 5.1, do prieniku (2) patrí bod x , do prieniku (3) patrí bod y). Názočne povedané, podmienky sú ekvivalentné s tým, že existuje T^n -šípka, ktorá začína aj končí v A .



Obr. 5.1: Bod $x \in A$ sa v čase $n \geq 1$ vrátil do A

Definícia 5.1. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Povieme, že merateľné zobrazenie $T: X \rightarrow X$ je *rekurentné* (vzhľadom na mieru μ), ak pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ s mierou $\mu(A) > 0$ existuje bod $x \in A$, ktorý sa vráti do A (t.j. existuje $n \geq 1$ tak, že $T^n(x) \in A$).

Inak povedané, T je rekurentné, ak je merateľné a každá množina kladnej miery sa pri iterovaní niekedy (v čase $n \geq 1$) pretne sama so sebou. Poznamenajme, že nejde o štandardnú terminológiu,

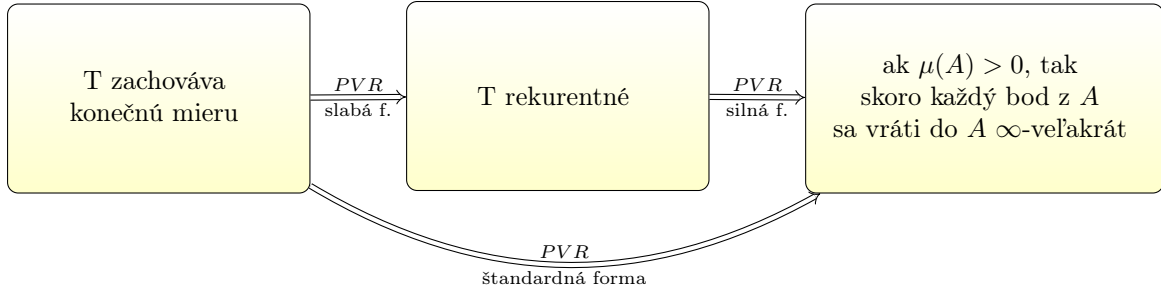
¹Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) bol francúzsky matematik, fyzik, astronóm a filozof. V matematike bol polyhistorom, vynikol v mnohých jej oblastiach. Počas štúdia problému troch telies si uvedomil, že vývoj deterministického systému môže dramaticky závisieť od počiatočných podmienok. (Zdá sa, že pred ním si to uvedomoval len J. C. Maxwell.) Tým pomohol položiť základy modernej teórie chaosu. Je považovaný aj za jedného zo zakladateľov topológie. V roku 1905 dospel súčasne s Einsteinom k základným pojmom špeciálnej teórie relativity.

²Pozor na možné nedorozumenia. Podľa prijatej terminológie aj ak celá trajektória $x, T(x), T^2(x), \dots$ leží v A , tak hovoríme, že bod a sa nekonečne veľa krát “vrátil” do A , hoci množinu A v skutočnosti nikdy “neopustil”. Jednoducho, pre bod $x \in A$ počítame počet časov $n \geq 1$, pre ktoré je $T^n(x) \in A$. “Návrat” je teda návšteva v čase $n \geq 1$.

ale ustálená terminológia neexistuje.³

Triviálnym príkladom rekurentného zobrazenia je identita. Ďalšie príklady budú zrejmé už o chvíľu, z Vety 5.2. Zobrazenie “znížený stan” (pozri Príklad 4.18) nie je rekurentné, lebo ak $1 - \delta < 1$ je maximálna hodnota tohto zobrazenia a za A zvolíme otvorené δ -okolie bodu 1, tak v A neexistuje bod, ktorý sa vráti do A .

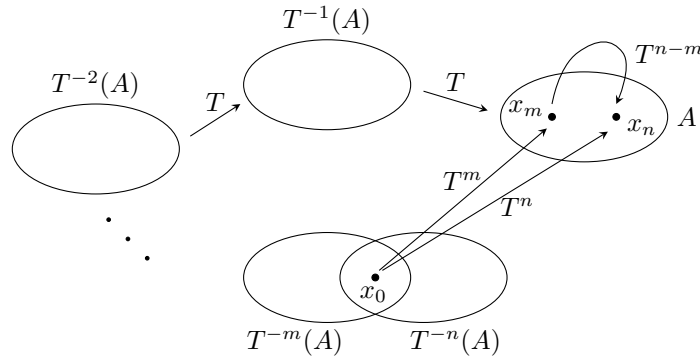
Náš plán je dokázať tvrdenia, ktoré si kvôli prehľadnosti znázorníme nasledujúcim diagramom.



Obr. 5.2: Poincarého vety o rekurencii: slabá forma, silná forma, štandardná forma

Veta 5.2 (Poincarého veta o rekurencii – slabá forma). *Nech zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ . Potom T je rekurentné vzhľadom na μ .*

Dôkaz. Nech $A \in \mathcal{B}$ a nech $\mu(A) > 0$. Keďže T zachováva mieru μ , všetky množiny v postupnosti $A, T^{-1}(A), T^{-2}(A), \dots$ majú rovnakú mieru, rovnú $\mu(A) > 0$. Tieto množiny nemôžu byť navzájom disjunktné, lebo ich zjednotenie by malo nekonečnú mieru, zatiaľ čo celý priestor X má len konečnú mieru. Preto existujú také celé čísla $0 \leq m < n$, že $T^{-m}(A) \cap T^{-n}(A) \neq \emptyset$. Zvoľme bod $x_0 \in T^{-m}(A) \cap T^{-n}(A)$. Potom body $x_m := T^m(x_0)$ a $x_n := T^n(x_0)$ patria do A , pozri Obr. 5.3.



Obr. 5.3: Ilustrácia k dôkazu Vety 5.2

Keďže $n > m$, máme $x_n = T^{n-m}(x_m)$. Vidíme, že v množine A existuje bod x_m , ktorý sa v čase $n - m \geq 1$ vráti do A . Tým sme dokázali, že T je rekurentné. $\square$

³Hovorí sa napr. o konzervatívnych zobrazeniach alebo o nestlačiteľných zobrazeniach, ale tieto pojmy majú aj iné významy. Ak by sme mali použiť analógiu s topologickou dynamikou, mohli by sme tiež vravieť o mierovo neblúdivých zobrazeniach, aj k tomu však možno mať výhrady.

Poznámka 5.3. Predpoklad, že miera μ je konečná, je v tejto vete podstatný. Posunutie $T(x) = x + 1$ na reálnej osi (so σ -algebrou borelovských množín a Lebesguovou mierou) je merateľné a zachováva Lebesguovu mieru, ale nie je rekurentné. Interval $[0, 1)$ má totiž kladnú mieru, ale pri iterovaní sám seba nikdy nepretné.

Veta 5.4 (Poincarého veta o rekurencii – silná forma). *Nech zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je rekurentné. Potom pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ s kladnou mierou platí, že skoro každý bod množiny A sa nekonečne veľa krát vráti do množiny A .*⁴

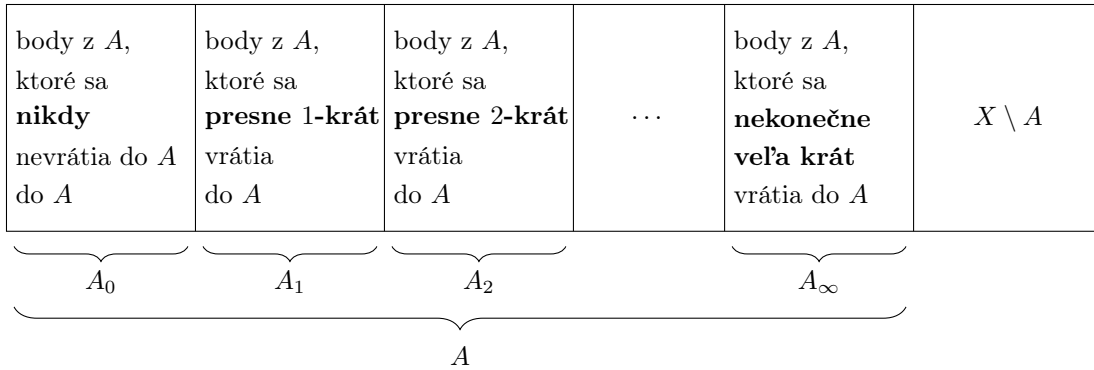
Dôkaz. Potrebujeme dokázať, že množina

$$A_\infty = \{x \in A : \exists \text{ nekonečne veľa časov } n \geq 1 \text{ takých, že } T^n(x) \in A\}$$

je plnej miery v A , teda $\mu(A \setminus A_\infty) = 0$.

Nech A_0 je množina tých bodov z A , ktoré sa nikdy nevrátia do A a pre $k = 1, 2, \dots$ je A_k množina tých bodov z A , ktoré sa práve k -krát vrátia do A . Potom množinu A možno vyjadriť ako disjunktné zjednotenie (pozri Obr. 5.4):

$$A = (A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots) \sqcup A_\infty. \quad (5.1)$$



Obr. 5.4: Rozklad množiny A a priestoru X .

Množina A je merateľná, teda aj $A^C := X \setminus A$ je merateľná. Keďže zobrazenie T je merateľné, sú aj všetky vzory $T^{-i}(A)$, $T^{-i}(A^C)$ merateľné. Potom sú však merateľné aj množiny (pre väčšiu názornosť podčiarkujeme vzory množiny A):

$$\begin{aligned} A_0 &= A \cap T^{-1}(A^C) \cap T^{-2}(A^C) \cap T^{-3}(A^C) \cap \dots, \\ A_1 &= (A \cap \underline{T^{-1}(A)} \cap T^{-2}(A^C) \cap T^{-3}(A^C) \cap \dots) \cup \\ &\quad \cup (A \cap T^{-1}(A^C) \cap \underline{T^{-2}(A)} \cap T^{-3}(A^C) \cap \dots) \cup \\ &\quad \cup (A \cap T^{-1}(A^C) \cap T^{-2}(A^C) \cap \underline{T^{-3}(A)} \cap \dots) \cup \\ &\quad \cup \dots, \end{aligned}$$

⁴Všimnime si, že veta triviálne platí aj v prípade, že $\mu(A) = 0$. Ak je totiž $\mu(A) = 0$, tak každá podmnožina množiny A je plnej miery v A . Teda aj podmnožina tých bodov z A , ktoré sa do A vrátia nekonečne veľa krát, je plnej miery v A , hoc by aj tá podmnožina bola prázdna, čo sa môže stať (napr. ak $A = \emptyset$ alebo ak T je zobrazenie stan, miera je Lebesguova a $A = \{1\}$).

$$\begin{aligned}
A_2 = & \bigcup_{1 \leq i < j} (A \cap T^{-1}(A^C) \cap \dots \cap T^{-(i-1)}(A^C) \cap \underline{T^{-i}(A)} \cap T^{-(i+1)}(A^C) \cap \dots \\
& \dots \cap T^{-(j-1)}(A^C) \cap \underline{T^{-j}(A)} \cap T^{-(j+1)}(A^C) \cap \dots), \\
& \dots, \\
A_\infty = & A \setminus (A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots).
\end{aligned}$$

Všetky množiny vystupujúce vo vzťahu (5.1) sú teda merateľné. Aby sme dokázali, že A_∞ má plnú mieru v A , stačí ukázať, že

$$\mu(A_0) = \mu(A_1) = \mu(A_2) = \dots = 0.$$

Teraz príde kľúčové miesto v dôkaze: Keďže predpokladáme, že T je rekurentné, tak na dôkaz nulovosti týchto mier stačí ukázať, že body z týchto množín sa do nich nikdy nevrátia (pozri Definíciu 5.1).

Ak $x \in A_0$, tak podľa definície množiny A_0 sa x nikdy nevráti do množiny A , teda ani do menšej množiny $A_0 \subseteq A$.

Podobne, ak $x \in A_k$, $k \in \mathbb{N}$, tak x sa nikdy nevráti do A_k . Ak by totiž pre nejaké $n \geq 1$ bolo $T^n(x) \in A_k \subseteq A$, tak bod $T^n(x)$ (ako bod patriaci do A_k) by sa presne k -krát vrátil do A . Lenže to by znamenalo, že náš bod x sa do A vrátil aspoň $k+1$ krát (jednak v čase n a potom v ďalších k časoch). To je spor s tým, že $x \in A_k$. $\square$

Ako dôsledok Viet 5.2 a 5.4 okamžite dostávame nasledujúce tvrdenie.

Veta 5.5 (Poincarého veta o rekurencii – štandardná forma). *Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ . Potom pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ s kladnou mierou platí, že skoro každý bod množiny A sa nekonečne veľa krát vráti do množiny A .⁵*

Poznámka 5.6. Tvrdenie, že skoro každý bod množiny A sa nekonečne veľa krát vráti do množiny A nemusí byť príliš užitočné, ak zachovávaná miera μ nemá fyzikálny význam. Napr. ak $p \in X$ je pevný bod zobrazenia T , tak Diracova miera δ_p je invariantná pre T . Poincarého veta dáva:

- Keďže množina $\{p\}$ má kladnú mieru, skoro každý bod z nej sa do nej vráti nekonečne veľa krát. Lenže to je predsa jasné aj bez Poincarého vety, keď bod p je dokonca pevný bod.

Poznámka 5.7. Ten istý príklad ako v Poznámke 5.3 ukazuje, že predpoklad konečnosti miery vo Vete 5.5 nemožno vynechať.

Poznámka 5.8. Zobrazenie stan zachováva (konečnú) Lebesguovu mieru. Preto skoro každý bod z intervalu $(0, 1]$ sa doň podľa Vety 5.5 vráti nekonečne veľa krát. Bod 1 sa doň však nevráti nikdy. Teda vo vete nemožno tvrdiť, že by sa každý bod množiny A musel do nej vrátiť (a to ani v prípade, že A má plnú mieru).

Samozrejme, v špeciálnych prípadoch sa môže stať, že úplne každý bod množiny A sa do nej vráti nekonečne veľa krát. Tak je tomu napr. ak T je identita alebo ak T je rotácia kružnice, na ktorej máme Lebesguovu mieru (tá je invariantná pre rotácie) a A je oblúk kružnice.

⁵Opäť, veta triviálne platí aj v prípade, že $\mu(A) = 0$, ale to neznamena, že v takom prípade by musel existovať bod v A , ktorý sa vôbec vráti do A .

5.2 *Horná frekvencia návratov v priestore s konečnou mierou

Zosilníme Vetu 5.5. Ukážeme, že ak v systéme zachovávaúcim *konečnú* mieru vezmeme hocijakú množinu A kladnej miery, tak nielenže sa skoro každý bod množiny A vráti do A nekonečne veľa krát, ale dokonca sa tam skoro každý bod množiny A vracia s kladnou hornou frekvenciou! Najskôr ukážeme, že existuje aspoň jeden taký bod v A a z toho potom napodiv odvodíme, že skoro každý bod množiny A má tú vlastnosť.

Lema 5.9. *Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ ⁶ a nech $\mu(A) > 0$. Potom existuje aspoň jeden bod množiny A , ktorý sa vracia do A s kladnou hornou frekvenciou.*

Dôkaz. Nech taký bod neexistuje (odvodíme spor). Potom každý bod množiny A sa vracia do A s nulovou hornou frekvenciou, čiže aj s nulovou frekvenciou. Pre každé $x \in A$ je teda

$$\text{frekv}_A(T^n x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : T^n x \in A\}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_A(T^n x)}_{f_N(x)} = 0.$$

Z toho možno odvodiť, že každý bod $x \in X$ navštevuje množinu A s nulovou frekvenciou. Naozaj, bod $x \in X$ buď vôbec nenavštívi množinu A a potom je to triviálne, alebo pre nejaké $k \geq 0$ je $T^k(x) \in A$ a potom je to tiež zrejmé, lebo tento bod $T^k(x)$ sa vracia do A s nulovou frekvenciou. Dostávame teda, že horeuvedená limita sa rovná nule všade na X :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = 0 \quad \text{pre každé } x \in X. \quad (5.2)$$

Funkcie f_N , $n = 1, 2, \dots$ sú reálne funkcie definované všade na X . Overíme, že postupnosť $(f_N)_{N=1}^\infty$ spĺňa predpoklady Lebesguovej vety o dominantnej konvergencii:

- Funkcie f_N sú merateľné.

Naozaj, zobrazenie $T: X \rightarrow X$ je merateľné podľa predpokladu, preto aj jej iterácie sú merateľné. Ďalej, množina A je merateľná, teda charakteristická funkcia $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ je merateľná. Z toho dostávame, že funkcie $f_N: X \rightarrow \mathbb{R}$ sú merateľné.

- $|f_N(x)| \leq 1$ pre každé N a pre každé $x \in X$. Pritom jednotková funkcia je integrovateľná na X .

Naozaj, $|\chi_A(x)| \leq 1$, preto zrejmé $|f_N(x)| \leq 1$. Jednotková funkcia je integrovateľná na X , lebo $\mu(X) < \infty$.

- Postupnosť f_N bodovo konverguje (k nulovej funkcii na X).

To už vieme z (5.2).

Podľa Lebesguovej vety o dominantnej konvergencii sú funkcie f_N integrovateľné (a aj limitná nulová funkcia je integrovateľná, to je však jasné) a platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int f_N d\mu = \int \left(\lim_{N \rightarrow \infty} f_N \right) d\mu = \int 0 d\mu = 0. \quad (5.3)$$

⁶Nestačí slabší predpoklad, že T je rekurentné? Autor tohto textu nevie odpovedať. Keby tu stačila rekurentnosť, tak aj vo vete 5.10 by stačila.

Lenže μ je invariantná pre T a teda aj pre iterácie T , takže s využitím Vety 4.22 dostávame, že pre každé N je

$$\begin{aligned} \int f_N d\mu &= \frac{1}{N} \int ((\chi_A \circ T) + (\chi_A \circ T^2) + \cdots + (\chi_A \circ T^N)) d\mu \\ &= \frac{1}{N} \int (\chi_A + \chi_A + \cdots + \chi_A) d\mu = \frac{1}{N} N\mu(A) = \mu(A). \end{aligned}$$

Po dosadení do (5.3) dostaneme $\mu(A) = 0$, čo je spor s predpokladom, že $\mu(A) > 0$. $\square$

Veta 5.10. *Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ a nech $\mu(A) > 0$. Potom skoro každý bod množiny A sa vracia do A s kladnou hornou frekvenciou.*

Dôkaz. Pre $x \in A$ nás zaujíma horná frekvencia, s akou postupnosť $T^n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ navštevuje množinu A :

$$\text{frekv}_A^+(T^n x) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : T^n x \in A\}}{N} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_A(T^n x)}_{f_N(x)}.$$

Z dôkazu Lemy 5.9 vieme, že funkcie $f_N: X \rightarrow \mathbb{R}$ sú merateľné. Teda aj funkcia $\text{frekv}_A^+(T^n x): X \rightarrow \mathbb{R}$ je merateľná. Z toho vyplýva, že v rozklade $A = A^+ \sqcup A^0$ sú množiny

$$A^+ = \{x \in A : \text{frekv}_A^+(T^n x) > 0\}, \quad A^0 = \{x \in A : \text{frekv}_A^+(T^n x) = 0\}$$

merateľné. Chceme dokázať, že $\mu(A^0) = 0$. Predpokladajme, že by bolo $\mu(A^0) > 0$. Potom podľa Lemy 5.9 existuje bod $x_0 \in A^0$, ktorý sa vracia do množiny A^0 , a teda aj do väčšej množiny A , s kladnou hornou frekvenciou. To však znamená, že x_0 patrí do A^+ . To je spor s tým, že $x_0 \in A^0$. $\square$

Poznámka 5.11. Veta 5.10 neplatí bez predpokladu $\mu(X) < \infty$. Kontrapríkladom je $T(x) = x+1$ na reálnej osi s Lebesguovou mierou.

Poznámka 5.12. Veta 5.10 neplatí bez predpokladu, že μ je invariantná. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je lineárna na intervaloch $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 1]$, s hodnotami $T(0) = 0$, $T(1/4) = 1/2$, $T(1/2) = 0$, $T(1) = 1/2$. Potom Lebesguova miera Leb je na $[0, 1]$ konečná (ale nie invariantná pre T ; vysvetlite). Hoci interval $A = (1/2, 1]$ má mieru $\text{Leb}(A) > 0$, žiaden bod z A sa do A nevráti.

Poznámka 5.13. Pomocou Birkhoffovej ergodickej vety sa Veta 5.10 dá ešte zosilniť. V skutočnosti sa skoro každý bod množiny A vracia do A s kladnou frekvenciou (nie iba s kladnou hornou frekvenciou). To preto, lebo podľa Birkhoffovej ergodickej vety táto frekvencia *existuje* pre skoro každé $x \in A$ (lebo frekvencia $\text{frekv}_A(x)$ existuje pre skoro každé $x \in X$). No a keď existuje, tak sa zhoduje s hornou frekvenciou, ktorá je kladná. Pozri Dôsledok 10.2.

5.3 Kacova veta

Kacova⁷ veta dopĺňa Poincarého vetu o rekurencii v štandardnej forme o kvantitatívny aspekt. Ukazuje, ako dlho (v priemere) trvá bodu z A , kým sa prvýkrát vráti do A .

⁷Mark Kac (1914 – 1984) bol poľský matematik, Steinhausov žiak. Od r.1938 žil v USA. Kacova veta je z r. 1947.

Predpokladajme, že $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ . Ak $\mu(A) > 0$, tak z Poincarého vety o rekurencii v štandardnej forme (pozri Vetu 5.5) vieme, že μ -skoro každý bod z A sa (nekonečne veľa krát) vráti do A . Môžeme preto definovať tzv. *čas prvého návratu* $t_A(x)$ bodu $x \in A$ do množiny A :

$$t_A(x) := \begin{cases} \min\{n \geq 1: T^n(x) \in A\}, & \text{ak existuje také } n \geq 1, \text{ že } T^n(x) \in A, \\ +\infty, & \text{ak také } n \text{ neexistuje.} \end{cases}$$

Ide o funkciu

$$t_A: A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

ktorá je vďaka Poincarého vete v štandardnej forme μ -skoro všade na A konečná. Je to tzv. *funkcia prvého času návratu do množiny A* .⁸ O chvíľu dokážeme, že je merateľná (a keďže je nezáporná, tak má integrál, hoci zatiaľ nevieme, či konečný).

Zaujímá nás stredná hodnota tejto funkcie na množine A , čiže hodnota⁹

$$(t_A)_{\text{str}} = \frac{1}{\mu(A)} \int_A t_A d\mu. \quad (5.4)$$

Pretože $t_A(x) = +\infty$ len na množine miery nula, čo dá do integrálu nulový príspevok, má stredná hodnota (5.4) šancu byť číslom. O chvíľu sa dozvieme, že je to naozaj číslo (a nie ∞). Ukáže sa totiž, že integrál v (5.4) je konečný,¹⁰ t.j. že funkcia t_A je integrovateľná. Hodnotu tohto integrálu nám dáva tzv. Kacova veta.

Aby sme Kacovu vetu sformulovali a dokázali, budeme používať množiny, ktoré napriek podobným označeniam budú mať iný význam ako tie, ktoré sme použili v dôkaze Vety 5.4. Tentokrát rozložíme na menšie množiny nielen množinu A , ale aj jej komplement $A^C = X \setminus A$. Pre body z množiny A , teda body, ktoré v čase 0 sú v A , nás bude zaujímať prvý čas ≥ 1 , kedy sa *vrátia* do A . Pre body z množiny A^C , teda body, ktoré v čase 0 nie sú v A , nás bude zaujímať čas ≥ 1 , kedy sa prvý raz *dostanú* do A . Použijeme teda rozklad

$$X = \underbrace{(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup \dots) \sqcup A_\infty}_{A} \overset{X \setminus A^C}{\sqcup} \underbrace{(A_1^C \sqcup A_2^C \sqcup \dots \sqcup A_n^C \sqcup \dots) \sqcup A_\infty^C}_{A^C = X \setminus A}, \quad (5.5)$$

v ktorom

$$\begin{aligned} A_n &:= t_A^{-1}(n) = \{x \in A: T^i(x) \notin A \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ a } T^n(x) \in A\}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ A_\infty &:= t_A^{-1}(+\infty) = \{x \in A: T^i(x) \notin A \text{ pre } i = 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

a podobne

$$\begin{aligned} A_n^C &:= \{x \in A^C: T^i(x) \notin A \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ a } T^n(x) \in A\}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ A_\infty^C &:= \{x \in A^C: T^i(x) \notin A \text{ pre } i = 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

⁸Angl. “the first-return time function”.

⁹Keďže $\mu(A)$ je v menovateli, vidíme, prečo potrebujeme $0 < \mu(A) < +\infty$.

¹⁰To nie je zrejmé, lebo funkcia t_A je vo všeobecnosti neohraničená. Hodnotu $+\infty$ síce nadobúda len na množine miery nula (a teda na nej má nulový integrál), ale ona vo všeobecnosti nadobúda aj ľubovoľne veľké konečné hodnoty a mohlo by sa stať, že stred.

Teda A_n je množina tých bodov z A , ktoré sa prvýkrát *vrátia* do A v čase n . Množinu A_∞ tvoria tie body, ktoré sú v A , ale už sa nikdy nevrátia do A . Ďalej, A_n^C je množina tých bodov, ktoré sú v komplemente množiny A a prvýkrát *vojdú* do A v čase n . Tie body z komplementu množiny A , ktoré nikdy nevojdú do A , tvoria množinu A_∞^C .

Môžeme si tiež všimnúť, že A_∞^C je množina tých bodov $x \in X$, ktorých orbita $\text{Orb}_T(x) = \{x, T(x), T^2(x), \dots\}$ nepretína množinu A . Teda $X \setminus A_\infty^C$ je množina tých bodov z X , ktorých orbita pretína množinu A .

Z definícií horeuvedených množín je zrejmé, že tieto množiny sú navzájom disjunktné a každý bod z X patrí práve do jednej z nich. Teda (5.5) je rozklad priestoru X (niektoré z množín v tom rozklade však môžu byť prázdne).

Skôr než sformulujeme a dokážeme Kacovu vetu, je dobré si uvedomiť, že všetky množiny v tom rozklade sú merateľné, a teda budeme môcť hovoriť o ich mierach (merateľnosť množiny A_∞^C sa využije už pri formulovaní Kacovej vety). To je zrejmé z merateľnosti množín A a A^C , merateľnosti zobrazenia T a zrejmých vyjadrení spomínaných množín v nasledujúcich tvaroch (vysvetlite):

$$\begin{aligned} A_n &= A \cap T^{-1}(A^C) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(A^C) \cap T^{-n}(A), \\ A_\infty &= A \cap T^{-1}(A^C) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(A^C) \cap \dots, \\ A_n^C &= A^C \cap T^{-1}(A^C) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(A^C) \cap T^{-n}(A), \\ A_\infty^C &= A^C \cap T^{-1}(A^C) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(A^C) \cap \dots \end{aligned}$$

Veta 5.14 (Kacova veta pre systémy zachovávajúce konečnú mieru). *Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ a nech $\mu(A) > 0$. Potom funkcia $t_A: A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je integrovateľná a platí:*

$$\int_A t_A d\mu = \mu(X) - \mu(A_\infty^C),$$

takže stredný čas prvého návratu bodov množiny A do tejto množiny je

$$(t_A)_{\text{str}} = \frac{\mu(X) - \mu(A_\infty^C)}{\mu(A)}.$$

Dôkaz. Funkcia

$$t_A: A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

nadobúda hodnotu n na množine A_n ($n = 1, 2, \dots$) a hodnotu $+\infty$ na množine A_∞ . Ako sme vyššie ukázali, všetky tieto množiny sú merateľné. Z toho vyplýva, že t_A je merateľná, a to jednoduchá merateľná (tzv. schodovitá) funkcia. Navyše, vďaka Poincarého vete o rekurencii v štandardnej forme je $t_A(x) < +\infty$ pre skoro každý bod $x \in A$, t.j.

$$\mu(A_\infty) = 0. \quad (5.6)$$

Preto má funkcia t_A integrál

$$\int_A t_A d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mu(A_n) \quad (5.7)$$

(ešte nevieme, či je tento integrál konečný alebo sa rovná $+\infty$).

Funkciu t_A integrujeme na A (len tam je definovaná). Aby sme však vypočítali sumu na pravej strane (5.7), bude užitočné pozrieť sa na celý priestor X . Vzhľadom na rozklad (5.5) máme (pozri aj (5.6))

$$\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \underbrace{\mu(A_{\infty})}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^C) + \mu(A_{\infty}^C). \quad (5.8)$$

Keďže $\mu(X) < +\infty$, nekonečné rady nezáporných čísel v (5.8) konvergujú. Z toho o.i. vyplýva, že

$$\mu(A_n^C) \rightarrow 0 \quad \text{pre } n \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

Po úprave

$$\mu(X) - \mu(A_{\infty}^C) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) + \mu(A_n^C)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \sqcup A_n^C). \quad (5.10)$$

Aby sme ďalej upravili túto sumu, ideme študovať množiny $A_n \sqcup A_n^C$ (odvodíme vzťah (5.11)).

Ak sa pozrieme na definície množín A_n a A_n^C , vidíme, že pre $n = 1, 2, \dots$ je

$$A_n \sqcup A_n^C = \{x \in A \cup A^C = X : T(x), \dots, T^{n-1}(x) \in A^C \text{ a } T^n(x) \in A\}.$$

Pre $n \geq 2$ to dáva¹¹

$$\begin{aligned} A_n \sqcup A_n^C &= \{x \in X : T(x) \in A^C \text{ a } T(Tx), \dots, T^{n-2}(Tx) \in A^C \text{ a } T^{n-1}(Tx) \in A\} \\ &= \{x \in X : T(x) \in A_{n-1}^C\} = T^{-1}(A_{n-1}^C). \end{aligned}$$

Dokázali sme tak, že

$$T^{-1}(A_n^C) = A_{n+1}^C \sqcup A_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Odtiaľ, ak využijeme, že μ je T -invariantná, máme

$$\mu(A_n^C) = \mu(T^{-1}A_n^C) = \mu(A_{n+1}^C) + \mu(A_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

a opakovaným použitím (5.11) dostávame (pre fixované $n \geq 1$)

$$\begin{aligned} \mu(A_n^C) &= \mu(A_{n+1}^C) + \mu(A_{n+1}) = \mu(A_{n+2}^C) + \mu(A_{n+2}) + \mu(A_{n+1}) \\ &= \mu(A_{n+3}^C) + \mu(A_{n+3}) + \mu(A_{n+2}) + \mu(A_{n+1}) \\ &= \dots = \mu(A_m^C) + \sum_{i=n+1}^m \mu(A_i) \quad \text{pre každé } m > n. \end{aligned}$$

Limitovaním pre $m \rightarrow \infty$ a s využitím (5.9) získame rovnosť

$$\mu(A_n^C) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \text{pre každé } n = 1, 2, \dots$$

Po dosadení do (5.10) dostaneme

$$\mu(X) - \mu(A_{\infty}^C) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) + \mu(A_n^C)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i) \right).$$

¹¹Pre $n = 1$ to dáva $A_1 \sqcup A_1^C = \{x \in X : T(x) \in A\} = T^{-1}(A)$, ale to nevyužijeme.

Máme tu dvojný rad nezáporných čísel. Pre jednotlivé hodnoty n máme takéto rady:

$$\begin{aligned} n = 1 \dots & \quad \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \dots, \\ n = 2 \dots & \quad \mu(A_2) + \mu(A_3) + \dots, \\ n = 3 \dots & \quad \mu(A_3) + \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

Môžeme sa na to pozerat' ako na dvojrozmernú tabuľku *nezáporných* čísel, pričom našou úlohou je určiť sumu "riadkových" súm. V takej tabuľke sa však suma "riadkových" súm rovná sume "stĺpcových súm".¹² "Stĺpcové" sumy vieme ľahko určiť: v prvom stĺpci je $\mu(A_1)$, v druhom $2\mu(A_2)$, v treťom $3\mu(A_3)$ atď. Preto

$$\mu(X) - \mu(A_\infty^C) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mu(A_k)$$

(čo nielen dokazuje konvergenciu radu vpravo, ale aj jeho súčet). Porovnanie tohto výsledku so vzťahom (5.7) dokazuje prvú časť vety (hodnotu integrálu). Jej druhá časť z nej triviálne vyplýva. $\square$

Poznámka 5.15. Ku Kacovej vete sa vrátíme v Sekcii 7.3. Ukážeme tam, že pre tzv. ergodické systémy je $\mu(A_\infty^C) = 0$ a v takom prípade je teda $(t_A)_{\text{str}} = \frac{\mu(X)}{\mu(A)}$, čiže pre body množiny A je stredný čas ich prvého návratu do množiny A nepriamo úmerný miere množiny A .

5.4 Cvičenia a projekty

Cvičenie 5.1. V Poincarého vete o rekurencii je podstatné, že uvažujeme o jednej množine A s kladnou mierou a o návrate bodov z A do množiny A . Ukážte, že ak $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ a $A, B \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, tak sa môže stať, že dokonca žiaden bod z množiny A nikdy nenavštívi množinu B .

Cvičenie 5.2. V dôkaze Poincarého vety o rekurencii v slabej forme sa dá nájsť inšpirácia pre dôkaz nasledujúceho tvrdenia.

Nech zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva *konečnú* mieru μ a nech $\mu(A) > 0$. Nech $k > \mu(X)/\mu(A)$ (potom je automaticky $k \geq 2$). Potom platia nasledujúce tvrdenia.

- (1) Medzi množinami

$$A, T^{-1}A, T^{-2}A, \dots, T^{-(k-1)}A$$

sú aspoň dve, ktoré sa pretínajú, a to dokonca v množine kladnej miery.

- (2) Rovnaké tvrdenie platí, ak vezmeme hociktorých k množín v nekonečnej postupnosti

$$A, T^{-1}A, T^{-2}A, \dots$$

- (3) Existuje $n \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ tak, že $\mu(A \cap T^{-n}A) > 0$.

- (3) Existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n , pre ktoré je $\mu(A \cap T^{-n}A) > 0$.

¹²Účtovníci tento trik používajú pri konečných dvojrozmerných tabuľkách. Pri nekonečných dvojrozmerných tabuľkách funguje tiež, ak sú všetky členy nezáporné.

Cvičenie 5.3. Nech zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je rekurentné (napr. nech zachováva konečnú mieru μ). Nech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je kladná merateľná funkcia na X . Dokážte, že potom pre skoro každé $x \in X$ platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(T^k x) = +\infty.$$

Cvičenie 5.4. Čísla $x \in [0, 1)$ majú dekadický rozvoj $x = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$, kde $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ a $a_i \neq 9$ pre nekonečne veľa hodnôt i . Nech E_{10} je expandujúce zobrazenie na intervale $[0, 1)$ (pozri Príklad 4.20). Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- (1) Ak $x = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$, tak $E_{10}(x) = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$.
- (2) Nech A je množina tých bodov $x \in [0, 1)$, ktorých dekadický rozvoj začína cifrou $a_0 = 7$. Dokážte, že skoro každý (v zmysle Lebesguovej miery) bod $x \in A$ má vo svojom dekadickom rozvoji nekonečne veľa cifier $a_i = 7$.
- (3) Dokážte, že cifra 7 sa vyskytuje nekonečne veľa krát v dekadickom rozvoji skoro každého čísla $x \in [0, 1]$.

Kapitola 6

Invariantné množiny a invariantné funkcie

6.1 Invariantné množiny

Pri štúdiu ergodičnosti je veľmi užitočnou nasledujúca jednoduchá lema.

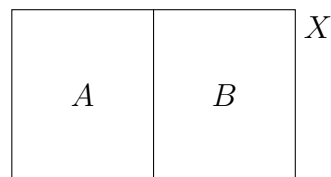
Lema 6.1. *Pre zobrazenie $T: X \rightarrow X$ a rozklad $X = A \sqcup B$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné.*

$$(1) \quad T(A) \subseteq A, \quad T(B) \subseteq B.$$

$$(2) \quad T^{-1}(A) = A.$$

$$(3) \quad T^{-1}(B) = B.$$

$$(4) \quad T^{-1}(A) = A, \quad T^{-1}(B) = B.$$



Obr. 6.1: Ilustrácia k Leme 6.1

Dôkaz. Z dôvodov symetrie zrejme stačí dokázať $(1) \Rightarrow (4)$ a $(2) \Rightarrow (1)$.

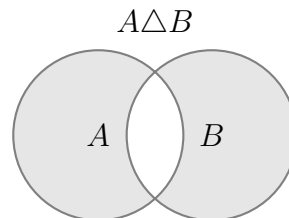
Nech platí (1). Potom $T^{-1}(A)$ neobsahuje žiaden bod z B (znamenalo by to, že nejaký bod z B sa zobrazí do A , čo je spor s tým, že $T(B) \subseteq B$) a podobne $T^{-1}(B)$ neobsahuje žiaden bod z A . Keďže každý bod z X sa niekam zobrazí, dostávame (4).

Nech platí (2). Potom neexistuje šípka z B do A (čím myslíme, že žiaden bod $b \in B$ sa nezobrazí do A ; taký bod by totiž patril do $T^{-1}(A)$, spor s (2)). Lenže neexistuje ani šípka z A do B (keby existoval bod $a \in A$ taký, že $T(a) \in B$, mali by sme $a \notin T^{-1}(A)$, spor s (2)). To však znamená, že body z B sa zobrazujú do B a body z A sa zobrazujú do A , teda platí (1). $\square$

Množiny s vlastnosťou $T^{-1}(A) = A$ súvisia s ergodičnosťou. V ergodickej teórii sa také množiny nazývajú invariantnými; zavedieme aj príbuzný pojem, tzv. skoro invariantnosť.

Pripomeňme najskôr, že symetrický rozdiel dvoch množín je definovaný vzťahom

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$



Obr. 6.2: Symetrický rozdiel

Lema 6.2 (Vlastnosti symetrického rozdielu). *Symetrický rozdiel má nasledujúce vlastnosti.*

- (1) $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$.
- (2) (Komutatívnosť) $A \triangle B = B \triangle A$.
- (3) (Asociatívnosť) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, takže môžeme písať $A \triangle B \triangle C$ bez zátvoriek.
- (4) $(A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = A \triangle C$.
- (5) (Trojuholníková nerovnosť) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.
- (6) $(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha) \triangle (\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} (A_\alpha \triangle B_\alpha)$.
- (7) Ak $T: X \rightarrow Y$ a $A, B \subseteq Y$, tak $T^{-1}(A \triangle B) = T^{-1}(A) \triangle T^{-1}(B)$.

Dôkaz. Cvičenie 6.3. Všimnite si, že (4) je dôsledok (1) a (3). □

Ak $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a $A, B \in \mathcal{B}$, tak budeme písať

$$A = B \text{ mod } \mu \quad \text{ak} \quad \mu(A \triangle B) = 0,$$

teda ak A a B sa v zmysle miery nepodstatne líšia. Namiesto “mod μ ” sa niekedy píše “mod 0”.

Lema 6.3 (Vlastnosti rovnosti mod μ). *Rovnosť mod μ má nasledujúce vlastnosti.*

- (1) $A = B \text{ mod } \mu \implies \mu(A) = \mu(B)$.
- (2) $A = B \text{ mod } \mu, B = C \text{ mod } \mu \Rightarrow A = C \text{ mod } \mu$.
- (3) Ak $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ a $A = B_i \text{ mod } \mu$ pre každé i , tak $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \text{ mod } \mu$.
- (4) Ak $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva mieru a ak $A, B \in \mathcal{B}$, tak platí implikácia

$$A = B \text{ mod } \mu \Rightarrow T^{-1}(A) = T^{-1}(B) \text{ mod } \mu.$$

Dôkaz. Cvičenie 6.4. Všimnite si, že (2) je dôsledok Lemy 6.2(5). □

Definícia 6.4. V ergodickej teórii, ak máme merateľné, nie nutne mieru zachovávajúce zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$, tak množina $A \in \mathcal{B}$ sa nazýva¹

- (a) *invariantná* pre T , ak $T^{-1}(A) = A$. Všimnite si, že

$$T^{-1}(A) = A \Leftrightarrow (\forall x \in X)(x \in A \Leftrightarrow T(x) \in A).$$

- (b) *skoro invariantná* pre T , ak $T^{-1}(A) = A \text{ mod } \mu$, teda $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$.

Zobrazenie T má vždy nejaké invariantné množiny. Takými sú napr. $\emptyset$ a X .

Lema 6.5 (Niektoré vlastnosti množín plnej miery). *V $(X, \mathcal{B}, \mu)$ platí nasledujúce.*

- (a) *Prienik spočítateľného systému množín plnej miery je množina plnej miery.*
- (b) *Dve množiny plnej miery sa rovnajú mod μ .*

¹Pozor, niektorí autori namiesto “invariantná” a “skoro invariantná” hovoria “striktne invariantná” a “invariantná”. Tiež dajte pozor na to, že v teórii dynamických systémov sa často pod invariantnou množinou rozumie niečo iné, totiž množina A taká, že $T(A) \subseteq A$, prípadne $T(A) = A$. Konečne, všimnite si, že pre definíciu v časti (a) nepotrebujeme žiadnu mieru, stačí mať množinu X a zobrazenie $T: X \rightarrow X$. Až v časti (b) potrebujeme mieru. Predpoklad, že T je merateľné, je však nadbytočný, k samotnej definícii ho nepotrebujeme.

$A_k(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém, tak navyše platí nasledujúce.

(c) Vzor množiny plnej miery je množina plnej miery.

(d) Každá merateľná množina plnej miery je skoro invariantná.

Dôkaz. (a) Nech A_k , $k \in K$ (K je spočítateľná) sú množiny plnej miery. Potom $(\bigcap_{k \in K} A_k)^C = \bigcup_{k \in K} (A_k)^C$ je zjednotenie spočítateľného systému množín nulovej miery, teda je to množina nulovej miery. Preto $\bigcap_{k \in K} A_k$ je plnej miery.

(b) Nech A, B sú plnej miery. Potom

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq X \setminus (A \cap B).$$

Podľa (a) je $A \cap B$ plnej miery a potom $\mu(A \Delta B) = 0$, čiže $A = B \bmod \mu$.

(c) Nech $A \in \mathcal{B}$ je plnej miery. Potom $X \setminus A$ je nulovej miery a keďže T zachováva mieru, je $T^{-1}(X \setminus A)$ nulovej miery a $T^{-1}(A) = X \setminus T^{-1}(X \setminus A)$ je plnej miery.

(d) Nech A je plnej miery. Podľa (c) je aj $T^{-1}(A)$ plnej miery, preto podľa (b) je $T^{-1}(A) = A \bmod \mu$. $\square$

Triviálne, každá invariantná množina je aj skoro invariantná. Zaujímavejšie je, že v systéme zachovávajúcom mieru sa zo skoro invariantnej množiny vždy dá z pohľadu miery ‘zanedbateľnou’ úpravou získať invariantná množina. Aby sme toto tvrdenie dokázali, bude užitočná nasledujúca lema o množine tých bodov, ktoré nekonečne veľa krát vojdú do množiny A (namiesto “ x navštívi A ” hovoríme aj “ x vojde do A ”).

Lema 6.6. Nech X je množina a $T: X \rightarrow X$ zobrazenie. Nech $A \subseteq X$. Označme

$$A_\infty^X := \{x \in X : x \text{ navštívi } A \text{ nekonečne veľa krát}\}.$$

Potom

$$(1) A_\infty^X = \limsup_{n \rightarrow \infty} T^{-n}(A) = \bigcap_{N=0}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}(A)}_{B_N}.$$

$$(2) \text{ Množina } A_\infty^X \text{ je } T\text{-invariantná, t.j. } T^{-1}(A_\infty^X) = A_\infty^X.$$

Dôkaz. (1) Podľa definície, $x \in X$ patrí do A_∞^X práve vtedy, keď $x \in T^{-n}(A)$ pre nekonečne veľa $n \geq 0$. Na druhej strane, podľa definície limes superior postupnosti množín v X , je aj $\limsup_{n \rightarrow \infty} T^{-n}(A)$ množinou tých $x \in X$, ktoré ležia v nekonečne veľa množinách $T^{-n}(A)$. Zostáva využiť fakt, že $\limsup_{n \rightarrow \infty} M_n = \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} M_n$.

(2) Nech $x \in T^{-1}(A_\infty^X)$. Potom $T(x) \in A_\infty^X$, čo znamená, že $T(x)$ vojde do A nekonečne veľa krát. Potom však tým skôr aj x vojde do A nekonečne veľa krát, teda $x \in A_\infty^X$.

Obrátene, nech $x \in A_\infty^X$. To znamená, že x vojde do A nekonečne veľa krát. Potom $T(x)$ vojde do A možno o jeden raz menej, ale ešte stále nekonečne veľa krát. Teda $T(x) \in A_\infty^X$, odkiaľ $x \in T^{-1}(A_\infty^X)$.

Uvedieme ešte iný dôkaz invariantnosti množiny A_∞^X . Podľa (1) máme

$$T^{-1}(A_\infty^X) = T^{-1}\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} B_N\right) = \bigcap_{N=0}^{\infty} T^{-1}(B_N) = \bigcap_{N=0}^{\infty} B_{N+1} = A_\infty^X,$$

pričom posledná rovnosť vyplýva z toho, že $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ $\square$

Sme pripravení ukázať, že v miere zachovávajúcim systéme sa zo skoro invariantnej množiny dá zanedbateľnou zmenou získať invariantná množina.

Propozícia 6.7. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci dynamický systém a nech $A \in \mathcal{B}$ je skoro invariantná množina. Potom existuje invariantná množina $M \in \mathcal{B}$, ktorá sa zanedbateľne líši od A , t.j. $M = A \bmod \mu$.*

Dôkaz. Takých množín M môže existovať veľa. Ukážeme, že požadovanú vlastnosť má vždy napríklad množina $M = A_\infty^X$ z predchádzajúcej lemy. Overíme to.

Predovšetkým, $A_\infty^X \in \mathcal{B}$, lebo z Lemy 6.6(1) vyplýva, že je to prienik zjednotení merateľných množín. Z Lemy 6.6(2) navyše vieme, že A_∞^X je invariantná množina. Zostáva dokázať, že $A_\infty^X = A \bmod \mu$. Dokážeme to postupne.²

- $T^{-n}(A) = A \bmod \mu$, pre každé $n \geq 0$.

Pre $n=0$ je to triviálne. Ďalej dokazujeme matematickou indukciou. Rovnosť $T^{-1}A = A \bmod \mu$ platí podľa predpokladu. Ak pre nejaké $n \geq 1$ je $T^{-n}A = A \bmod \mu$, tak podľa Lemy 6.3(5) je $T^{-(n+1)}A = T^{-1}A \bmod \mu$ a potom podľa Lemy 6.3(3) dostaneme $T^{-(n+1)}A = A \bmod \mu$.

- $B_N = A \bmod \mu$, pre každé $N \geq 0$ (pozri Lemu 6.6(1) pre definíciu B_N).

Naozaj, podľa Lemy 6.2(6) je

$$A \triangle B_N = A \triangle \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}A = \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A \right) \triangle \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}A \right) \subseteq \bigcup_{n=N}^{\infty} (A \triangle T^{-n}A)$$

a využijúc monotónnosť a σ -subaditívnosť miery ako aj už dokázanú rovnosť $\mu(A \triangle T^{-n}A) = 0 \bmod \mu$, $n = 0, 1, \dots$, dostaneme $\mu(A \triangle B_N) = 0$ pre každé N .

- $A_\infty^X = A \bmod \mu$.

Z vyššie uvedeného máme

$$A_\infty^X = \bigcap_{N=0}^{\infty} B_N, \quad B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots, \quad A = B_N \bmod \mu, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Podľa Lemy 6.3(4) je potom $A = A_\infty^X \bmod \mu$.

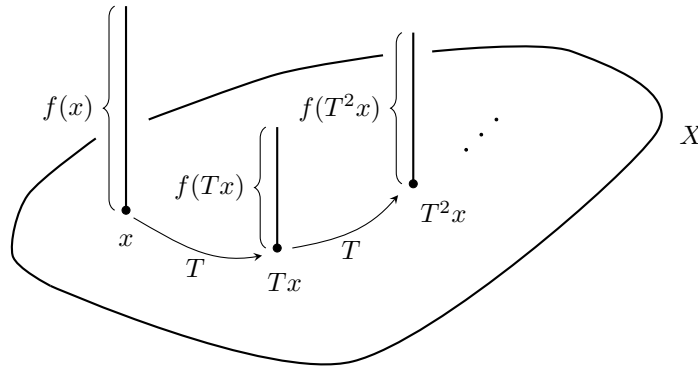
□

6.2 Invariantné funkcie

Doposiaľ sme študovali (skoro) invariantné množiny pre dynamický systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ a teraz zavedieme ešte pojem (skoro) invariantnej funkcie. Pôjde tu o reálne alebo všeobecnejšie komplexné merateľné funkcie na $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Pripomeňme si, že už v Sekcii 1.3 sme sa stretli so situáciou, že v dynamickom systéme na priestore X sme mali funkciu $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ alebo $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ (takú integrovateľnú funkciu sme tam nazývali pozorovateľnou). Zaujímalo nás jej priestorový priemer na X ako aj jej časový priemer pozdĺž trajektórie $x, Tx, T^2x, \dots$. Aj v Cvičení 5.3 sme v dynamickom systéme skúmali hodnoty (kladnej) reálnej merateľnej funkcie $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ pozdĺž trajektórie $x, Tx, T^2x, \dots$, pozri Obr. 6.3.

²Samozrejme bude treba využiť predpoklad, že A je skoro invariantná, lebo inak by to nemusela byť pravda. Vymyslíte taký príklad? Dá sa to už na dvojprvkovom priestore.

Obr. 6.3: Hodnoty funkcie f pozdĺž trajektórie

Lema 6.8. *Nech $T: X \rightarrow X$ je zobrazenie. Nech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (prípadne $f: X \rightarrow \mathbb{C}$) je funkcia. Potom nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:*

- (a1) *Pre každé $x \in X$ je $f(T(x)) = f(x)$.*
 (a2) *Pre každé $x \in X$ je postupnosť $f(x), f(Tx), f(T^2x), \dots$ konštantná (t.j. f je konštantná pozdĺž trajektórie bodu x)*

Ak $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva mieru μ , tak aj nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné.

- (b1) *Pre μ -skoro každé $x \in X$ je $f(T(x)) = f(x)$.*
 (b2) *Pre μ -skoro každé $x \in X$ je postupnosť $f(x), f(Tx), f(T^2x), \dots$ konštantná (t.j. f je konštantná pozdĺž trajektórie bodu x).*

Dôkaz. Ekvivalencia (a1) a (a2) je zrejmá. Aj implikácia (b2) $\Rightarrow$ (b1) je triviálna. Zostáva dokázať implikáciu (b1) $\Rightarrow$ (b2), ktorá už zrejmá nie je, lebo (b2) je zdanlivo silnejšie tvrdenie ako (b1)³; práve k dôkazu tejto implikácie potrebujeme predpoklad, že miera μ je invariantná.

Nech teda platí (b1), t.j. existuje množina $N \subseteq X$ taká, že $\mu(N) = 0$ a $f(T(x)) = f(x)$ pre každé $x \in N^C$. Pretože množina N^C je plnej miery, podľa Lemy 6.5(c) je každá množina v nasledujúcej postupnosti plnej miery: $N^C, T^{-1}(N^C), T^{-2}(N^C), \dots$. Pritom:

- pre $x \in N^C$ platí $f(x) = f(Tx)$,
- pre $x \in T^{-1}(N^C)$ platí, že $T(x) \in N^C$ a teda $f(T(x)) = f(T^2(x))$,
- pre $x \in T^{-2}(N^C)$ platí, že $T^2(x) \in N^C$ a teda $f(T^2(x)) = f(T^3(x))$,

atď. Podľa Lemy 6.5(a) je množina

$$M := N^C \cap T^{-1}(N^C) \cap T^{-2}(N^C) \cap \dots$$

plnej miery a navyše pre každé $x \in M$ je $f(x) = f(Tx) = f(T^2x) = \dots$. Dostali sme (b2). $\square$

³Apriori nie je jasné, či sa napr. nemôže stať, že množina ‘zlých’ bodov x , teda tých bodov x , pre ktoré $f(Tx) \neq f(x)$, je síce nulovej miery a teda (b1) platí, ale pritom v mnohých trajektóriách, či dokonca v každej trajektórii je aspoň jeden zlý bod, teda (b2) neplatí.

Definícia 6.9. Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie, nie nutne mieru zachovávajúce. Povieme, že merateľná reálna funkcia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (prípadne komplexná funkcia $f: X \rightarrow \mathbb{C}$) je⁴

- (a) *invariantná funkcia* pre T , ak je konštantná pozdĺž trajektórií, teda $f(T(x)) = f(x)$ pre každé $x \in X$, alebo inak zapísané

$$f \circ T = f \quad \text{na } X,$$

- (b) *skoro invariantná funkcia* pre T , ak $f(T(x)) = f(x)$ pre μ -skoro každé $x \in X$, alebo inak zapísané

$$f \circ T = f \quad \mu\text{-skoro všade na } X$$

(ak T zachováva mieru μ , je to podľa Lemy 6.8(b1) $\Leftrightarrow$ (b2) ekvivalentné s tým, že f je konštantná pozdĺž μ -skoro každej trajektórie).

Namiesto “skoro invariantná funkcia” sa hovorí aj “funkcia invariantná mod μ ” alebo “funkcia invariantná mod 0”.

Teda merateľná funkcia f je invariantná, ak je konštantná pozdĺž trajektórií. Pozdĺž rôznych trajektórií to môžu byť rôzne konštanty (podľa predpokladu je však f merateľná, takže nejaké obmedzenia na hodnoty f existujú). Merateľná funkcia f je skoro invariantná, ak z tohto pravidla existuje, v zmysle miery, len málo výnimiek, t.j. ak množina tých $x \in X$, v ktorých $f(T(x)) \neq f(x)$, je nulovej miery.

Lema 6.10. Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie, nie nutne mieru zachovávajúce. Nech $A \in \mathcal{B}$.

- (a) A je invariantná množina $\Leftrightarrow \chi_A$ je invariantná funkcia.
(b) A je skoro invariantná množina $\Leftrightarrow \chi_A$ je skoro invariantná funkcia.

Dôkaz. Predovšetkým, merateľnosť množiny A je ekvivalentná s merateľnosťou charakteristickej funkcie χ_A . V takom prípade platí nasledujúce.

(a) A je invariantná práve vtedy, keď $T^{-1}A = A$, čo je zase ekvivalentné s rovnosťou $\chi_{T^{-1}A} = \chi_A$. S využitím Lemy 3.40 je to ekvivalentné s rovnosťou $\chi_A \circ T = \chi_A$, čo znamená práve invariantnosť funkcie χ_A .

(b) A je skoro invariantná práve vtedy, keď $T^{-1}A = A$ mod μ , t.j. keď $\mu(A \Delta T^{-1}A) = 0$. Na množine $A \Delta T^{-1}A$ sa charakteristické funkcie $\chi_{T^{-1}A}$ a χ_A líšia (v každom bode z tej množiny sa jedna z nich rovná jednej a druhá nule). Mimo tejto množiny sa rovnajú (v bodoch prieniku $A \cap T^{-1}A$ sa obe rovnajú jednej, mimo zjednotenia $A \cup T^{-1}A$ sa obe rovnajú nule). Teda $\mu(A \Delta T^{-1}A) = 0$ je ekvivalentné s tým, že $\chi_{T^{-1}A} = \chi_A$ μ -skoro všade, čiže s tým, že $\chi_A \circ T = \chi_A$ μ -skoro všade. To práve znamená, že χ_A je skoro invariantná funkcia. $\square$

Lema 6.11. Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie. Nech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (alebo $X \rightarrow \mathbb{C}$) je merateľná funkcia.

- (a) Ak je f invariantná, tak je aj skoro invariantná.

⁴Pozor na terminológiu. Namiesto “invariantná” a “skoro invariantná” sa často hovorí “striktne invariantná” a “invariantná”. Teda ak niekde čítate o invariantných funkciách, musíte si presne pozrieť, čo sa tým myslí, aj keď z pohľadu teórie miery nie je medzi oboma pojmami podstatný rozdiel.

(b) Ak je f konštantná, tak je invariantná.

(c) Ak je f skoro konštantná a T zachováva mieru, tak je f skoro invariantná.

Dôkaz. Tvrdenia (a) a (b) sú zrejmé.

(c) Podľa predpokladu existuje konštanta c a množina N nulovej miery tak že $f(x) = c$ pre každé $x \in X \setminus N$. Keďže T zachováva mieru, tak aj $M = N \cup T^{-1}(N)$ má nulovú mieru. Ak $x \in X \setminus M$, tak $x \notin N$ a $x \notin T^{-1}(N)$. Ak však $x \notin N$, tak $f(x) = c$ a ak $x \notin T^{-1}(N)$, tak $T(x) \notin N$, odkiaľ $f(T(x)) = c$. Ukázali sme, že $f \circ T = f$ na $X \setminus M$. $\square$

Poznámka 6.12. V Leme 6.11(c) nemožno vynechať predpoklad o zachovávaní miery. Nech napr. $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{B} = 2^X$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{0\}) = 0$, $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(X) = 1$. Potom $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Nech $T(0) = 1$, $T(1) = 0$. Potom $T: X \rightarrow X$ je merateľné zobrazenie (ale nezachováva mieru μ). Nech $f(0) = 2019$ a $f(1) = 2020$. Potom f sa skoro všade rovná 2020, teda je to skoro konštantná funkcia. Nie je však skoro invariantná, pretože $f \circ T = f$ neplatí pre žiadne $x \in X$.

Sprehl'adni sa to, ak sa obmedzíme len na m.z. systémy.

6.3 Cvičenia a projekty

Cvičenie 6.1. Nech $T: X \rightarrow X$ je zobrazenie a nech $A \subseteq X$. Dokážte, že nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:

$$(1) T^{-1}(A) = A.$$

$$(2) T^{-1}(A) \subseteq A \text{ a } T(A) \subseteq A.$$

Cvičenie 6.2. Ak $T: X \rightarrow X$ je bijekcia, ukážte, že $A \subseteq X$ je invariantná množina (t.j. $T^{-1}(A) = A$) vtedy a len vtedy, keď $T(A) = A$.

Cvičenie 6.3. Dokážte Lemu 6.2.

Cvičenie 6.4. Dokážte Lemu 6.3.

Cvičenie 6.5. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém. Pripomeňme, že podľa Lemy 6.5 je vzor množiny plnej miery opäť množina plnej miery.

(1) Ak množina plnej miery má merateľný obraz, je potom aj ten obraz plnej miery?

(2) Je vzor množiny nulovej miery množina nulovej miery?

(3) Ak množina nulovej miery má merateľný obraz, je potom aj ten obraz nulovej miery?

Cvičenie 6.6. V dynamickom systéme (X, T) sme definovali orbitu $\text{Orb}_T(x)$ bodu x vzt'ahom (1.2). Definujme ešte tzv. Kuratowského orbitu bodu x :

$$\text{Korb}_T(x) := \{y \in X : (\exists m, n \geq 0)(T^m(y) = T^n(x))\}$$

alebo, ekvivalentne,

$$\text{Korb}_T(x) := \{y \in X : \text{Orb}_T(y) \cap \text{Orb}_T(x) \neq \emptyset\}.$$

Všimnite si, že $\text{Korb}_T(x) \supseteq \text{Orb}_T(x)$.

Nech teraz $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie, nie nutne mieru zachovávajúce. Nech f je merateľná funkcia. Dokážte, že ak f je invariantná funkcia pre T (t.j. ak je f konštantná pozdĺž trajektórií), tak f je konštantná na každej Kuratowského orbite.

Cvičenie 6.7. Dokážte analóg Lemy 6.8 pre podmienku $f(Tx) \geq f(x)$ namiesto podmienky $f(Tx) = f(x)$ (teda skúmajte *reálne* funkcie f neklesajúce pozdĺž trajektórií).

Cvičenie 6.8. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém a nech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je merateľná funkcia. Dokážte, že ak f je neklesajúca pozdĺž trajektórií, tak f je μ -skoro konštantná pozdĺž trajektórií (t.j. pre μ -skoro každé $x \in X$ je $f(Tx) = f(x)$).

Kapitola 7

Ergodičnosť

7.1 Definícia ergodičnosti. Súvis s invariantnými množinami a invariantnými funkciami

Majme merateľné zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ (obvykle sa predpokladá, že zachováva mieru, ale zatiaľ taký predpoklad nepotrebuje).

Ak nás zaujíma dynamika v systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, tak by nám uľahčilo prácu, keby bol systém rozložiteľný v tom zmysle, že by sa množina X dala rozložiť na dve disjunktné, navzájom neinteragujúce časti (pozri Obr. 7.1):

$$X = A \sqcup B, \quad \text{pričom} \quad T(A) \subseteq A, \quad T(B) \subseteq B. \quad (7.1)$$

Naozaj, v takomto prípade by sme mohli osobitne skúmať dynamiku $T|_A$ a $T|_B$ (σ -algebru $\mathcal{B}$ aj mieru μ môžeme tiež zúžiť raz na A , raz na B). Namiesto jedného zložitejšieho systému by sme skúmali dva jednoduchšie. Keďže však v teórii miery nás takmer všetko zaujíma “až na množinu miery nula”, našu úlohu sme si v podstate nezjednodušili, ak by niektorá z množín A , B mala nulovú mieru. Preto systém považujeme za *rozložiteľný* až vtedy, keď v (7.1) navyše platí

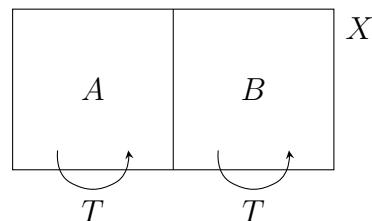
$$\mu(A) > 0, \quad \mu(B) > 0.$$

Systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, ktorý je *nerozložiteľný* v horeuvedenom zmysle (teda štúdium jeho dynamiky si nemôžeme zjednodušiť rozkladom na dva neinteragujúce podsystemy s kladnými mierami), sa nazýva *ergodický*.

Definícia 7.1. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie. Systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ sa nazýva *ergodický*, ak je nerozložiteľný v tom zmysle, že sa X nedá vyjadriť v tvare

$$X = A \sqcup B, \quad \text{kde} \quad \mu(A) > 0, \mu(B) > 0 \quad \text{a} \quad T(A) \subseteq A, T(B) \subseteq B.$$

V takom prípade tiež hovoríme, že miera μ je *ergodická* pre T alebo že zobrazenie T je *ergodické* vzhľadom na μ .



Obr. 7.1: Rozklad systému na dve neinteragujúce časti

Poznámka 7.2. V mnohých knihách z ergodickej teórie sa ergodičnosť definuje len pre mieru zachovávajúce zobrazenia, resp. len pre invariantné miery. Nie je to však nutné a možno hovoriť aj o ergodických mierach, ktoré nie sú T -invariantné. Väčšinou nás však bude zaujímať ergodičnosť pre invariantné miery.

Veta 7.3 (Ekvivalentné definície ergodičnosti – invariantné množiny). *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(1) *Systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je ergodický.*

(2) *Každá invariantná množina pre T má nulovú mieru alebo plnú mieru.*

Ak navyše T zachováva mieru μ , tak aj nasledujúca podmienka je s nimi ekvivalentná.

(3) *Každá skoro invariantná množina pre T má nulovú mieru alebo plnú mieru.*

Skôr než vetu dokážeme, pripomeňme, že (2) a (3) v danom poradí znamenajú toto:

(2') Ak $A \in \mathcal{B}$ a $T^{-1}(A) = A$, tak $\mu(A) = 0$ alebo $\mu(X \setminus A) = 0$.

(3') Ak $A \in \mathcal{B}$ a $T^{-1}(A) = A \bmod \mu$, tak $\mu(A) = 0$ alebo $\mu(X \setminus A) = 0$.

Ergodičnosť teda znamená, že neexistujú netriviálne invariantné (skoro invariantné) množiny.

Dôkaz. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Nech platí (1) ale nech existuje taká množina $A \in \mathcal{B}$, že $T^{-1}(A) = A$ a $\mu(A) > 0$ aj $\mu(X \setminus A) > 0$. Potom, ak položíme $B = X \setminus A$, máme rozklad $X = A \sqcup B$, $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$. Keďže predpokladáme $T^{-1}(A) = A$, Lema 6.1(2) $\Rightarrow$ (1) dáva $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Teda T nie je ergodický, čo je spor s (1).

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Nech platí (2) ale nech systém nie je ergodický, teda existuje rozklad $X = A \sqcup B$, kde $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ a $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Podľa Lemy 6.1(1) $\Rightarrow$ (2) je merateľná množina A invariantná. Keďže má kladnú mieru a aj jej komplement má kladnú mieru, dostávame spor s (2).

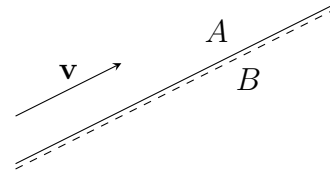
Predpokladajme odteraz, že T zachováva mieru μ .

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Nech platí (2) ale nech existuje skoro invariantná množina $A \in \mathcal{B}$, ktorá má kladnú ale nie plnú mieru. Potom podľa Propozície 6.7 existuje invariantná množina $M \in \mathcal{B}$, ktorá má tú istú mieru ako A , teda kladnú ale nie plnú. To je spor s (2).

$\boxed{(3) \Rightarrow (2)}$ Toto platí triviálne, dokonca aj bez predpokladu, že μ je invariantná, lebo každá invariantná množina je skoro invariantná. $\square$

Príklad 7.4 (Lebesguova miera v rovine nie je ergodická pre posunutie). Lebesguova miera v rovine je invariantná pre posunutie (pozri Príklad 4.3). Ukážeme, že nie je ergodická.

Rovinu možno totiž pomocou priamky rovnobežnej s vektorom $\mathbf{v}$ posunutia rozložiť na dve polroviny (uzavretú A a otvorenú B), ktoré sa zobrazujú do seba a obe majú kladnú (nekonečnú) mieru. Podľa definície ergodičnosti systém nie je ergodický. Iný dôkaz: Vezmeme len jednu z tých dvoch polrovín a uvedomíme si, že je invariantná (jej vzor je ona sama) a pritom nemá ani nulovú ani plnú mieru. Potom podľa Vety 7.3 systém nie je ergodický.

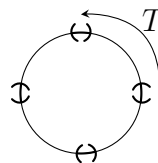


Obr. 7.2: Neergodičnosť posunutia roviny

Modifikujte dôkaz pre prípad, keď je vektor posunutia nulový, teda ide o identitu. Zovšeobecnite do vyšších dimenzií. Všimnite si, že posunutie na priamke si vyžaduje iný dôkaz.

Príklad 7.5 (Racionálne rotácie kružnice nie sú ergodické). V Príklade 4.19 sme videli, že rotácie kružnice zachovávajú Lebesguovu mieru.

Ak je rotácia kružnice racionálna, každý bod je periodický s tou istou periódou q . Potom ak vezmeme orbitu malého (!) okolia jedného bodu, dostaneme množinu A pozostávajúcu z q rovnako dlhých oblúkov (na Obr. 7.3 je situácia znázornená pre otočenie o 90° , vtedy je $q = 4$). Množina A sa zobrazuje do seba, má kladnú mieru a aj jej komplement B sa zobrazuje do seba a má kladnú mieru (ak sme zvolili okolie bodu naozaj malé). To znamená, že zobrazenie nie je ergodické.



Obr. 7.3: Neergodičnosť racionálnej rotácie

Príklad 7.6 (Diracova miera v pevnom bode je ergodická). Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie a nech $T(p) = p$, t.j. p je pevný bod pre T . Potom Diracova miera δ_p je invariantná a zrejme ergodická pre T . Poznamenajme, že ak p nie je pevný bod zobrazenia T , tak δ_p nie je invariantná, ale stále je ergodická. Priestor X totiž vôbec nemožno rozložiť na dve disjunktné množiny s kladnými mierami.

Príklad 7.7 (Miera sediaca v periodickej orbite je ergodická). Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie a nech miera μ je sústredená v periodickej orbite. Potom ako vieme je invariantná, ak váhy jednotlivých bodov v tej orbite sú rovnaké a nie je invariantná, ak nie sú rovnaké. V každom prípade však je ergodická, lebo ak $T^{-1}(A) = A$, tak buď A neobsahuje žiaden bod tej orbity a potom $\mu(A) = 0$ alebo A obsahuje nejaký bod tej orbity a teda celú tú orbitu (vysvetlite) a potom $\mu(X \setminus A) = 0$.

Horeuvedené príklady boli jednoduché. Vo všeobecnosti sa však ergodičnosť overuje ťažko. Také príklady uvidíme neskôr.

Veta 7.3 ukazovala, že ergodičnosť sa dá ekvivalentne definovať pomocou pojmu (skoro) invariantnej množiny. Ukážeme, že sa dá ekvivalentne definovať aj pomocou pojmu tzv. (skoro) invariantnej funkcie. Vysvitne, že ergodičnosť je ekvivalentná s tým, že neexistujú netriviálne (skoro) invariantné funkcie.

Veta 7.8 (Ekvivalentné definície ergodičnosti – invariantné funkcie).¹ Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou² a nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie zachovávajúce mieru μ . Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

- (1) Systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je ergodický.
- (2) Každá merateľná invariantná funkcia f je s.v. konštantná.
- (3) Každá merateľná skoro invariantná funkcia f je s.v. konštantná.

Ak navyše X je priestor s konečnou mierou, tak aj nasledujúce podmienky sú s nimi ekvivalentné.

- (4) Každá integrovateľná (t.j. patriaca do $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$) invariantná funkcia f je s.v. konštantná.

¹Aby sme skrátili znenie vety, neformulujeme podmienky s funkciou f zvlášť pre reálne a zvlášť pre komplexné funkcie. Dúfame, že nedôjde k nedorozumeniu ak namiesto dvoch podmienok píšeme len jednu, bez špecifikácie, či hovoríme o reálnych alebo komplexných funkciách (máme tak šesť podmienok (2) až (7), hoci každá z nich sa dá sformulovať pre funkcie $X \rightarrow \mathbb{R}$ alebo pre funkcie $X \rightarrow \mathbb{C}$, takže by sme po správnosti mali namiesto o týchto 6 podmienkach hovoriť o 12 podmienkach ekvivalentných s ergodičnosťou).

²V ergodickej teórii predpokladáme, že $\mu(X) > 0$. Inak by celá teória bola v podstate “o ničom”. V dôkaze to využívame.

- (5) Každá integrovateľná (t.j. patriaca do $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$) skoro invariantná funkcia f je s.v. konštantná.
- (6) Každá invariantná funkcia $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ je s.v. konštantná.
- (7) Každá skoro invariantná funkcia $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ je s.v. konštantná.

Dôkaz. Budeme predpokladať, že f je vždy reálna funkcia. Ak je f komplexná funkcia, stačí osobitne uvažovať jej reálnu a komplexnú časť.

(1) $\Rightarrow$ (3) Nech T je ergodické a nech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je merateľná funkcia, pre ktorú $f \circ T = f$ μ -s.v. Ideme dokázať, že f je μ -s.v. konštantná.

Chceli by sme teda nájsť množinu plnej miery, na ktorej je f konštantná. Urobíme to tak, že pre každé n nájdeme množinu plnej miery, na ktorej má f osciláciu $\leq 1/2^n$ a potom vezmeme prienik týchto množín.

Pre $k \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$ definujme (pozri aj Obr. 7.4)

$$X_n^k = \left\{ x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\} = f^{-1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right).$$

Obr. 7.4: Na množine X_n^k sa hodnoty funkcie f líšia o menej ako $1/2^n$. Pre veľké n sa teda na takej množine funkcia f nevelmi líši od konštantnej funkcie.

Keďže f je merateľná, $X_n^k \in \mathcal{B}$. Tvrdíme, že

$$X_n^k \triangle T^{-1}(X_n^k) \subseteq \{x \in X : f(Tx) \neq f(x)\}. \quad (7.2)$$

Naozaj:

- Ak $x \in X_n^k \setminus T^{-1}(X_n^k)$, tak $x \in X_n^k$ a $T(x) \notin X_n^k$. To znamená, že $f(x)$ patrí a $f(Tx)$ nepatrí do intervalu $[k/2^n, (k+1)/2^n)$. Preto $f(x) \neq f(Tx)$.
- Ak $x \in T^{-1}(X_n^k) \setminus X_n^k$, tak $T(x) \in X_n^k$ a $x \notin X_n^k$ a zase $f(x) \neq f(Tx)$.

Podľa predpokladu má množina na pravej strane (7.2) nulovú mieru, preto je množina X_n^k skoro invariantná. Podľa Vety 7.3 však v ergodickom systéme má každá skoro invariantná množina nulovú mieru alebo plnú mieru. Teda

$$\mu(X_n^k) = 0 \quad \text{alebo} \quad \mu(X \setminus X_n^k) = 0.$$

Zároveň však, pre každé fixované n , je $X = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} X_n^k$. Ide o disjunktné zjednotenie, takže $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(X_n^k) = \mu(X) > 0$. Preto pre každé n existuje práve jedno k_n tak, že $X_n^{k_n}$ má plnú mieru. Potom však má plnú mieru aj množina

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^{k_n}.$$

Tvrdíme, že funkcia f je na množine Y konštantná. Naozaj, nech $x, y \in Y$. Potom pre každé n je $x, y \in X_n^{k_n}$, a teda $f(x), f(y) \in [k_n/2^n, (k_n+1)/2^n)$. Potom $|f(x) - f(y)| < 1/2^n$ a keďže toto platí pre každé n , tak $f(x) = f(y)$. Dokázali sme tak, že f je skoro všade konštantná.

$(3) \Rightarrow (2)$ Toto je triviálne.

$(2) \Rightarrow (1)$ Nech (2). Predpokladajme, že by T nebolo ergodické. Potom existuje rozklad $X = A \sqcup B$, kde $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ a $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Potom funkcia f rovná 1 na A a rovná 0 na B (teda charakteristická funkcia množiny A) je konštantná pozdĺž každej trajektórie, teda je invariantná pre T (f je merateľná, lebo A je merateľná). Funkcia f však nie je konštantná μ -s.v., čo je spor s (2).

Nech teraz $\mu(X) < \infty$. Potom $L_2(\mu) \subseteq L_1(\mu)$. Okrem toho, každá funkcia z $L_1(\mu)$ je automaticky merateľná. Preto platia implikácie $(3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6)$ aj $(5) \Rightarrow (7) \Rightarrow (6)$. Na ukončenie dôkazu teda stačí dokázať (stále za predpokladu $\mu(X) < \infty$), že $(6) \Rightarrow (1)$.

$(6) \Rightarrow (1)$ Dôkaz je rovnaký ako dôkaz implikácie $(2) \Rightarrow (1)$, treba len využiť, že charakteristická funkcia merateľnej množiny A na priestore s konečnou mierou patrí do $L_2(\mu)$. To je zrejmé, lebo ak $A \in \mathcal{B}$, tak $(\chi_A)^2 = \chi_A$ a teda $\int |(\chi_A)^2| d\mu = \int \chi_A d\mu = \mu(A) \leq \mu(X) < \infty$. □

Poznámka 7.9. Možno nahliadnuť, že do vety by sa dali pridať aj podmienky, v ktorých vystupujú priestory L^p , $p \geq 1$ (porovnaj s Poznámkou 4.23). My sme do vety okrem L^1 vybrali už len L^2 . To má špeciálny význam. Skutočnosť, že na dôkaz ergodičnosti T (na priestore s konečnou mierou) stačí implikáciu

$$f \circ T = f \text{ na } X \Rightarrow f \text{ je konštantná s.v.}$$

overiť len pre funkcie $f \in L^2$ znamená, že môžeme využiť L^2 Fourierove rady. To často uľahčuje dôkaz ergodičnosti, pozri Sekciu 8.2.

7.2 Ergodičnosť a metrická tranzitívnosť

Pojem veľmi blízky k ergodičnosti je metrická (alebo mierová) tranzitívnosť.

Definícia 7.10. Merateľné zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ sa nazýva *metricky (mierovo) tranzitívne* vzhľadom na μ , ak pre každé dve množiny A, B s kladnými mierami existuje $n \geq 1$ tak, že $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$.³

Dobré je si uvedomiť, že

$$T^n(A) \cap B \neq \emptyset \iff (\exists x \in A)(T^n(x) \in B) \iff A \cap T^{-n}(B) \neq \emptyset.$$

Lema 7.11. *Metrická tranzitívnosť implikuje aj rekurentnosť aj ergodičnosť.*

Dôkaz. Použijeme skratky MT, REK, ERG.

$\boxed{\text{MT} \Rightarrow \text{REK}}$ Stačí v definícii metrickej tranzitívnosti zvoliť $B = A$.

$\boxed{\text{MT} \Rightarrow \text{ERG}}$ Predpokladajme, že T je metricky tranzitívne ale nie ergodické. Potom existuje taký rozklad $X = A \sqcup B$, že $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$ a $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$. Potom však množina

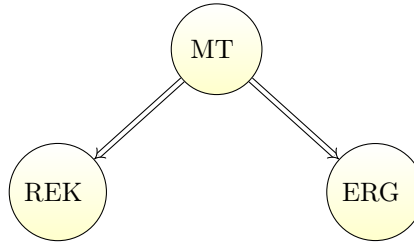
³Ide o analógiu topologickej tranzitívnosti. V topologickej dynamike, ak X je metrický (alebo, všeobecnejšie, topologický) priestor a $T: X \rightarrow X$ je spojité zobrazenie, tak hovoríme, že T je topologicky tranzitívne, ak pre každé dve neprázdne otvorené množiny A, B existuje $n \geq 1$ tak, že $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

A pri iterovaní nikdy nepretne množinu B , čo je spor s metrickou tranzitívnosťou (tá vyžaduje existenciu $n \geq 1$, pre ktoré $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$). $\square$

Príklad 7.12 (Žiadne ďalšie implikácie medzi MT, REK, ERG). Medzi tromi vlastnosťami MT, REK, ERG môžeme skúmať 6 implikácií. Predchádzajúca lema ukazuje, že obe implikácie “vychádzajúce z MT” sú pravdivé. Teraz ukážeme, že už žiadna iná implikácia neplatí, a to ani v prípade, že miera je invariantná *alebo* konečná.

- (a) Identita na $[0, 1]$ má vzhľadom na Lebesguovu mieru (ktorá je invariantná a dokonca zároveň konečná) vlastnosť REK, ale zrejme nemá vlastnosti MT, ERG.
- (b) Zobrazenie $n \mapsto n+1$ na $\mathbb{Z}$ so sčítacou mierou na $2^{\mathbb{Z}}$ (ktorá je zrejme invariantná a σ -konečná, ale nie konečná) má vlastnosť ERG (lebo jediné invariantné množiny sú $\emptyset$ a $\mathbb{Z}$), ale nemá vlastnosti MT, REK (lebo $\mu(\{1\}) = 1 > 0$ ale $T^n(\{1\}) \cap \{1\} = \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$).
- (b') Podobne zobrazenie $n \mapsto n+1$ na $\mathbb{Z}$ s mierou definovanou na $2^{\mathbb{Z}}$ tak, že $\mu(\{n\}) = 1/(n^2+1)$ a teda $\mu(A) = \sum_{n \in A} 1/(n^2+1)$ pre $A \subseteq \mathbb{Z}$ (táto miera je konečná ale nie invariantná; vysvetlite) má vlastnosť ERG, ale nemá vlastnosti MT, REK.⁴

Výsledky z Lemy 7.11 a z Príkladu 7.12 možno prehľadne znázorniť vo forme diagramu ako na Obrázku 7.5.



Obr. 7.5: Súvis medzi metrickou tranzitívnosťou (MT), rekurentnosťou (REK) a ergodičnosťou (ERG). Žiadna ďalšia implikácia neplatí

Vieme už, že $MT \Rightarrow (REK \text{ a } ERG)$ a že žiadna z vlastností REK, ERG *samotná* neimplikuje MT. Ja zaujímavé, že REK a ERG *spoločne* sú už dosť silné na to, aby implikovali MT. Naozaj, nasledujúca veta okrem iného hovorí, že $MT \iff (REK \text{ a } ERG)$. Táto veta zároveň pomôže odpovedať aj na otázku, ktorá vyvstáva v súvislosti s Príkladom 7.12, aký je súvis medzi MT, REK, ERG v prípade, že miera je invariantná *a zároveň* konečná.

Veta 7.13 (Ekvivalentné definície rekurentnosti a ergodičnosti, resp. ergodičnosti). Pre merateľné zobrazenie $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné.

- (1) T je rekurentné a ergodické.
- (2) Ak $\mu(A) > 0$, tak množina A_{∞}^X je plnej miery.⁵

⁴Uvedieme iný príklad s týmito vlastnosťami. Uvažujme o funkcii $f(x) = cx(1-x)$ na intervale $[0, 1]$, pričom $c = 3,67857\dots$ je zvolené tak, že bod $1/2$ (tzv. kritický bod, derivácia v ňom je nula) sa za tri iterácie (ale nie skôr) dostane do kladného pevného bodu funkcie. Lebesguova miera na $[0, 1]$ je konečná ale nie invariantná pre f . Z hlbokých výsledkov intervalovej dynamiky vyplýva, že zobrazenie f je ergodické. Je však zrejme, že nemá vlastnosti MT, REK, pretože interval $f([0, 1])$ je disjunktný s (ľavým) okolím bodu 1 (čo je množina s kladnou mierou).

⁵T.j. skoro každý bod z X vojde do A nekonečne veľa krát.

(3) Ak $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, tak existujú ľubovoľne veľké časy n tak, že $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$.⁶

(4) T je metricky tranzitívne.⁷

Navyše, ak T zachováva mieru μ a μ je konečná, tak aj nasledujúce tvrdenie je ekvivalentné s predchádzajúcimi.

(5) T je ergodické.

Dôkaz. Keďže podľa predpokladu je T merateľné a aj A a B sú merateľné, sú merateľné aj ostatné množiny vystupujúce vo vete: $A \cap T^{-n}(B)$ a A_∞^X (merateľnosť A_∞^X sme zdôvodnili už v dôkaze Propozície 6.7). Budeme ešte používať množinu

$$A_\infty^A = A \cap A_\infty^X$$

tých bodov z A , ktoré nekonečne veľa krát vojdú do A . Je zrejmé, že aj tá je merateľná.

(1) $\Rightarrow$ (2) Nech platí (1), t.j. nech T je rekurentné a ergodické. Nech $\mu(A) > 0$. Chceme ukázať, že množina A_∞^X je plnej miery. Urobíme to v dvoch krokoch.

- Najskôr dokážeme, že A_∞^X je kladnej miery.

Platí

$$A_\infty^X \supseteq A_\infty^A.$$

Keďže predpokladáme rekurentnosť, podľa Poincarého vety o rekurencii v silnej forme (pozri Vetu 5.4), je množina A_∞^A plnej miery v A . Keďže A je kladnej miery, vyplýva z toho, že aj A_∞^A je kladnej miery. Potom však aj väčšia množina A_∞^X je kladnej miery.

- Teraz už dokážeme, že A_∞^X je plnej miery.

Podľa Lemy 6.6 je množina A_∞^X invariantná pre T a keďže už vieme, že je kladnej miery, predpoklad ergodičnosti zobrazenia T implikuje, že je plnej miery (pozri Vetu 7.3).

(2) $\Rightarrow$ (3) Nech platí (2). Nech $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ a nech $N \in \mathbb{N}$. Potrebujeme dokázať, že pre nejaké $n \geq N$ je $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$. Označme

$$B_{(n)}^A := A \cap T^{-n}(B).$$

Je to množina tých bodov z A , ktoré vojdú do B v čase n (a možno aj v iných časoch) a je zrejme merateľná pre akékoľvek n .

Podľa predpokladu (2) skoro každý bod z X vojde do B nekonečne veľa krát. Špeciálne, potom aj skoro každý bod z A vojde do B nekonečne veľa krát. Inak povedané, existuje taká množina $M \subseteq A$, že $\mu(A \setminus M) = 0$ a každý bod z M vojde do B nekonečne veľa krát, teda určite aj v časoch $\geq N$. Z toho vyplýva, že

$$M \subseteq B_{(N)}^A \cup B_{(N+1)}^A \cup B_{(N+2)}^A \cup \dots$$

Keďže M je plnej miery v A a A je kladnej miery, tak M je kladnej miery. Preto aj

$$\mu(B_{(N)}^A \cup B_{(N+1)}^A \cup B_{(N+2)}^A \cup \dots) > 0$$

⁶T.j. množina tých bodov z A , ktoré vojdú do B v čase n , je kladnej miery.

⁷T.j. ak $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, tak existuje také $n \geq 1$, že $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$ alebo, ekvivalentne, $A \cap T^{-n}(B) \neq \emptyset$.

a zo σ -subaditívnosti miery vyplýva, že existuje $n \in \{N, N+1, N+2, \dots\}$, pre ktoré je

$$\mu(B_{(n)}^A) > 0.$$

To sme práve potrebovali dokázať.

(3) $\Rightarrow$ (4) Predpokladáme (3). Nech $\mu(A) > 0, \mu(B) > 0$. Podľa (3) existujú ľubovoľne veľké časy, teda aj čas $n \geq 1$, pre ktorý je $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$. Potom je určite $A \cap T^{-n}(B) \neq \emptyset$, odkiaľ $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$. Dostali sme (4).

(4) $\Rightarrow$ (1) Toto sme už dokázali v Leme 7.11.

Predpokladajme teraz navyše, že T zachováva konečnú mieru μ .

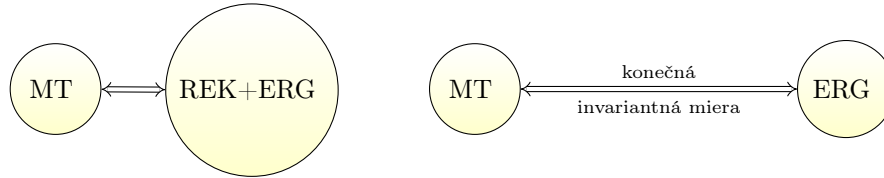
(1) $\Rightarrow$ (5) Toto je triviálne (dokonca aj bez dodatočného predpokladu, že μ je T -invariantná a konečná).

(5) $\Rightarrow$ (1) Nech platí (5), čiže nech T je ergodické. Keďže T zachováva konečnú mieru μ , podľa Poincarého vety o rekurencii v slabej forme (pozri Vetu 5.2) je T rekurentné. Platí teda aj (1). $\square$

Časť Vety 7.13 uveďme ešte v tvare dôsledku. Ten ukazuje, že v prípade invariantnej konečnej miery si ergodičnosť môžeme predstavovať tak, že z každej množiny kladnej miery sa vieme dostať do každej množiny kladnej miery v nejakom kladnom čase.

Dôsledok 7.14. *Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ . Potom T je ergodické vtedy a len vtedy, keď je metricky tranzitívne.*

Najdôležitejšiu ekvivalenciu z Vety 7.13 a ekvivalenciu z Dôsledku 7.14 môžeme znázorniť nasledujúcim diagramom.



Obr. 7.6: Rekurentnosť a ergodičnosť dohromady sú ekvivalenté s metrickou tranzitívnosťou. V prípade konečnej invariantnej miery je dokonca samotná ergodičnosť to isté ako metrická tranzitívnosť

7.3 Kacova veta pre ergodické systémy

Ako sme sľúbili v Poznámke 5.15, ukážeme, že pre ergodické (a konečnú mieru zachovávajúce) systémy je pre body množiny A stredný čas ich prvého návratu do množiny A nepriamo úmerný miere množiny A .

Dôsledok 7.15 (Kacova veta pre ergodické systémy zachovávajúce konečnú mieru). *Ak v Kacovej vete pre systémy zachovávajúce konečnú mieru (pozri Vetu 5.14) je zobrazenie T navyše ergodické, tak $\mu(A_\infty^C) = 0$. V takom prípade je*

$$\int_A t_A d\mu = \mu(X) \quad \text{a teda} \quad (t_A)_{\text{str}} = \frac{1}{\mu(A)} \int_A t_A d\mu = \frac{\mu(X)}{\mu(A)}.$$

Dôkaz. Keďže miera μ je konečná, tak podľa Vety 7.13, resp. jej Dôsledku 7.14, je T metricky tranzitívne. Potom je však zrejmé, že $\mu(A_\infty^C) = 0$. Naozaj, nech $\mu(A_\infty^C) > 0$ (chceme odvodiť spor). Ak využijeme, že aj $\mu(A) > 0$, tak podľa Definície 7.10 existuje bod $x \in A_\infty^C$ a taký čas $n \geq 1$, že $T^n(x) \in A$. To je spor s tým, že body z A_∞^C nikdy nevojdú do A (pozri definíciu množiny A_∞^C v Sekcii 5.3). $\square$

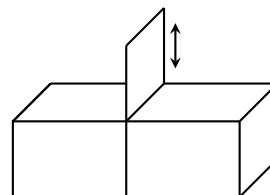
Pozrite tiež Poznámku 10.3.

Poznámka 7.16 (Zermelov paradox). Majme v nádobe konečného objemu N molekúl plynu. Stav tohto systému možno opísať tak, že pre každú molekulu určíme polohu (3 súradnice polohového vektora) a hybnosť (opäť 3 súradnice vektora hybnosti). Na to potrebujeme dohromady 6 čísel. Pre N molekúl potrebujeme $6N$ čísel. Keďže stav systému je určený $6N$ číslami, možno to povedať aj tak, že je určený bodom vo fázovom (stavovom) priestore $X = \mathbb{R}^{6N}$. Systém sa vyvíja v spojitom čase, ale môžeme si ho všímať v diskretných okamihoch, vždy po uplynutí jednej jednotky času, napr. sekundy – dostaneme tak diskretný dynamický systém. Predpokladajme, ako sa to robí v klasickej štatistickej mechanike, že sa systém vyvíja podľa deterministických fyzikálnych zákonov klasickej mechaniky. Teda jeho vývoj je opísaný tzv. Hamiltonovými rovnicami, ide o tzv. hamiltonovský systém.

Ak poznáme počiatočný stav systému (bod v priestore X), tak vývoj systému je jednoznačne určený týmito zákonmi a celú históriu systému – jeho minulosť, prítomnosť aj budúcnosť – možno reprezentovať ako úplnú trajektóriu v priestore X . V praxi je ale prakticky nemožné, aby sme mali dosť informácií na takéto úplné určenie stavu systému a jeho vývoja.⁸ Základná myšlienka štatistickej mechaniky, pochádzajúca od Gibbsa, je vzdať sa deterministického opisu vývoja *jedného* stavu (t.j. opisu trajektórie jedného bodu fázového priestoru X) a namiesto toho, aby sme sa pýtali “aký bude stav systému v čase t ”, sa pýtame, “aká je pravdepodobnosť, že v čase t bude stav systému patriť do danej podmnožiny fázového priestoru X ”. Dôležité sú hlavne otázky týkajúce sa asymptotického vývoja, t.j. “čo sa (pravdepodobne) stane so systémom, ak čas ide do $+\infty$ ”.

Podľa tzv. Liouvilleovej vety zo štatistickej mechaniky sa vie, že každý uzavretý hamiltonovský systém v konečnom objeme má konečnú invariantnú mieru (nejde o mieru, ktorá meria geometrický objem, napr. v našom prípade zohľadňuje nielen súradnice ale aj hybnosti molekúl plynu). Pre také systémy teda platí Poincarého veta o rekurencii.

Predstavme si teraz, že v našej nádobe s plynom máme prepážku uprostred a všetok plyn je len v ľavej časti, v spomínanom počte N molekúl. Odstránime prepážku. V tom okamihu (v čase 0) je všetok plyn v ľavej časti. Jeho stav je určený $6N$ číslami, teda bodom v priestore X . Existuje ale veľa bodov v X , ktoré zodpovedajú tomu, že všetok plyn je v ľavej časti – tieto body tvoria v X množinu A . Z tvaru spomínanej invariantnej miery fyzici vedia, že miera množiny A je kladná. Je však nesmierne malá, ak N je veľmi veľké.⁹



Obr. 7.7: Všetok plyn je v ľavej časti. Potom vytiahneme prepážku.

⁸Napr. N býva veľmi veľké (za normálnych okolností 1 cm^3 plynu obsahuje nejakých 10^{20} molekúl) a okrem toho, dokonca aj v prípade, keby bolo N malé, je problém v danom počiatočnom čase zmerať tých $6N$ čísel, nehovoriac už o tom, že každé meranie je zaťažené chybou a drobná chyba v počiatočných podmienkach môže viesť k dramaticky odlišným vývojom (trajektóriám), teda systém môže byť v tomto zmysle chaotický.

⁹To je dosť zrejme aj bez toho, aby sme zachádzali do fyzikálnych detailov. Predstavte si, že máme N molekúl, z ktorých každá sa v danom čase nachádza s pravdepodobnosťou $1/2$ v ľavej polovici nádoby a s pravdepodobnosťou $1/2$ v pravej polovici (objem tu interpretujeme ako pravdepodobnosť a niet fyzikálneho dôvodu na to, aby niektorá z dvoch polovíc nádoby bola niektorou molekulou

Vieme, čo sa po odstránení prepážky stane – plyn sa rozšíri do celého objemu nádoby. Zdá sa nemožné, aby sa po čase zase všetkých N molekúl nakopilo vľavo, teda aby sa bod (stav, $6N$ -tica) z A , s ktorým sme začínali, zase vrátil do A . Vďaka Poincarého vete o rekurencii však vieme, že pre skoro každý bod z A (teda s pravdepodobnosťou 1 je to tak aj v našom pokuse, lebo s pravdepodobnosťou 1 ten náš bod z množiny A patrí do príslušnej množiny plnej miery v A) platí, že sa nekonečne veľa krát vráti do A . Inak povedané, v našom pokuse sa s pravdepodobnosťou 1 stane to, že všetok plyn sa znovu raz nahromadí v ľavej časti nádoby.

Toto sa dlho považovalo za paradox, veď to odporuje intuícii a nikto to ešte nepozoroval.¹⁰ V skutočnosti to až taký paradox nie je, veď to, že sa niečo stane s pravdepodobnosťou 1, ešte nič nehovorí o *čase*, kedy sa to stane. Ako sme už povedali, celý fázový priestor X má konečnú kladnú mieru (hovoríme o tej invariantnej miere). Množina A , teda množina všetkých tých stavov, ktoré zodpovedajú situáciám, kedy je všetok plyn v ľavej časti, má síce kladnú mieru, ale nesmierne malú, lebo N je v praxi veľmi veľké. Preto možno predpokladať, že očakávaný čas prvého návratu do množiny A je obrovský (dlhší ako vek vesmíru). Keby sme vedeli, že náš systém je aj ergodický vzhľadom na spomínanú invariantnú mieru (a pokiaľ sa vie, plyn v nádobe je vzhľadom na spomínanú invariantnú mieru ergodický systém, alebo aspoň ‘skoro’ ergodický), mali by sme to aj teoreticky podložené Kacovou vetou. Podľa nej je očakávaný čas prvého návratu do množiny A obrovský, lebo množina A má veľmi malú kladnú mieru.¹¹

7.4 Cvičenia a projekty

Cvičenie 7.1. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $T(x) = x^2$. Pomocou vhodného rozkladu $[0, 1] = A \sqcup B$ ukážte, že Lebesguova miera na borelovských množinách nie je ergodická pre T . (Pozrite aj Cvičenie 4.1.)

Cvičenie 7.2. Vyšetrite ergodičnosť zobrazení:

- (a) $T(x) = x + 1$ na priestore $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, \mu)$, kde μ je sčítacia miera (teda $\mu(A)$ je počet prvkov množiny A).
- (b) $T(x) = x + 1$ na priestore $\mathbb{R}$ s Lebesguovou mierou.
- (c) $T(x) = x + 2$ na priestore $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, \mu)$, kde μ je sčítacia miera.

Cvičenie 7.3. Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie. Ak pre nejakú množinu $A \in \mathcal{B}$ je množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$ plnej miery (t.j. $\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)) = 0$), tak hovoríme, že množina A vyzametá alebo vysaje skoro celý priestor X , alebo že je to tzv. “sweep-out” množina. Dokážte, že vo Vete 7.13 je s podmienkami (1)–(4) ekvivalentná aj nasledujúca podmienka:

- Každá množina kladnej miery vyzametá skoro celý priestor X .

uprednostnená). Potom pravdepodobnosť, že všetkých N molekúl je v ľavej polovici, je $(1/2)^N$, čo je nesmierne malá kladná hodnota. Z toho sa dá usúdiť, že aj miera množiny A je nesmierne malá kladná. Veď systém sa nachádza v stave patriacom do množiny A práve vtedy, keď všetky molekuly sú v ľavej polovici a na tom, aké sú v tej chvíli ich momenty, vôbec nezáleží. Ak sa Vám takéto zdôvodnenie nezdá dost presvedčivé, máte ešte možnosť uspokojiť sa s tým, čo hovoria fyzici.

¹⁰Nepozoroval to však len preto, lebo v praxi je N veľmi veľké. Keby bolo N malé, dalo by sa to pozorovať. Stačí si predstaviť extrémny prípad $N = 1$. Ale aj keď N je rádovo v desiatkach, tak pravdepodobnosť, že všetky molekuly budú v ľavej polovici nie je až taká malá a uvedený jav by sa dal pozorovať. Napr. by sa to dalo modelovať pomocou počítača.

¹¹Asi by sme sa teda nemali obávať ani toho, že sa všetok vzduch v triede nakopí v niektorom z horných kútov miestnosti a my sa začneme dusiť, hoci podľa Vety 7.13(5) $\Rightarrow$ (2) resp. Vety 10.4(1) $\Rightarrow$ (3) sa to s pravdepodobnosťou 1 stane. Lenže z rovnakých dôvodov ako vyššie, potrvá nesmierne dlhý čas, kým sa to stane. Navyše, skôr ako by sme sa začali dusiť, vzduch by sa znovu rozptýlil po celej triede.

Cvičenie 7.4. Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie (nepredpokladáme zachovávanie miery). Pre funkciu $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uvažujme o funkcii

$$\bar{f}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$$

(časový priemer alebo priemer funkcie f pozdĺž trajektórie bodu $x \in X$). Dokážte, že ak pre každú funkciu f tvaru $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{B}$, takto definovaná funkcia $\bar{f}$ existuje a je konštantná skoro všade, tak zobrazenie T je ergodické.

Kapitola 8

Dôkazy ergodičnosti

Dokazovať ergodičnosť systému je vo všeobecnosti ťažké (výnimkou sú veľmi jednoduché systémy, pozri napr. Príklady 7.6 a 7.7). Uvedieme dva nástroje, ktoré niekedy pri dokazovaní ergodičnosti pomôžu. Sú to Lebesguova veta o hustote a Fourierove rady.

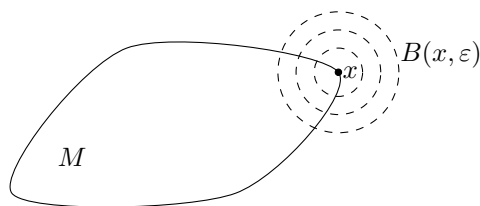
8.1 Lebesguova veta o hustote a dôkazy ergodičnosti

V niektorých prípadoch sa pri dôkaze ergodičnosti dá využiť tzv. Lebesguova veta o hustote.

Definícia 8.1. Nech Leb je d -rozmerná Lebesguova miera v $\mathbb{R}^d$. Symbolom $B(x, \varepsilon)$ označíme otvorenú guľu so stredom $x \in \mathbb{R}^d$ a polomerom ε . Nech $M \subseteq \mathbb{R}^d$ je lebesguovsky merateľná množina a nech $x \in \mathbb{R}^d$. Potom *hustotu množiny M v bode x* definujeme ako limitu (ak existuje)

$$d_x(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{Leb}(M \cap B(x, \varepsilon))}{\text{Leb}(B(x, \varepsilon))}. \quad (8.1)$$

Bod $x \in \mathbb{R}^d$ sa nazýva (*Lebesguov*) *bod hustoty pre množinu M* , ak $d_x(M) = 1$.¹



Obr. 8.1: K definícii hustoty množiny M v bode x

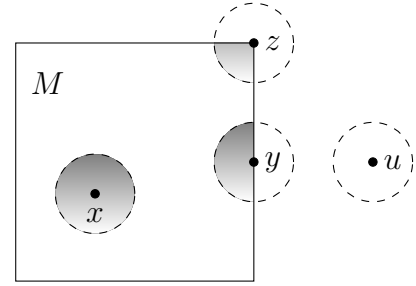
Teda x je bodom hustoty pre M , ak pre malé guľové okolia bodu x platí, že veľká časť takého okolia (v zmysle miery) je tvorená bodmi množiny M a pre $\varepsilon \rightarrow 0^+$ sa táto proporcia blíži k jednotke. Vnútorne body množiny $M \subseteq \mathbb{R}^d$ sú automaticky bodmi hustoty pre množinu M .

Príklad 8.2. Ak M je štvorec v rovine, tak hustota $d_x(M) = 1$ ak x je vnútorný bod štvorca, $d_y(M) = 1/2$ ak y leží na strane štvorca ale nie v jeho vrchole, $d_z(M) = 1/4$ ak z je vrcholom štvorca a $d_u(M) = 0$ ak u leží mimo štvorca, pozri Obr. 8.2.

¹Písmeno d v označení $d_x(M)$ pochádza z anglického slova density (hustota). V definícii nepožadujeme, aby x patrilo do M . Napriek tomu sa často hovorí “bod hustoty množiny M ” namiesto správnejšieho “bod hustoty pre množinu M ”. Je to podobný problém ako s hromadnými bodmi množiny M (tiež by bolo správnejšie vraviť o hromadných bodoch pre množinu M).

Skutočnosť, že skoro každý bod štvorca M je jeho bodom hustoty, nie je náhoda. Podľa tzv. Lebesguovej vety o hustote, ktorú o chvíľu sformulujeme, to platí pre každú množinu $M \subseteq \mathbb{R}^d$ kladnej Lebesguovej miery, nech by už tá množina bola akokoľvek ‘deravá’ (napr. to môže byť Cantorova množina kladnej miery).

Všimnime si ešte, že v tomto príklade všetky body hustoty pre štvorec M sú bodmi M . Ak však $M^* = M \setminus \{c\}$ kde c je stred štvorca M , tak $c \notin M^*$ ale c je bodom hustoty pre M^* .



Obr. 8.2: Hustota štvorca v bode môže byť len 1, 1/2, 1/4 alebo 0

Veta 8.3 (Lebesguova veta o hustote). *Nech $M \subseteq \mathbb{R}^d$ je lebesguovsky merateľná množina a nech Leb je d -rozmerná Lebesguova miera. Potom Leb -skoro každý bod množiny M je bodom hustoty množiny M (a teda ak $\text{Leb}(M) > 0$, tak v množine M naozaj existujú body hustoty množiny M).*

Vetu nebudeme dokazovať, budeme ju však používať.

Príklad 8.4. Množina všetkých iracionálnych čísel ako aj ‘tučná’ Cantorova množina (t.j. Cantorova množina s kladnou Lebesguovou mierou) majú prázdne vnútra v priestore $\mathbb{R}$, avšak podľa Lebesguovej vety o hustote majú veľa bodov hustoty.

Sformulujeme jednoduchý dôsledok Lebesguovej vety o hustote (sformulujeme ho v dimenzii 1, ale analogické tvrdenie platí v dimenzii d).

Dôsledok 8.5. *Nech $M \subseteq \mathbb{R}$ je lebesguovsky merateľná množina kladnej miery a nech $x \in M$ je bod hustoty (existuje podľa Lebesguovej vety o hustote). Nech $\delta > 0$. Potom pre všetky dostatočne malé $\varepsilon > 0$, pre interval $I = B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ platí*

$$\text{Leb}(I \cap M) \geq (1 - \delta) \text{Leb}(I).$$

V takom prípade budeme hovoriť, že interval I je $(1 - \delta)$ -vyplnený množinou M .²

Dôkaz. Keďže $\text{Leb}(M) > 0$, podľa Lebesguovej vety o hustote naozaj existuje bod $x \in M$, ktorý je bodom hustoty množiny M , teda $d_x(M) = 1$ (dokonca skoro každý bod $x \in M$ je taký). Potom však z definície (8.1) dostávame nasledovné: Pre ľubovoľne malé $\delta > 0$ existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pre každé $\varepsilon < \varepsilon_0$ interval $I = B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ spĺňa nerovnosť

$$\frac{\text{Leb}(I \cap M)}{\text{Leb}(I)} \geq (1 - \delta),$$

čím je dôkaz skončený. □

Teda ak $M \subseteq \mathbb{R}$ je kladnej Lebesguovej miery a $x \in M$ je bod hustoty, tak napr. pre $\delta = 0,01$ každý dostatočne krátky interval $I = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ spĺňa nerovnosť

$$\text{Leb}(I \cap M) \geq 0,99 \text{Leb}(I).$$

To znamená, že interval I je aspoň na 99 percent vyplnený množinou M (v zmysle našej dohody hovoríme, že je 0,99-vyplnený množinou M).

²Správnejšie by bolo vraviť, že je aspoň $(1 - \delta)$ -vyplnený množinou M .

Lema 8.6. *Nech I a I_α , $\alpha \in J$ sú také (nedegenerované) intervaly, že $I = \bigsqcup_{\alpha \in J} I_\alpha$. Predpokladajme, že interval I je $(1 - \delta)$ -vyplnený (lebesguovsky merateľnou) množinou M . Potom aj niektorý z intervalov I_α je $(1 - \delta)$ -vyplnený množinou M .*

Dôkaz. Keďže intervaly sú nedegenerované, je indexová množina J konečná alebo nekonečná spočítateľná, takže bude mať zmysel hovoriť o sumách $\sum_{\alpha \in J}$.

Pripustíme, že tvrdenie neplatí, teda $\text{Leb}(I_\alpha \cap M) < (1 - \delta) \text{Leb}(I_\alpha)$ pre každé $\alpha \in J$. Potom však

$$\begin{aligned} \text{Leb}(I \cap M) &= \text{Leb}\left(M \cap \bigsqcup_{\alpha \in J} I_\alpha\right) = \text{Leb}\left(\bigsqcup_{\alpha \in J} (M \cap I_\alpha)\right) = \sum_{\alpha \in J} \text{Leb}(M \cap I_\alpha) \\ &< \sum_{\alpha \in J} (1 - \delta) \text{Leb}(I_\alpha) = (1 - \delta) \sum_{\alpha \in J} \text{Leb}(I_\alpha) = (1 - \delta) \text{Leb}(I), \end{aligned}$$

čo je spor s tým, že interval I je $(1 - \delta)$ -vyplnený množinou M . □

Horeuvedené pojmy a fakty teraz využijeme na dôkaz ergodičnosti niektorých mieru zachovávajúcich systémov.

Podľa príkladu 4.19 všetky rotácie kružnice zachovávajú Lebesguovu mieru. Podľa Príkladu 7.5 racionálne rotácie nie sú ergodické. Teraz ukážeme, že iracionálne rotácie ergodické sú.

Veta 8.7. *Iracionálne rotácie kružnice sú ergodické (vzhľadom na Lebesguovu mieru Leb).*

Dôkaz. Nech T je iracionálna rotácia kružnice. Keďže T zachováva konečnú Lebesguovu mieru Leb , podľa Dôsledku 7.14 stačí dokázať, že T je metricky tranzitívne. Nech teda $\text{Leb}(A) > 0$, $\text{Leb}(B) > 0$. Potrebujeme dokázať, že pre nejaké $n \geq 1$ je $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Zobrazenie T má peknú vlastnosť, že nielen vzor, ale aj obraz merateľnej množiny je merateľná množina s tou istou mierou (to vyplýva napr. z toho, že aj T^{-1} je iracionálna rotácia a teda zachováva mieru Leb). Tiež pripomeňme, že každá orbita zobrazenia T je hustá (to vyplýva napr. z Príkladu 2.15 a Cvičenia 2.3). Navyše, kružnica $\mathbb{S}^1$ je lokálne intervalom (môžeme ju dokonca chápať ako interval $[0, 1)$), a tak na množiny A , B môžeme aplikovať Dôsledok 8.5.

Nech a je bod hustoty pre množinu A a nech b je bod hustoty pre množinu B . Zvoľme $\delta > 0$.³ Potom všetky dostatočne malé⁴ okolia bodu a sú $(1 - \delta)$ -vyplnené množinou A a všetky dostatočne malé okolia bodu b sú $(1 - \delta)$ -vyplnené množinou B . Môžeme teda zvoliť okolie I_δ bodu a a okolie J_δ bodu b (sú to teda otvorené oblúky na kružnici a závisia od voľby δ) tak, že

$$\text{Leb}(I_\delta \cap A) \geq (1 - \delta) \text{Leb}(I_\delta), \quad \text{Leb}(J_\delta \cap B) \geq (1 - \delta) \text{Leb}(J_\delta)$$

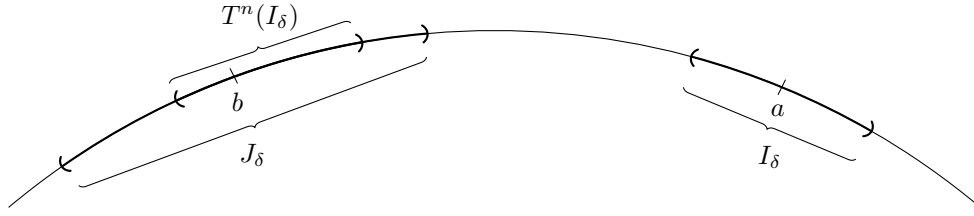
a I_δ je dvakrát kratší ako J_δ , teda

$$\text{Leb}(I_\delta) = (1/2) \text{Leb}(J_\delta).$$

Keďže stred a intervalu I_δ má hustú orbitu, existuje $n \geq 1$ také, že jeho T^n -obraz je natoľko blízko stredu intervalu J_δ , že $T^n(I_\delta) \subseteq J_\delta$ (využili sme, že interval $T^n(I_\delta)$ má rovnakú dĺžku ako I_δ , teda polovičnú v porovnaní s dĺžkou J_δ); vid' Obr. 8.3.

³Zatiaľ ľubovoľné, ale neskôr upresníme, aké malé.

⁴Toto je dôležité: Nielsen pre ľubovoľne malé, ale pre všetky dostatočne malé. Teda Nielsen existujú ľubovoľne malé polomery, pre ktoré to platí, ale existuje také ε_0 , že pre každý polomer $\varepsilon < \varepsilon_0$ to platí. Len vďaka tomu je jasné, že môžeme predpokladať $\text{Leb}(I_\delta) = (1/2) \text{Leb}(J_\delta)$.



Obr. 8.3: K dôkazu, že iracionálna rotácia kružnice je ergodická

V intervale J_δ s mierou $\text{Leb}(J_\delta)$ teda leží množina $J_\delta \cap B$ s mierou $\text{Leb}(J_\delta \cap B) \geq (1 - \delta) \text{Leb}(J_\delta)$, ale aj množina $T^n(I_\delta \cap A)$ s mierou $\text{Leb}(T^n(I_\delta \cap A)) = \text{Leb}(I_\delta \cap A) \geq (1 - \delta) \text{Leb}(I_\delta)$. Súčet ich mier je

$$\text{Leb}(J_\delta \cap B) + \text{Leb}(T^n(I_\delta \cap A)) \geq (1 - \delta) \text{Leb}(J_\delta) + (1 - \delta) \text{Leb}(I_\delta) = \frac{3}{2}(1 - \delta) \text{Leb}(J_\delta),$$

čo je ostro viac ako $\text{Leb}(J_\delta)$, ak zvolíme δ dostatočne malé. Teraz si stačí uvedomiť, že ak teda δ zvolíme takéto, tak $J_\delta \cap B$ a $T^n(I_\delta \cap A)$ sa nevyhnutne pretínajú⁵ (dokonca v množine kladnej miery). Preto sa pretínajú aj ich nadmnožiny B a $T^n(A)$ (dokonca v množine kladnej miery). Tým je dôkaz skončený. $\square$

V Príklade 4.20 sme ukázali, že expandujúce zobrazenia kružnice zachovávajú Lebesguovu mieru. Sú aj ergodické. Ukážeme to teraz pre zobrazenie E_2 .

Veta 8.8. *Expandujúce zobrazenie kružnice $E_2: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$, $E_2(x) = 2x \bmod 1$, je ergodické (vzhľadom na Lebesguovu mieru Leb).*

Dôkaz. Kvôli jednoduchosti píšme T namiesto E_2 . Predpokladajme, že T nie je ergodické, t.j. existuje rozklad $[0, 1) = A \sqcup B$ kde $\text{Leb}(A) > 0$, $\text{Leb}(B) > 0$, $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Odvodíme spor.

Nech $x \in A$ je bod hustoty množiny A . Môžeme predpokladať, že $0 < x < 1$, pretože skoro každý bod množiny A je bodom hustoty. Fixujme $\delta > 0$. Podľa Dôsledku 8.5 existuje taký otvorený interval $I_\delta \subseteq [0, 1)$, že

$$\text{Leb}(I_\delta \cap A) \geq (1 - \delta) \text{Leb}(I_\delta).$$

Interval I_δ nahradíme vhodnejším intervalom, s ktorým sa bude lepšie pracovať. Za tým účelom uvažujme o systéme všetkých dyadických intervalov

$$D_n^k = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$$

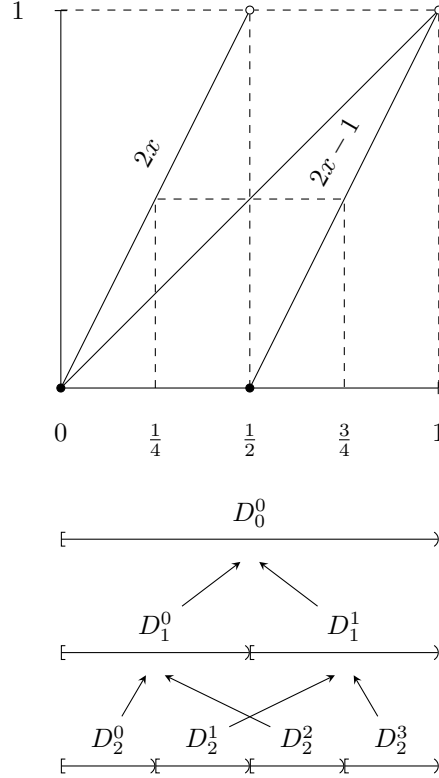
(číslo n nazývame rádom dyadického intervalu D_n^k). Je zrejmé (vysvetlite!), že náš otvorený interval I_δ možno vyjadriť v tvare disjunktného zjednotenia nejakého systému dyadických intervalov

⁵Idea bola: Ak v nejakom intervale je napr. 99% zafarbených na červeno (teda len 1% je nezafarbené na červeno) a v nejakom jeho podintervale s polovičnou dĺžkou je 99% zafarbených na modro, tak nejaký bod má obe farby, veď 99% z polovice celku je viac ako 1% z celku. To čo je modré sa nemohlo zmestiť do komplementu toho, čo je červené. Modré pretína červené.

(je ich vo všeobecnosti nekonečne veľa, s rádmi idúcimi do nekonečna). Potom však na základe Lemy 8.6 existuje dyadický interval D , pre ktorý

$$\text{Leb}(D \cap A) \geq (1 - \delta) \text{Leb}(D). \quad (8.2)$$

Teraz si všimnime, ako zobrazenie $T = E_2$ zobrazuje dyadické intervaly (vid' Obr. 8.4):



Obr. 8.4: Zobrazenie E_2 a dyadické intervaly

- každý z dvoch intervalov $[\frac{0}{2}, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{2}{2})$ prvého rádu sa ‘ľavou polovicou’ alebo ‘pravou polovicou’ zobrazenia E_2 , teda v každom prípade lineárnym zobrazením so smernicou 2 zobrazuje na celý interval $[0, 1)$;
- každý zo štyroch intervalov $[\frac{0}{2^2}, \frac{1}{2^2})$, $[\frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^2})$, $[\frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^2})$, $[\frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^2})$ druhého rádu sa zobrazuje na niektorý interval prvého rádu a teda druhou iteráciou sa zobrazuje na celý interval $[0, 1)$, pričom v každom kroku sa používa lineárne zobrazenie so smernicou 2;
- všeobecne, každý interval n -tého rádu sa n -tou iteráciou zobrazuje na celý interval $[0, 1)$, pričom v každom z n krokov sa používa lineárne zobrazenie so smernicou 2.

Uvedomme si ešte, že lineárne zobrazenie so smernicou 2 zobrazuje intervaly na intervaly dvakrát dlhšie, a teda merateľné množiny na množiny s dvojnásobnou Lebesguovou mierou. Ak náš dyadický interval D zo vzt'ahu (8.2) je rádu n (a teda má dĺžku $\text{Leb}(D) = 1/2^n$), tak $T^n(D) = [0, 1)$ a

$$\text{Leb}(T^n(D \cap A)) = 2^n \text{Leb}(D \cap A) \geq 2^n(1 - \delta) \text{Leb}(D) = 1 - \delta. \quad (8.3)$$

Keďže $T(A) \subseteq A$, tak $T^n(D \cap A) \subseteq A \subseteq [0, 1]$. Potom s využitím (8.3) dostávame, že

$$1 \geq \text{Leb}(A) \geq \text{Leb}(T^n(D \cap A)) \geq 1 - \delta.$$

Pretože $\delta > 0$ bolo ľubovoľné, máme odtiaľ $\text{Leb}(A) = 1$, čo je spor s tým, že $\text{Leb}(B) > 0$. $\square$

8.2 Fourierove rady a dôkazy ergodičnosti

Ukážeme, ako je možné použiť Fourierove rady spolu s Vetou 7.8 na dôkaz, že niektoré zobrazenia na kružnici $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ alebo na tórise $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, sú ergodické. Takéto dôkazy ergodičnosti sú pomerne jednoduché a elegantné, potrebné je však vedieť niektoré základné fakty z teórie Fourierových radov. Uvedieme ich bez dôkazov.

8.2.1 Fourierove rady pre funkcie na kružnici

Uvažujme o kružnici $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ so σ -algebrou $\mathcal{B}$ borelovských množín a s Lebesguovou mierou Leb . Potom $(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ je priestor s mierou. Vezmime funkciu $f: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Ak si predstavíme kružnicu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ako interval $[0, 1]$ s koncami zlepenými do jedného bodu, vidíme, že si funkciu f môžeme predstaviť ako funkciu $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá má v bodoch 0 a 1 rovnaké hodnoty. Takú funkciu však možno (jediným spôsobom) predĺžiť do periodickej funkcie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou 1. Obrátene, od takej periodickej funkcie sa dá prejsť k jej zúženiu na $[0, 1]$. Toto zúženie má v bodoch 0 a 1 rovnaké hodnoty. Preto jednoznačne určuje funkciu na kružnici. Pozri Obrázok 8.5.

Obr. 8.5: (Reálna alebo komplexná) funkcia na kružnici indukuje (reálnu alebo komplexnú) 1-periodickú funkciu na $\mathbb{R}$ a obrátene.

Teda uvažovať o funkcii $f: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ je to isté ako uvažovať o periodickej funkcii $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou 1, teda $f(x+1) = f(x)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

Predpokladajme, že $f \in L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ alebo, ekvivalentne, nech f je 1-periodická funkcia na $\mathbb{R}$, ktorej zúženie na $[0, 1]$ je lebesguovsky integrovateľné. K funkcii f priradíme tzv. *Fourierov rad*⁶ funkcie f , t.j. rad

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x), \quad (8.4)$$

⁶Ak chceme byť presnejší, hovoríme o trigonometrickom rade. Pojem Fourierovho radu je všeobecnejší, nemusia v ňom vystupovať trigonometrické funkcie.

kde

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi n x \, d\text{Leb}, \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x \, d\text{Leb}. \quad (8.5)$$

Predpoklad $f \in L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ zaručuje, že a_n a b_n , a teda aj Fourierov rad, sú dobre definované. Pozor, netvrdíme, že Fourierov rad funkcie f konverguje k funkcii f . Zatiaľ ide len o to, že ho k funkcii f formálne priradíme. Toto priradenie vyjadrujeme zápisom

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x). \quad (8.6)$$

Výhodné je vyjadriť tento rad pomocou komplexných funkcií, s využitím vzťahu

$$e^{i2\pi n x} = \cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x),$$

z ktorého sa ľahko odvodí, že

$$\cos(2\pi n x) = \frac{1}{2} (e^{i2\pi n x} + e^{-i2\pi n x}), \quad \sin(2\pi n x) = \frac{1}{2i} (e^{i2\pi n x} - e^{-i2\pi n x}).$$

Po dosadení sa (8.6) a (8.5) zmenia na

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}, \quad \text{kde} \quad c_n = \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi n x} \, d\text{Leb} \quad (8.7)$$

(špeciálne, $c_0 = \int_0^1 f \, d\text{Leb}$). Číslo c_n sa nazýva n -tý *Fourierov koeficient*. Ak chceme zdôrazniť závislosť c_n na f , píšeme $c_n(f)$.

Pre naše účely postačí, ak sa obmedzíme na Fourierove rady funkcií f z menšieho priestoru $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$.⁷ Toto je Hilbertov priestor a preto skôr, než zhrnieme potrebné fakty o Fourierových radoch v $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$, bude užitočné zopakovať základné fakty o Fourierových radoch vo všeobecných Hilbertových priestoroch.

Hilbertov priestor $\mathcal{H}$ je taký lineárny (čiže vektorový) priestor nad poľom $\mathbb{C}$ (prípadne $\mathbb{R}$), v ktorom máme *skalárny súčin* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a od neho odvodenú *normu* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ a priestor je úplný vzhľadom na *metriku* odvodenú od normy, t.j. vzhľadom na metriku definovanú vzťahom $\varrho(u, v) = \|u - v\|$.

Množina vektorov $E \subseteq \mathcal{H}$ sa nazýva *ortonormálna*, ak každý vektor z E má normu 1 a každé dva rôzne vektory z E sú *ortogonálne*, t.j. majú skalárny súčin 0. Platí veta, že v takom prípade pre každý vektor $v \in \mathcal{H}$ je $\langle v, e \rangle = 0$ pre všetky vektory $e \in E$ s výnimkou spočítateľného množstva. Ak teda označíme

$$E_v = \{e \in E : \langle v, e \rangle \neq 0\},$$

tak množina E_v je spočítateľná. Navyše, suma $\sum_{e \in E_v} \langle v, e \rangle e$ konverguje v $\mathcal{H}$ nezávisle na poradí členov.

⁷To preto, lebo Lebesguova miera na kružnici je konečná a tak podľa Vety 7.8(6) $\Leftrightarrow$ (1) je ergodičnosť merateľného zobrazenia $T: (\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb}) \rightarrow (\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ ekvivalentná s tým, že každá invariantná funkcia $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ pre zobrazenie T je skoro všade konštantná. (Na dôkaz toho, že každá invariantná funkcia $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ je skoro všade konštantná sa dajú využiť práve Fourierove rady.)

V každom Hilbertovom priestore existuje tzv. *ortonormálna báza*, teda ortonormálna množina s tou vlastnosťou, že pre každé $v \in \mathcal{H}$ je

$$v = \sum_{e \in E_v} \langle v, e \rangle e. \quad (8.8)$$

Táto formula sa nazýva *Fourierovým rozvojom/radom* vektora v vzhľadom na ortonormálnu bázu E . Koeficienty $\langle v, e \rangle$, $e \in E_v$, sa nazývajú *Fourierove koeficienty*. Súčet nekonečného radu v Hilbertovom priestore sa samozrejme definuje ako limita postupnosti čiastočných súčtov (teda ako limita istej postupnosti elementov metrického priestoru $\mathcal{H}$). Vzťah (8.8) ukazuje, že v Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$ sa k elementu $v \in \mathcal{H}$ (a ortonormálnej báze E) nielenže priraduje Fourierov rad, ale tento rad má navyše tú príjemnú vlastnosť, že konverguje a jeho súčet je práve v .

Platí veta, že

- v každom Hilbertovom priestore existuje ortonormálna báza, teda
- v každom Hilbertovom priestore možno vektory vyjadrovať ako súčty svojich Fourierových radov.

Ortonormálna báza môže byť konečná, nekonečná spočítateľná alebo nespočítateľná. Každé dve ortonormálne bázy Hilbertovho priestoru $\mathcal{H}$ majú rovnakú kardinalitu a tá sa nazýva *dimenziou* $\mathcal{H}$.⁸ Ortonormálna báza je spočítateľná⁹ práve vtedy, keď $\mathcal{H}$ je separabilný.

Každý nekonečno-rozmerný (reálny, resp. komplexný) separabilný Hilbertov priestor je izometricky izomorfný s (reálnym, resp. komplexným) priestorom $L^2([0, 1])$. Ide o priestor (reálnych, resp. komplexných) lebesguovskych merateľných funkcií f na $[0, 1]$, pre ktoré je $|f|^2$ lebesguovskym integrovateľným. Pritom funkcie rovnajúce sa skoro všade stotožňujeme. Pripomeňme, ako sa v tomto Hilbertovom priestore definuje skalárny súčin a od neho odvodená norma a vzdialenosť (symbol Leb tu označujeme Lebesguovu mieru na $[0, 1]$ a pruh označuje komplexnú konjugáciu, $a + ib = a - ib$):

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^1 f \bar{g} \, d\text{Leb}, \\ \|f\|_2 &= \langle f, f \rangle = \left(\int_0^1 |f|^2 \, d\text{Leb} \right)^{1/2}, \\ d(f, g) &= \|f - g\|_2 = \left(\int_0^1 |f - g|^2 \, d\text{Leb} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zopakujme, že elementami priestoru $L^2([0, 1])$ nie sú jednotlivé funkcie, ale triedy takých funkcií, ktoré sa rovnajú skoro všade. V týchto triedach môžeme ako reprezentantov zvoliť funkcie, ktoré majú vlastnosť $f(0) = f(1)$, lebo zmena funkcie v jednom bode z $[0, 1]$ nemení merateľnosť, integrovateľnosť ani hodnotu integrálu. Teda s rozumnou mierou nepresnosti môžeme povedať, že

$$L^2([0, 1]) = L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb}).$$

⁸Neplette si pojmy ortonormálna báza Hilbertovho priestoru $\mathcal{H}$ a báza vektorového priestoru $\mathcal{H}$. Pre nekonečno-rozmerné Hilbertove priestory ortonormálna báza nie je bázou v zmysle lineárnej algebry (teda vektory z $\mathcal{H}$ nemusia byť konečnými lineárnymi kombináciami vektorov bázy; vo formule (8.8) ide len o konvergenciu takých konečných lineárnych kombinácií ku vektoru v).

⁹Aj konečnú množinu považujeme za spočítateľnú.

Preto si Fourierove rady (reálnych, resp. komplexných) funkcií na kružnici $\mathbb{T}^1$ predstavujeme ako Fourierove rady pre funkcie z (reálneho, resp. komplexného) priestoru $L^2([0, 1])$, ktoré majú v 0 a 1 rovnaké funkčné hodnoty. Je dobre známym faktom, že v tomto priestore napr. funkcie e_n definované vzt'ahom

$$e_n(x) := e^{i2\pi nx} = \cos(2\pi nx) + i \sin(2\pi nx), \quad n \in \mathbb{Z}$$

tvoria ortonormálnu bázu. Práve Fourierove rady vzhľadom na túto ortonormálnu bázu budeme odteraz uvažovať.¹⁰ Každú funkciu $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb}) = L^2([0, 1])$ teda možno vyjadriť v tvare

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n, \quad \text{kde} \quad c_n = \langle f, e_n \rangle,$$

pričom rovnocenne používame aj zápis

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi nx}, \quad \text{kde} \quad c_n = \int_0^1 f \overline{e_n} d\text{Leb} = \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi nx} d\text{Leb}. \quad (8.9)$$

To sa od klasických vzorcov (8.7) pre funkcie z $L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ zdanlivo líši len veľmi málo, v skutočnosti je však rozdiel veľký:

- Zatiaľ čo v (8.7) je Fourierov rad len priradený k funkcii $f \in L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$, v (8.9) máme rovnosť medzi funkciou $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ a súčtom jej L^2 -Fourierovho radu.
- Ak pre nejakú funkciu $f \in L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ píšeme, že $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx}$, tak len konštatujeme, že rad vpravo je Fourierov rad funkcie f . Nehovoríme nič o tom, či rad v tom či onom zmysle konverguje a ak konverguje, tak či konverguje k funkcii f . Vo všeobecnosti ten rad nemusí konvergovať ani v L^1 norme ani rovnomerne ani bodovo skoro všade, a už vôbec nie k funkcii f .

To bol klasický a ťažký problém v časti matematiky zvanej klasická harmonická analýza. Pre dostatočne pekné funkcie, napr. pre funkcie so spojitou deriváciou sa vie, že Fourierov rad bodovo konverguje v každom bode x , a to práve ku $f(x)$ (navyše, konvergencia je rovnomerná). Kolmogorov,¹¹ ako študent vo veku 19 rokov, vo svojej prvej vedeckej práci skonštruoval príklad L^1 -funkcie, ktorej Fourierov rad diverguje skoro všade (neskôr to dokonca vylepšil (či vyhoršil?) na divergenciu všade). Problém, či Fourierov rad každej spojitaj (podľa iných prameňov každej L^2) funkcie konverguje skoro všade bol sformulovaný Luzinom¹² v 20-tych rokoch 20. storočia a bol otvorený až do r.1966, kedy Carleson¹³ publikoval kladnú odpoveď. Hlboká Carlesonova veta tvrdí, že Fourierov rad každej L^2 -funkcie konverguje skoro všade ku $f(x)$.

Vo všeobecnosti je to tak, že v niektorých bodoch x Fourierov rad konverguje ku $f(x)$, v iných konverguje k niečomu inému ako $f(x)$ a v ostatných bodoch diverguje (a to nás ešte zaujíma, či v prípade konvergenzie ide o rovnomernú konvergenciu, absolútnu konvergenciu apod.) V snahe opísať príslušné množiny bodov, matematici zistili, že im chýba aparát na opis takých množín. Je známe, že k vytvoreniu teórie množín privedol Cantora práve jeho výskum trigonometrických radov.

¹⁰Dobre si zapamätajte, že funkcii $x \mapsto e^{i2\pi nx}$ sme dali meno e_n . Toto označenie budeme používať.

¹¹ Андрей Николаевич Колмогоров (Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903-1987)) bol ruský/sovietsky matematik, ktorého možno zaradiť medzi posledných polyhistorov v matematike. Patril medzi špičku vo viacerých odvetviach matematiky a fyziky, najmä v teórii pravdepodobnosti, topológii, intuicionistickej logike, teórii turbulencie, klasickej mechanike a výpočtovej zložitosti.

¹² Николай Николаевич Лузин (Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883-1950)) bol ruský/sovietsky matematik známy svojimi prácami v deskriptívnej teórii množín a v aspektoch matematickej analýzy, ktoré súviseli s topológiou.

¹³Lennart Axel Edvard Carleson (nar. 1928) je švédsky matematik, vedúca osobnosť v harmonickej analýze. Jeho najslávnejší výsledok je dôkaz Luzinovej hypotézy. Pracoval aj v komplexnej dynamike.

- Ak f je L^2 -funkcia a pre Fourierov rad funkcie f napíšeme $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ alebo $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi n x}$, tak tým nemyslíme to, že ten rad bodovo konverguje v každom bode ku $f(x)$.¹⁴ Daným zápisom máme na mysli to, že $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ v L^2 -norme, teda že v Hilbertovom priestore $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ má daný rad súčet f . Ide tu jednoducho o špeciálny prípad rozvoja (8.8). Presne to znamená, že ak označíme N -tý čiastočný súčet $S_N f = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e_n$ (čo je akási L^2 -funkcia), tak $\|S_N f - f\|_2 \rightarrow 0$ pre $N \rightarrow +\infty$. Ak to chceme zdôrazniť, budeme (aj keď netradične) písať $f \stackrel{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ alebo $f(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi n x}$. Prijmeme dohodu:

Ak f a g_n , $n \in \mathbb{Z}$ sú L^2 -funkcie a v Hilbertovom priestore L^2 je f súčtom radu $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n$, tak namiesto $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n$ budeme niekedy používať obsažnejší zápis

$$f \stackrel{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n. \quad (8.10)$$

Špeciálne, ak budeme hovoriť o Fourierovom rade L^2 -funkcie f , tak namiesto zápisu $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$ budeme používať obsažnejší zápis

$$f \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n, \quad \text{alebo} \quad f(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}. \quad (8.11)$$

Ten vyjadruje nielen to, že $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$ je Fourierov rad priradený k funkcii f , ale aj skutočnosť, že tento rad v L^2 -norme konverguje k f .

Porovnajme oba prístupy k problému konvergenzie Fourierových radov funkcií $f \in L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$. Pokiaľ chceme silou mocou riešiť problém v triede všetkých integrovateľných funkcií a v zmysle bodovej konvergenzie, stretávame sa s veľkými komplikáciami. Ak sa však obmedzíme len na funkcie z menšieho priestoru $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ a zvolíme si ten “správny” typ konvergenzie, v tomto prípade L^2 -konvergenziu (alebo si dokonca zvolíme abstraktný Hilbertov priestor a konvergenziu v jeho norme), tak dostaneme peknú teóriu, pekné vety. Obišli sme ťažkosti. To má výhody aj nevýhody. Ilustruje to zároveň jeden zo základných princípov funkcionálnej analýzy: Pri riešení problému si treba zvoliť vhodný abstraktný priestor a taký typ konvergenzie, ktorý je vhodný pre daný problém. To umožní dokázať pekné vety.

Zhrnieme teraz niektoré fakty o Fourierových radoch funkcií z Hilbertovho priestoru $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$.

Propozícia 8.9. *O L^2 -Fourierových radoch (8.9) platia nasledujúce tvrdenia.*

- (1) (Riemannova-Lebesguova lema) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$, tak $c_n \rightarrow 0$ pre $|n| \rightarrow \infty$.
- (2) (Konvergenzia v L^2 -norme k funkcii f) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$, tak Fourierov rad funkcie f konverguje k funkcii f v L^2 -norme:

$$f(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}$$

¹⁴Podľa Carlesonovej vety síce ide o bodovú konvergenziu skoro všade, ale nemusí to byť konvergenzia všade.

t.j. ak označíme N -tý čiastočný súčet $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{i2\pi n x}$, tak $\|S_N f - f\|_2 \rightarrow 0$ pre $N \rightarrow +\infty$.¹⁵

(3) (Jednoznačnosť Fourierovho radu) Ak $f, g \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$, tak

$$f = g \text{ Leb-s.v.} \iff c_n(f) = c_n(g) \text{ pre všetky } n \in \mathbb{Z}.$$

(Implikácia $\Leftarrow$ ukazuje, že Fourierov rad určuje jednoznačne funkciu, ak funkcie rovnajúce sa skoro všade stotožňujeme, ako je zvykom. Podstatne rôzne funkcie majú teda rôzne Fourierove rady, aspoň v jednom koeficiente sa líšia.)

(4) (Ak rad ‘vyzerajúci’ ako Fourierov rad konverguje v L^2 -norme k nejakej L^2 -funkcii f , je to Fourierov rad tej funkcie) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ a

$$f(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi n x},$$

tak tento rad je Fourierovým radom funkcie f , t.j. $d_n = c_n(f)$ pre každé $n \in \mathbb{Z}$, čiže

$$f(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi n x}.$$

8.2.2 Fourierove rady pre funkcie na tórise

Uvažujme o d -rozmernom tórise $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$. Opäť nech $\mathcal{B}$ je σ -algebra borelovských množín a nech Leb je d -rozmerná Lebesguova miera na tórise $\mathbb{T}^d$. Potom $(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb})$ je priestor s mierou. V analógii s prípadom $d = 1$, chceme reprezentovať funkciu $f: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ pomocou jej Fourierovho radu.

Namiesto Fourierovho radu v tvare $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}$ bude mať Fourierov rad v dimenzii d tvar

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} c_{n_1 n_2 \dots n_d} e^{i2\pi n_1 x_1} e^{i2\pi n_2 x_2} \dots e^{i2\pi n_d x_d}. \quad (8.12)$$

Podobne ako v Sekcii 2.6, použijeme na zjednodušenie zápisov vektory a skalárny súčin. Označme

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d), \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_d x_d$$

(teda $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle$ je štandardný, “stredoškolský” skalárny súčin v $\mathbb{R}^d$). Ak ešte namiesto $c_{n_1 n_2 \dots n_d}$ budeme písať $c_{\mathbf{n}}$ a uvedomíme si, že $e^{i2\pi n_1 x_1} e^{i2\pi n_2 x_2} \dots e^{i2\pi n_d x_d} = e^{i2\pi (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_d x_d)}$, tak môžeme rad (8.12) zapísať v tvare

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}} e^{i2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Ak $f \in L^1(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb})$, priradíme k funkcii f jej Fourierov rad

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}} e^{i2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \text{kde} \quad c_{\mathbf{n}} = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle} d\text{Leb}. \quad (8.13)$$

¹⁵Kedže funkcie e_n sú z L^2 , tak aj $S_N f$ je z L^2 .

Opäť, čísla $c_{\mathbf{n}}$ sú tzv. Fourierove koeficienty funkcie f a ak môže dôjsť k nedorozumeniu, píšeme $c_{\mathbf{n}}(f)$ namiesto $c_{\mathbf{n}}$.

Podobne ako v prípade $d = 1$ sa obmedzíme na Fourierove rady funkcií f z Hilbertovho priestoru $L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb})$. Analógom k Propozícii 8.9 je potom nasledujúca propozícia.

Propozícia 8.10. *O L^2 -Fourierových radoch (8.13) platia nasledujúce tvrdenia.*

- (1) (Riemannova-Lebesguova lema) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb})$, tak $c_{\mathbf{n}} \rightarrow 0$ pre $\|\mathbf{n}\| \rightarrow \infty$, kde $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_d^2}$.
- (2) (Konvergenca v L^2 -norme k funkcii f) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb})$, tak Fourierov rad funkcie f konverguje k funkcii f v L^2 -norme:

$$f(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}} e^{i2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}.$$

- (3) (Jednoznačnosť Fourierovho radu) Ak $f, g \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb})$, tak

$$f = g \text{ Leb-s.v.} \iff c_{\mathbf{n}}(f) = c_{\mathbf{n}}(g) \text{ pre všetky } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

- (4) (Ak rad ‘vyzerajúci’ ako Fourierov rad konverguje v L^2 -norme k nejakej L^2 -funkcii f , je to Fourierov rad tej funkcie) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb})$ a

$$f(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} d_{\mathbf{n}} e^{i2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle},$$

tak tento rad je Fourierovým radom funkcie f , t.j. $d_{\mathbf{n}} = c_{\mathbf{n}}(f)$ pre každé $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, čiže

$$f(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} d_{\mathbf{n}} e^{i2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}.$$

8.2.3 Dôkazy ergodičnosti pomocou Fourierových radov

Podľa Vety 7.8(6) $\Leftrightarrow$ (1) je ergodičnosť merateľného zobrazenia $T: (\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb}) \rightarrow (\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb})$, $d \geq 1$, ekvivalentná s tým, že každá funkcia $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb})$ invariantná pre zobrazenie T je skoro všade konštantná, t.j. s tým, že platí implikácia

$$f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \text{Leb}), f \circ T = f \implies f \text{ je konštantná Leb-skoro všade.}$$

Pri dokazovaní tejto implikácie sa dá niekedy využiť nasledujúca lema.¹⁶ Sformulujeme ju pre kružnicu, prípad $d \geq 2$ sa líši len potrebou používať vektorové značenie.

Lema 8.11. *Nech $T: (\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb}) \rightarrow (\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ zachováva lebesguovu mieru Leb a nech $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ má Fourierov rad*

$$f \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n, \quad \text{t.j.} \quad f(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}.$$

¹⁶Nevedno prečo, ale v knihách o ergodickej teórii sa tento fakt explicitne neuvádza. Mlčky sa využíva, že ak do Fourierovho radu funkcie $f(x)$ dosadíme $T(x)$ namiesto x , tak dostaneme Fourierov rad funkcie $(f \circ T)(x)$. Je pravda, že v tých knihách v príslušných úvahách vyjdú rady takého tvaru ako majú Fourierove rady, ale to samotné ešte nie je dôkaz, že to čo dostaneme, je Fourierov rad funkcie $(f \circ T)(x)$. Náš dôkaz využíva, že T zachováva mieru, takže autor nemá pocit, že by to bol nejaký očividný fakt, ktorý netreba komentovať.

Vyčíslime tento rad v bode $T(x)$, teda namiesto x dosadíme $T(x)$. Predpokladajme, že po takomto dosadení a úprave dostaneme, pre nejaké čísla d_n , $n \in \mathbb{Z}$, že

$$c_n e^{i2\pi n T(x)} = d_n e^{i2\pi n x}, \quad \text{t.j.} \quad c_n \cdot (e_n \circ T) = d_n \cdot e_n. \quad {}^{17}$$

Potom aj $f \circ T \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ a má Fourierov rad

$$f \circ T \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_n, \quad \text{t.j.} \quad (f \circ T)(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi n x}. \quad {}^{18}$$

Dôkaz. To, že $f \circ T \in L^2$, vyplýva z Cvičenia 8.11. Aby sme dokázali $f \circ T \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_n$, označme $S_N := \sum_{n=-N}^{+N} d_n e_n$. Zrejme $S_N \in L^2$. Podľa predpokladov platí

$$S_N = \sum_{n=-N}^{+N} d_n e_n = \sum_{n=-N}^{+N} c_n (e_n \circ T) = \left(\sum_{n=-N}^{+N} c_n e_n \right) \circ T = S_N f \circ T.$$

Keďže $f \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$, máme $\|S_N f - f\|_2 \rightarrow 0$ pre $N \rightarrow +\infty$. Potom však

$$\begin{aligned} \|S_N - f \circ T\|_2 &= \|S_N f \circ T - f \circ T\|_2 = \left(\int |S_N f \circ T - f \circ T|^2 d\text{Leb} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int |S_N f - f|^2 \circ T d\text{Leb} \right)^{1/2} = \left(\int |S_N f - f|^2 d\text{Leb} \right)^{1/2} \\ &= \|S_N f - f\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(tretia rovnosť je triviálna (vysvetlite), štvrtá vyplýva z Vety 4.22(1) $\Rightarrow$ (3), lebo T zachováva mieru a $|S_N f - f|^2$ je nezáporná merateľná funkcia). Tým sme dokázali, že v normovanom lineárnom priestore $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \text{Leb})$ platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = f \circ T \quad \text{v } L^2\text{-norme.}$$

Ekvivalentne zapísané,

$$f \circ T \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_n.$$

Podľa Propozície 8.9(4) potom $f \circ T \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_n$ a dôkaz je skončený. $\square$

Je užitočné si lemu pamätať takto:

Ak zobrazenie T na kružnici zachováva Lebesguovu mieru a $f(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}$, tak potom môžeme vyrobiť Fourierov rad funkcie $f \circ T$ obyčajným dosadením:

$$(f \circ T)(x) = f(Tx) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i2\pi n(Tx)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi n x},$$

¹⁷Teda z Fourierovho radu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}$ funkcie f dostaneme rad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi n x}$ takého tvaru, aký majú mať Fourierove rady, len zatiaľ nevieme, či jeho koeficienty d_n sú Fourierove koeficienty nejakej funkcie.

¹⁸Teda tvrdí sa, že $d_n = \int_0^1 (f \circ T)(x) e^{-i2\pi n x} d\text{Leb}$ pre každé $n \in \mathbb{Z}$.

za predpokladu, že sa členy radu dajú tak upraviť.

Z Vety 8.7 vieme, že iracionálne rotácie kružnice sú ergodické. Uvedieme teraz dôkaz využívajúci Fourierove rady.

Veta 8.12. *Iracionálne rotácie kružnice sú ergodické (vzhľadom na Lebesguovu mieru Leb).*

Dôkaz. Nech $T(x) = x + \alpha \bmod 1$ je iracionálna rotácia kružnice, teda $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Vieme, že T zachováva Lebesguovu mieru Leb, teda budeme môcť využiť predchádzajúcu lemu. Nech $f \in L^2(\mathbb{T}^1, B, \text{Leb})$ je invariantná funkcia pre T , teda

$$f \circ T = f.$$

Potrebuje dokázať, že f je skoro všade konštantná. Uvažujme o Fourierovom rade funkcie f :

$$f(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}. \quad (8.14)$$

Použijeme Lemu 8.11. Počítajme

$$c_n e^{i2\pi n T(x)} = c_n e^{i2\pi n (x+\alpha \bmod 1)} = c_n e^{i2\pi n (x+\alpha)} = \underbrace{c_n e^{i2\pi n \alpha}}_{d_n} \cdot e^{i2\pi n x}.$$

(v druhej rovnosti sme využili, že modulo 1 možno ignorovať, lebo $e^{i2\pi k} = 1$ pre každé celé k). Podľa spomínanej Lemy je

$$(f \circ T)(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n e^{i2\pi n \alpha}}_{d_n} \cdot e^{i2\pi n x}. \quad (8.15)$$

Keďže platí $f = f \circ T$ a jedna a tá istá funkcia nemôže mať podľa Propozície 8.9(3) dva rôzne Fourierove rady, porovnaním (8.14) a (8.15) dostávame

$$c_n = c_n e^{i2\pi n \alpha} \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{Z}.$$

Odtiaľ máme $c_n(1 - e^{i2\pi n \alpha}) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Pre $n = 0$ dostávame $c_0 \cdot 0 = 0$, čo nedáva žiadnu informáciu o c_0 .
- Pre každé $n \neq 0$ máme $c_n \cdot (1 - e^{i2\pi n \alpha}) = 0$. Pretože však α je iracionálne, tak pre každé $n \neq 0$ je $1 - e^{i2\pi n \alpha} \neq 0$ (vysvetlite). Teda pre každé $n \neq 0$ je $c_n = 0$.

To však znamená, že

$$f(x) \stackrel{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x} = c_0.$$

Teda $f \stackrel{L^2}{=} c_0$, čiže f a c_0 sa rovnajú ako elementy priestoru L^2 .¹⁹ Keďže rovnosť dvoch funkcií v L_2 -norme znamená, že tieto funkcie sa rovnajú skoro všade,²⁰ dostávame, že $f(x) = c_0$ skoro všade, čiže f je konštantná skoro všade, čo sme práve potrebovali dokázať. $\square$

¹⁹Formálne: Rad vektorov, ktorého jediný nenulový člen je c_0 , konverguje v L^2 -norme ku vektoru f , čiže $\|c_0 - f\|_2 \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Keďže vektor $c_0 - f$ nezávisí od n , máme $\|c_0 - f\|_2 = 0$, čiže $f = c_0$ v priestore L_2 .

²⁰Spomeňte si, že v L^2 sa stotožňujú tie a len tie funkcie, ktoré sa rovnajú skoro všade.

8.3 Cvičenia a projekty

Cvičenie 8.1. Ukážte na príklade, že limita v (8.1) nemusí existovať (napr. pre $n = 1$).

Cvičenie 8.2. V Lebesguovej vete o hustote by sme mohli navyše tvrdiť, že pre skoro každý bod $x \in A^C$ je $d_x(A) = 0$. Ako dôsledok potom dostávame, že pre skoro každý bod $x \in \mathbb{R}^n$ hustota $d_x(A)$ existuje a rovná sa 0 alebo 1. Vysvetlite.

Cvičenie 8.3. Dokážte, že zobrazenie stan je ergodické vzhľadom na Lebesguovu mieru.

Cvičenie 8.4. Sú zobrazenia z Cvičenia 4.11 ergodické vzhľadom na Lebesguovu mieru?

Cvičenie 8.5. Dokážte, že expandujúce zobrazenia kružnice E_m sú ergodické nielen pre $m = 2$ ale aj pre $m = 3, 4, \dots$

Cvičenie 8.6. Ak všetky zobrazenia $T, T^2, T^3, \dots$ sú ergodické, tak hovoríme, že T je *totálne ergodické*. Dokážte, že iracionálne rotácie kružnice sú totálne ergodické.

Cvičenie 8.7. Je niektoré zo zobrazení z Cvičenia 7.2 totálne ergodické?

Cvičenie 8.8. Dokážte, že každé zo zobrazení E_m , $m = 2, 3, \dots$ je totálne ergodické.

Cvičenie 8.9. Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva mieru a nech f, g sú merateľné reálne (alebo komplexné) funkcie definované na X . Dokážte, že potom aj $f \circ T$ a $g \circ T$ sú merateľné funkcie a ak $f = g$ skoro všade, tak aj $f \circ T = g \circ T$ skoro všade.

Cvičenie 8.10. Nech $T: X \rightarrow X$ a nech f je reálna (alebo komplexná) funkcia na X . Ukážte, že $(f \circ T)^2 = f^2 \circ T$.

Cvičenie 8.11. Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva mieru μ a nech $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Dokážte, že potom aj $f \circ T \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Kapitola 9

Birkhoffova ergodická veta

9.1 Birkhoffova ergodická veta

Odporúčame čitateľovi znovu si prečítať Sekciu 1.3. Ako sme už tam naznačili, Birkhoffova ergodická veta je jedna z hlavných viet ergodickej teórie. Motivácia pochádza z Boltzmannovej ergodickej hypotézy sformulovanej Boltzmannom v 30-tych rokoch 20. storočia. Pojem ergodičnosti bol zavedený práve v snahe dokázať túto hypotézu (resp. zistiť, pre ktoré systémy platí), z čoho sa potom zrodila ergodická teória.

Ukázalo sa, že Boltzmannova ergodická hypotéza samozrejme vo všeobecnosti neplatí. Ak však je systém ergodický (a miera je konečná), tak hypotéza platí. To je práve obsahom Birkhoffovej ergodickej vety. Funguje to aj obrátene – ak na priestore s konečnou mierou hypotéza platí, tak je systém ergodický.

Veta 9.1 (Birkhoffova ergodická veta pre mieru zachovávajúce systémy). *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém na priestore so σ -konečnou mierou. Nech f je integrovateľná funkcia na X .¹ Uvažujme o limite*

$$\bar{f}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x).$$

(časový priemer alebo priemer funkcie f pozdĺž trajektórie bodu $x \in X$). Potom platí nasledovné.

- (1) $\bar{f}(x)$ existuje pre μ -skoro každé $x \in X$, teda funkcia $\bar{f}$ je definovaná skoro všade na X .
- (2) Funkcia $\bar{f}$ je (merateľná a dokonca) integrovateľná.
- (3) Funkcia $\bar{f}$ je skoro invariantná pre T , t.j.

$$\bar{f} \circ T = \bar{f} \quad \text{skoro všade na } X.$$

- (4) Ak $\mu(X) < \infty$, tak $\bar{f}$ a f majú rovnaký integrál,² t.j.

$$\int_X \bar{f} d\mu = \int_X f d\mu.$$

Vetu nebudeme dokazovať. Dôkaz je dlhý a komplikovaný, pozri napr. [Wa82].

¹T.j. $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{B}, \mu)$, prípadne $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{B}, \mu)$.

²V prípade σ -konečnej miery platí len nerovnosť $\|\bar{f}\|_1 \leq \|f\|_1$.

Veta 9.2 (Birkhoffova ergodická veta pre ergodické mieru zachovávajúce systémy). *Nech systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ v predchádzajúcej vete je ergodický. Potom navyše platí nasledovné.*

(5) Funkcia $\bar{f}$ je skoro všade konštantná.

(6) Ak $\mu(X) < \infty$, tak

$$\bar{f} = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu$$

skoro všade, a teda v takomto prípade platí Boltzmannova ergodická hypotéza, t.j.

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)}_{\text{časový priemer}} = \underbrace{\frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu}_{\text{priestorový priemer}} \quad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X.^3 \quad (\text{TASA})$$

Táto veta ukazuje, že Boltzmannova ergodická hypotéza platí, ak časový vývoj je ergodický (a zachováva konečnú mieru).

Dôkaz. (5) Podľa Vety 9.1, $\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ existuje s.v. a je to skoro invariantná funkcia pre T . Lenže T je ergodické, takže podľa Vety 7.8(1) $\Rightarrow$ (3) je $\bar{f}$ konštantná skoro všade. Teda existuje c (reálne resp. komplexné, podľa toho či f je reálna alebo komplexná) tak, že

$$\bar{f}(x) = c \quad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X.$$

(6) Nech teraz $\mu(X) < \infty$. Potom podľa Vety 9.1 je

$$\int_X \bar{f} d\mu = \int_X f d\mu$$

a ak využijeme, že $\bar{f} = c$ skoro všade, teda $\int_X \bar{f} d\mu = \int_X c d\mu = c\mu(X)$, dostaneme $c = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu$. Teda naozaj

$$\bar{f}(x) = c = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \quad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X,$$

čo je práve (TASA). □

Poznamenajme, že pre dané zobrazenie T a danú funkciu f sa veličina (funkcia, resp. ak fixujeme x tak číslo)

$$B_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \frac{1}{n} (f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x))$$

niekedy nazýva *Birkhoffov priemer*. Limita Birkhoffových priemerov (pri fixovanom $x \in X$) je, ako sme už naznačili vyššie, tzv. *časový priemer* funkcie f pozdĺž trajektórie bodu x . Konečne, $\frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu$ je *priestorový priemer* funkcie f (nie je to nič iné ako stredná hodnota funkcie f tak, ako sa definuje v integrálnom počte, t.j. konštantná funkcia s takouto hodnotou má rovnaký integrál ako má funkcia f).

³Ak navyše μ je pravdepodobnostná miera, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_X f d\mu$ pre μ -skoro každé $x \in X$.

9.2 Cvičenia a projekty

Cvičenie 9.1. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zobrazenie stan. Dokážte, že pre skoro každé $x \in [0, 1]$ v zmysle Lebesguovej miery je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x) = \frac{1}{2}.$$

Cvičenie 9.2. Nech $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zobrazenie stan. Uved'te, čo sa dá povedať o veličine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{T^k(x)}.$$

Cvičenie 9.3. Nech $S(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Uved'te, čo sa dá povedať o veličine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S^k(x).$$

Kapitola 10

Dôsledky Birkhoffovej ergodickej vety

10.1 Frekvencie návštev

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém na priestore so σ -konečnou resp. konečnou mierou. Potom vieme všeličo povedať o frekvencii návštev typického bodu do merateľnej množiny A . Stačí v Birkhoffovej ergodickej vete za funkciu f dosadiť charakteristickú funkciu χ_A .

Veta 10.1. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém na priestore so σ -konečnou mierou. Nech $A \in \mathcal{B}$. Uvažujme o frekvencii $\text{frekv}_A(x)$, s akou bod $x \in X$ navštevuje množinu A . Potom platí nasledujúce.*

(1) *Frekvencia $\text{frekv}_A(x)$ existuje pre skoro každý bod $x \in X$.*

(2) *Ak je miera μ konečná, tak*

$$\int_X \text{frekv}_A d\mu = \mu(A).$$

(3) *Ak je miera μ konečná a systém je ergodický, tak vieme frekvenciu z bodu (1) určiť:*

$$\text{frekv}_A(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \quad \text{pre skoro každý bod } x \in X.$$

Dôkaz. Pripomeňme, že (pozri (1.4), (1.5) a (2.1))

$$\text{frekv}_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{0 \leq k \leq n-1 : T^k(x) \in A\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) = \overline{\chi_A}(x)$$

a keďže funkcia (pozorovateľná) $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ je (merateľná, lebo $A \in \mathcal{B}$ a) integrovateľná (lebo $\int_X \chi_A d\mu = \mu(A) \leq \mu(X) < +\infty$), podľa Birkhoffovej vety dostávame nasledujúce.

(1) Frekvencia $\text{frekv}_A(x)$ existuje pre μ -skoro každé $x \in X$ (podľa Vety 9.1(1)).

(2) Ak je $\mu(X) < \infty$, tak $\int_X \text{frekv}_A d\mu = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A)$ (podľa Vety 9.1(4)).

(3) Ak je $\mu(X) < \infty$ a systém je ergodický, tak (podľa Vety 9.2(6)) je

$$\text{frekv}_A(x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \quad \text{pre skoro každý bod } x \in X.$$

□

V mieru zachovávajúcom systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ s konečnou mierou nech $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$. Podľa Vety 5.10 vieme, že skoro každý bod množiny A sa vracia do A s kladnou *hornou* frekvenciou. Ako sme už povedali v Poznámke 5.13, v skutočnosti sa skoro každý bod množiny A vracia do A s kladnou *frekvenciou*. To je obsahom nasledujúceho tvrdenia.

Dôsledok 10.2. *Nech $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ a nech $\mu(A) > 0$. Potom skoro každý bod množiny A sa vracia do A s kladnou frekvenciou (rovnou $\mu(A)/\mu(X)$) ak je miera μ konečná a systém je ergodický).*

Dôkaz. Podľa Vety 5.10 vieme, že skoro každý bod množiny A sa vracia do A s kladnou *hornou* frekvenciou. Podľa Vety 10.1(1) existuje dokonca *frekvencia* takýchto návratov pre skoro každé $x \in A$.¹ Prienik dvoch podmnožín plnej miery v A je podmnožina plnej miery v A a na nej existuje ako kladná horná frekvencia tak aj frekvencia. Teda tam existuje kladná frekvencia.² Tvrdenie v zátvorke potom vyplýva z Vety 10.1(3). □

Poznámka 10.3. Majme mieru zachovávajúci systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ s konečnou mierou a predpokladajme aj ergodičnosť. Nech $\mu(A) > 0$. Podľa Kacovej vety (pozri Dôsledok 7.15) sa stredná doba návratu bodov $x \in A$ do množiny A rovná

$$(t_A)_{\text{str}} = \frac{\mu(X)}{\mu(A)}$$

Podľa Dôsledku 10.2 (resp. Vety 10.1(3)) sa skoro každý bod množiny A vracia do A s frekvenciou

$$\text{frekv}_A(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}.$$

Keď porovnáme oba výsledky, vidíme, že ide o navzájom prevrátené hodnoty. To je v súlade s predstavou, že ak je množina malá, tak bodom z nej dlho trvá, kým sa do nej vrátia a teda sa do nej vracajú zriedkavo. Ak je množina veľká, tak bodom z nej krátko trvá, kým sa do nej vrátia a teda sa do nej vracajú často.

10.2 Ďalšie ekvivalentné definície ergodičnosti

Najskôr pripomeňme, že ergodičnosť sme definovali v Definícii 7.1. S jej ekvivalentnými definíciami (teda s podmienkami ekvivalentnými s ergodičnosťou) sme sa stretli vo Vetách 7.3 a 7.8, pozri aj vetu 7.13. V tejto sekcii uvedieme ďalšie ekvivalentné definície ergodičnosti.

Veta 9.2 sa dá sformulovať aj tak, že v mieru zachovávajúcom systéme na priestore s *konečnou* mierou je ergodičnosť postačujúcou podmienkou k platnosti Boltzmannovej ergodickej hypotézy. Ukážeme, že v takých systémoch je aj nutnou podmienkou. To dáva novú ekvivalentnú definíciu ergodičnosti (pre mieru zachovávajúce systémy na priestoroch s konečnou mierou). Nasledujúca veta poskytuje túto aj dve ďalšie ekvivalentné definície ergodičnosti.

Veta 10.4. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém na priestore s konečnou mierou. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

¹ Ak A je merateľná podmnožina priestoru X a ak niečo platí pre skoro každé $x \in X$, tak to platí aj pre skoro každé $x \in A$.

² Lebo existujúca frekvencia sa musí zhodovať s hornou frekvenciou.

(1) T je ergodické.

(2) Pre každú integrovateľnú³ funkciu f platí Boltzmannova ergodická hypotéza, t.j.

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)}_{\text{časový priemer}} = \underbrace{\frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu}_{\text{priestorový priemer}} \quad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X. \quad (\text{TASA pre } \mu\text{-s.v. } x)$$

(3) Pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$, skoro každý bod $x \in X$ navštevuje množinu A so “správnou” frekvenciou, t.j. s frekvenciou úmernou miere množiny A :

$$\text{frekv}_A(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \quad \text{pre skoro každé } x \in X. \quad (\text{ERG zo Sekcie 1.2})$$

(4) Pre každé $A, B \in \mathcal{B}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A) \cap B) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \mu(B).$$

Skôr než dokážeme túto vetu, uvedieme niekoľko poznámok.

Poznámka 10.5. Podľa Birkhoffovej vety pre ergodické mieru zachovávajúce systémy, pozri Vetu 9.2, vieme, že (1) $\Rightarrow$ (2). Novinkou je, že platí aj obrátená implikácia. Podobne, z Vety 10.1(2) vieme, že (1) $\Rightarrow$ (3). Opäť, čo je tu nové, je obrátená implikácia.

Poznámka 10.6. V súvislosti s podmienkou (3) zopakujme to, na čo sme v predstihu upozornili už v Sekcii 1.2. Ergodičnosť znamená, že pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ existuje *svoja* (t.j. závislá od A) množina M_A plnej miery s tou vlastnosťou, že každý bod $x \in M_A$ navštevuje túto jednu množinu A so správnou frekvenciou ako v (3). Ergodičnosť neznamená to, že by musela existovať jedna *univerzálna* množina M plnej miery s tou vlastnosťou, že každý bod $x \in M$ navštevuje každú množinu $A \in \mathcal{B}$ so správnou frekvenciou ako v (3). Samozrejme, ak je v σ -algebre $\mathcal{B}$ len konečne veľa množín⁴, tak množina $M := \bigcap_{A \in \mathcal{B}} M_A$ je plnej miery a je takou univerzálnou množinou. Vo všeobecnosti však taká univerzálna množina existovať nemusí. Napr. ak T je iracionálna rotácia kružnice $\mathbb{T}^1$, tak T zachováva Lebesguovu mieru Leb (ktorá je na kružnici konečná) a je aj ergodická. Spomínaná univerzálna množina však v tomto prípade neexistuje. Dokonca *žiadny* bod x nemá tú vlastnosť, aby navštevoval *každú* merateľnú množinu A s frekvenciou $\text{Leb}(A)/\text{Leb}(\mathbb{T}^1)$. To ukazuje Propozícia 1.4 (išlo o to, že bod x navštevuje napr. svoju orbitu $A := \text{Orb}_T(x) = \{x, T(x), T^2(x), \dots\}$ s frekvenciou 1, ale $\text{Leb}(A) = 0$).

Pozor teda na poradie kvantifikátorov! Podmienka (3) hovorí, že “pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ skoro každý bod navštevuje A s frekvenciou $\mu(A)/\mu(X)$ ” a nie “skoro každý bod navštevuje každú množinu A s frekvenciou $\mu(A)/\mu(X)$ ”.

Poznámka 10.7. Pozrime sa, čo hovorí posledná formula Vety 10.4:

- Množina B pri iterovaní pretína množinu A . Veličina $\mu(T^{-k}(A) \cap B)$ je miera množiny tých bodov z B , ktoré v čase k vojdú do A .

³T.j. patriacu do $L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{B}, \mu)$, prípadne $L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{B}, \mu)$.

⁴Je známe, že každá σ -algebra je buď konečná alebo nespočítateľná.

- Veličina $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A) \cap B)$ udáva, aká je v *priemere* miera množiny tých bodov z B , ktoré pri iterovaní v nejakom danom čase vojdú do A .
- Veličina $\frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \mu(B)$ udáva “férovú” hodnotu veličiny z predchádzajúceho bodu: Ak množina A predstavuje napr. jednu desatinu priestoru X , teda $\frac{\mu(A)}{\mu(X)} = \frac{1}{10}$, tak vo “férovom” prípade by v priemere práve jedna desatina množiny B mala v tom-ktorom čase vojsť do množiny A (a deväť desatín do jej komplementu $X \setminus A$). Miera tejto množiny je $\frac{1}{10}\mu(B)$, všeobecne $\frac{\mu(A)}{\mu(X)}\mu(B)$.

Podľa Vety 10.4(1) $\Leftrightarrow$ (4) teda ergodičnosť znamená, že merateľná množina B pri iterovaní pretína (v priemere) merateľnú množinu A tak, ako zodpovedá relatívnej veľkosti množiny A . Čím je množina A väčšou časťou priestoru X , tým väčší ju bude množina B pri iterovaní v priemere pretínať.

Teraz vetu dokážeme.

Dôkaz. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ je Birkhoffova veta pre ergodické mieru zachovávajúce systémy, pozri Vetu 9.2.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Ak platí (2), tak špeciálne pre charakteristickú funkciu χ_A množiny $A \in \mathcal{B}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \chi_A d\mu \quad \text{pre skoro každé } x \in X.$$

Lenže na ľavej strane je frekvencia návštev bodu x do množiny A a na pravej strane je $\mu(A)/\mu(X)$.

$\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ Predpokladajme (3). Nech $A, B \in \mathcal{B}$. Podľa (3) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \quad \text{pre skoro každé } x \in X$$

a teda aj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) \cdot \chi_B(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \chi_B(x) \quad \text{pre skoro každé } x \in X.$$

Podľa Lemy 3.40 je $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}$, teda aj $\chi_A \circ T^k = \chi_{T^{-k}(A)}$. Ak ešte vezmeme do úvahy zrejmu rovnosť $\chi_C \chi_D = \chi_{C \cap D}$, tak dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{T^{-k}(A) \cap B}(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \chi_B(x) \quad \text{pre skoro každé } x \in X$$

a odtiaľ

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{T^{-k}(A) \cap B} = \int_X \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \chi_B.$$

Integrál vpravo sa rovná $\frac{\mu(A)}{\mu(X)}\mu(B)$. Keďže aritmetický priemer charakteristických funkcií je nezáporná funkcia zhora ohraničená jednotkou, môžeme vľavo na základe Lebesguovej vety o dominantnej konvergencii zameniť poradie integrovania a limitovania. Dostaneme tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{T^{-k}(A) \cap B} = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}\mu(B)$$

a odtiaľ po jednoduchom výpočte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A) \cap B) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \mu(B),$$

čo je (4).

(4) $\Rightarrow$ (1) Predpokladáme (4). Pripustíme, že by T nebolo ergodické. Potom existuje rozklad $X = A \sqcup B$, kde $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ a $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Pre tieto dve množiny je však ľavá strana (4) triviálne rovná nule, zatiaľ čo pravá strana je kladná, čo je spor. $\square$

10.3 *Rovnomerná rozdelenosť a ergodičnosť

10.3.1 Rovnomerne rozdelené postupnosti v kompaktoch

Rovnomerne rozdelené postupnosti bodov sme študovali len v intervaloch v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^s$. Nedajú sa rovnomerne rozdelené postupnosti definovať v nejakých všeobecnejších priestoroch? Pre špeciálne typy priestorov to možné je. Opíšeme jeden taký prípad.

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou, v ktorom

- X je kompaktný Hausdorffov priestor⁵,
- $\mathcal{B}$ je σ -algebra borelovských množín v X a
- μ je regulárna konečná miera definovaná na σ -algebre $\mathcal{B}$.⁶

Nasledujúca definícia, pozri [KN74, str.171], je inšpirovaná Vetou 2.9(1) $\Leftrightarrow$ (3) a je teda v súlade s teóriou rovnomerne rozdelených postupností čísel.

Definícia 10.8. Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodov priestoru X ako vyššie sa nazýva *rovnomerne rozdelená vzhľadom na mieru μ* , alebo *μ -rovnomerne rozdelená*, ak platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \quad \text{pre každú spojitú funkciu } X \rightarrow \mathbb{R}.^7 \quad (10.1)$$

Integrál vpravo je abstraktný Lebesguov integrál.

Ak $M \subseteq X$, označme symbolom ∂M hranicu množiny M v priestore X . Nasledujúca veta, pozri [KN74, Theorem 1.2, str. 175], dáva ekvivalentné definície rovnomernej rozdelenosti.

Veta 10.9. *Nech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov priestoru X ako vyššie. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

⁵Teda napr. kompaktný metrický priestor.

⁶Miera μ definovaná na σ -algebre borelovských podmnožín topologického priestoru X a nazýva *regulárna*, ak pre každú borelovskú množinu E platí $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ je kompaktná}\} = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ je otvorená}\}$. Vie sa, že ak náš kompaktný Hausdorffov priestor X má spočítateľnú bázu, teda ak je to napr. kompaktný metrický priestor, tak naša konečná miera μ na $\mathcal{B}$ je automaticky regulárna.

⁷Prečo sme si zvolili spojitú funkciu a nie riemannovsky integrovateľné funkcie? Jednoducho preto, že X je tu príliš všeobecný priestor a neexistuje pojem riemannovsky integrovateľnej funkcie $X \rightarrow \mathbb{R}$. Na druhej strane, pojem lebesguovsky integrovateľnej funkcie $X \rightarrow \mathbb{R}$ existuje, ale nemohli sme v (10.1) zvoliť takéto funkcie, lebo potom podmienka nie je ekvivalentná s rovnomernou rozdelenosťou $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ani len na intervale, pozrite Poznámku 2.11. Všimnite si tiež, že podmienka (10.1) je priame zovšeobecnenie podmienky (TASA-rr) zo Sekcie 2.3 z intervalu na priestor X .

- (1) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je μ -rovnomerne rozdelená, teda platí (10.1).
 (2) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ navštevuje so správnou frekvenciou každú takú množinu $M \in \mathcal{B}$, pre ktorú $\mu(\partial M) = 0$, teda

$$\text{frekv}_M(x_n) = \frac{\mu(M)}{\mu(X)} \quad \text{pre každú } M \in \mathcal{B}, \text{ pre ktorú } \mu(\partial M) = 0.$$

- (3) Rovnosť (10.1) platí pre charakteristické funkcie takých množín M ako v predchádzajúcej podmienke, teda

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_M(x_n) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \chi_M d\mu \quad \text{pre každú } M \in \mathcal{B}, \text{ pre ktorú } \mu(\partial M) = 0.$$

Vetu nebudeme dokazovať, ale okomentujeme ju.

Ekvivalencia (2) $\Leftrightarrow$ (3) je zrejmá, ekvivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) si dôkaz vyžaduje.

Propozícia 2.7 ukazuje, prečo sa vo Vete 10.9 v podmienke (2) nehovorí o všetkých borelovských množinách, ale len o ‘dostatočne pekných’. Prečo sa však za ‘dostatočne pekné’ borelovské množiny môžu vybrať napríklad tie, ktoré majú hranicu nulovej miery? V špeciálnom prípade číselných postupností sa nám nič také vo Vete 2.6 neobjavilo. Nuž, explicitne sa nám to tam neobjavilo, ale implicitne to tam je. Vysvetlíme to.

Podľa Vety 2.6(1) $\Leftrightarrow$ (4),

- postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne rozdelená v $[A, B]$ vtedy a len vtedy, keď navštevuje každú borelovskú jordanovsky merateľnú podmnožinu M intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{\text{Jord}(M)}{\text{Jord}([A, B])}$.

To môžeme prepísať pomocou dvoch faktov. Po prvé, množina je jordanovsky merateľná práve vtedy, keď jej hranica má Jordanovu mieru nula, a to je práve vtedy, keď jej hranica má Lebesguovu mieru nula (pozri Sekciu 2.2). Po druhé, ak je množina S jordanovsky merateľná, tak je aj lebesguovsky merateľná a $\text{Jord}(S) = \text{Leb}(S)$. Dostaneme tak nasledujúcu formuláciu Vety 2.6(1) $\Leftrightarrow$ (4):

- postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne rozdelená v $[A, B]$ vtedy a len vtedy, keď navštevuje každú borelovskú ‘dostatočne peknú’ množinu M v $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{\text{Leb}(M)}{\text{Leb}([A, B])}$. Pritom borelovská množina M je ‘dostatočne pekná’, ak jej hranica má Lebesguovu mieru nula.⁸

To však znamená, že Veta 2.6(1) $\Leftrightarrow$ (4) je len špeciálny prípad Vety 10.9(1) $\Leftrightarrow$ (2), keď všeobecný priestor $(X, \mathcal{B}, \mu)$ nahradíme priestorom $([A, B], \mathcal{B}_{[A, B]}, \text{Leb}_{[A, B]})$, kde $\mathcal{B}_{[A, B]}$ je σ -algebra borelovských podmnožín intervalu $[A, B]$ a $\text{Leb}_{[A, B]}$ je Lebesguova miera na $[A, B]$ (je regulárna a $[A, B]$ je kompaktný Hausdorffov priestor).

Takže nielen Definícia 10.8, ale aj Veta 10.9 je v súlade s teóriou rovnomerne rozdelených postupností čísel (a podobne bodov v $\mathbb{R}^s$).

10.3.2 Ergodičnosť v kompaktoch ako rovnomerná rozdelenosť trajektórií

Začnime jednoduchým pozorovaním.

⁸V literatúre sa nehovorí ‘dostatočne pekná’, ide o tzv. množiny μ -spojitosti, pozri [KN74, Definition 1.3, str. 174].

Propozícia 10.10. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém, pričom X je kompaktný Hausdorffov priestor, $\mathcal{B}$ je σ -algebra borelovských množín a miera μ je regulárna a konečná.⁹*

- (1) *Ak je bod $x \in X$ férový, tak jeho trajektória je μ -rovnomerne rozdelená.*
 (2) *Ak má bod $x \in X$ μ -rovnomerne rozdelenú trajektóriu, tak ešte nemusí byť férový (a to ani za predpokladu ergodicity).*

Dôkaz. (1) Ak je x férový, t.j. ak každú množinu $A \in \mathcal{B}$ navštevuje so správnou frekvenciou, tak z Vety 10.9(2) $\Rightarrow$ (1) je zrejmé, že trajektória bodu x je μ -rovnomerne rozdelená.

(2) Nech T je zobrazenie stan na $[0, 1]$. Toto zobrazenie je ergodické (vzhľadom na Lebesguovu mieru). Preto podľa Birkhoffovej ergodickej vety, pozri Vetu 9.2(6), pre každú integrovateľnú funkciu f platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \quad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X.$$

Tým skôr to platí pre každú spojitú funkciu, teda podľa Definície 10.8 je trajektória skoro každého bodu $x \in [0, 1]$ μ -rovnomerne rozdelená. Podľa Propozície 1.4 však žiaden z týchto bodov nie je férový. $\square$

Veta 10.11. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém, pričom X je kompaktný Hausdorffov priestor, $\mathcal{B}$ je σ -algebra borelovských množín a miera μ je regulárna a konečná. Potom nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné.*

- (1) *T je ergodické.*
 (2) *Skoro každý bod $x \in X$ má μ -rovnomerne rozdelenú trajektóriu.*

Dôkaz. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Zopakujeme argument z dôkazu Propozície 10.10(2). Podľa Birkhoffovej ergodickej vety, pozri Vetu 9.2(6), pre každú integrovateľnú funkciu f platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \quad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X.$$

Tým skôr to platí pre každú spojitú funkciu, teda podľa Definície 10.8 je trajektória skoro každého bodu $x \in X$ μ -rovnomerne rozdelená.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ ZLE, nevyuzilo sa ani, že μ je regulárna miera. A, B môžu mať hranicu s nulovou mierou. Nasledujúce je preto zle. Nech platí (2). Predpokladajme, že T nie je ergodické. Potom

$$X = A \sqcup B, \quad \text{kde } \mu(A) > 0, \mu(B) > 0 \quad \text{a} \quad T(A) \subseteq A, T(B) \subseteq B.$$

Z toho však vyplýva, že žiaden bod z X nemá μ -rovnomerne rozdelenú trajektóriu, čo je spor s (2). (Naozaj, ak $x \in A$, tak x nikdy nenavštívi B , teda $\text{frekv}_B(x) = 0 < \frac{\mu(B)}{\mu(X)}$. Podobne postupujte ak $x \in B$.) $\square$

10.4 Cvičenia a projekty

Cvičenie 10.1. Na príklade ukážte, že vo Vete 10.11 museli byť nejaké predpoklady o topologickom priestore X a o miere μ . (Návod: využite napr. Cvičenie 7.2(a).)

⁹Predpoklady teda zabezpečujú, že môžeme využívať aj predchádzajúcu Subsekciiu 10.3.1, aj Birkhoffovu ergodickú vetu.

Kapitola 11

Aplikácie Birkhoffovej ergodickej vety

11.1 b -adické rozvoje čísel. Borelova veta o normálnych číslach

Nech $b \geq 2$ je celé číslo a nech x je reálne číslo. Budeme uvažovať o b -árnom rozvoji čísla x (resp. o jeho zápise v číselnej sústave so základom b) v tvare

$$x = [x] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i}, \quad a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

Samozrejme, štandardne sa aj $[x]$ vyjadruje pomocou mocnín b , ale nás to teraz nebude zaujímať, preto si v b -árnom rozvoji x všímame len necelú časť. Ak $x - y \in \mathbb{Z}$, tak sa necelé časti x a y zhodujú, preto sa až na celé časti $[x]$ a $[y]$ aj b -árne rozvoje čísel x a y zhodujú. To je dôvod, prečo sa teraz obmedzíme na reálne čísla z intervalu $[0, 1)$.

Sústredíme sa najskôr na prípad $b = 2$, kedy hovoríme o binárnom rozvoji.

Každé číslo $x \in [0, 1)$ má teda *binárny rozvoj* (zápis v dvojkovej sústave)

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, \quad a_i \in \{0, 1\}.$$

V takom prípade sa čísla a_i volajú cifry čísla x v dvojkovej sústave. Píšeme $x = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_{(2)}$ alebo, ak je jasné, že hovoríme o binárnom rozvoji a nemôže dôjsť k nedorozumeniu, tak len $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$.

Binárny rozvoj čísel z intervalu $[0, 1)$ je jednoznačný s výnimkou spočítateľne veľa čísel tvaru $k/2^n$, $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$, $n = 1, 2, \dots$. Napríklad

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots = (0, 11000 \dots)_{(2)}$$

ale aj

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = (0, 10111 \dots)_{(2)}.$$

Takáto dvojznačnosť nastáva len u spočítateľne veľa čísel. Z pohľadu Lebesguovej miery má teda skoro každé číslo $x \in [0, 1)$ jednoznačný binárny rozvoj. Úplná jednoznačnosť binárneho rozvoja sa dá dosiahnuť tak, že zakážeme rozvoje končiace samými jednotkami (napr. z dvoch horeuvedených rozvojev čísla $3/4$ za binárny rozvoj považujeme len ten prvý). My to tiež tak urobíme, a teda v ďalšom už budeme uvažovať o jednoznačne definovaných binárnych rozvojoch.

Nasledujúci pojem pochádza od Borela.¹

Definícia 11.1. Povieme, že číslo $x \in [0, 1)$ je *normálne* vzhľadom na bázu 2 (alebo v báze 2), ak frekvencia výskytu cifry 0 ako aj frekvencia výskytu cifry 1 v binárnom rozvoji čísla x obidve existujú a rovnajú sa $1/2$.

Veta 11.2 (Borelova veta o normálnych číslach). V zmysle Lebesguovej miery skoro každé číslo $x \in [0, 1)$ je normálne vzhľadom na bázu 2.

Dôkaz. Využijeme expandujúce zobrazenie kružnice

$$T(x) = E_2(x) = 2x \bmod 1, \quad x \in [0, 1).$$

Všimnime si, že ak $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$, tak

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots\right) = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \bmod 1 = \\ &= \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \bmod 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i} \bmod 1. \end{aligned}$$

V zmysle našej dohody o jednoznačnosti binárneho rozvoja, postupnosť $a_1, a_2, a_3, \dots$ nekončí samými jednotkami. Špeciálne, $a_2, a_3, \dots$ nie sú samé jednotky, a teda $\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \in [0, 1)$. Ukázali sme tak, že

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \Rightarrow T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}.$$

Vidíme, že pre $x \in [0, 1)$ sa trajektória bodu x ľahko počíta, ak použijeme binárne rozvoje:

$$\begin{aligned} x &= 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \\ T(x) &= 0, a_2 a_3 a_4 a_5 \dots \\ T^2(x) &= 0, a_3 a_4 a_5 a_6 \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\ a_2 &= \begin{cases} 0 & \text{ak } T(x) \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{ak } T(x) \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\ a_3 &= \begin{cases} 0 & \text{ak } T^2(x) \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{ak } T^2(x) \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\ &\dots \end{aligned}$$

¹Émile Borel, plným menom Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 – 1956) bol francúzsky matematik, spolu s Baireom a Lebesgueom jeden z priekopníkov teórie miery a jej aplikácií v teórii pravdepodobnosti. Pracoval aj v teórii čísel, teórii množín, teórii funkcií a ďalších matematických disciplínach. Je známy aj ako autor myšlienkového experimentu, dnes známeho väčšinou ako veta o nekonečnej opici, ktorý publikoval v jednej zo svojich kníh o pravdepodobnosti (samotná idea vraj ale siaha až k Aristotelovi). Veta hovorí, že opica náhodne udierajúca do klávesov písacieho stroja, by za nekonečný čas takmer určite napísala ľubovoľný predom určený text, napríklad kompletne dielo Williama Shakespeara. Súvisí to aj s normálnymi číslami, pozrite vo Wikipédii článok Infinite monkey theorem.

Odtiaľ máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \# \{1 \leq k \leq n: a_k = 0\} &= \frac{1}{n} \# \left\{ 1 \leq k \leq n: T^{k-1}(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \# \left\{ 0 \leq k \leq n-1: T^k(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Potom

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{1 \leq k \leq n: a_k = 0\}}_{\text{frekvencia cifry 0 v bin. rozvoji } x \in [0, 1)} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \left\{ 0 \leq k \leq n-1: T^k(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \right\}}_{\text{frekvencia návštev } x \text{ do } [0, \frac{1}{2}) \text{ pri zobrazení } T}$$

a ak vezmeme do úvahy, že zobrazenie $T = E_2$ zachováva Lebesguovu mieru Leb (ktorá je na $[0, 1)$ konečná) podľa Príkladu 4.20 a je ergodické podľa Vety 8.8, tak nám Veta 10.1(3) okamžite dáva, že

$$\text{frekvencia cifry 0 v bin. rozvoji } x = \frac{\text{Leb}[0, \frac{1}{2})}{\text{Leb}[0, 1)} = \frac{1}{2} \quad \text{pre Leb-skoro každé } x \in [0, 1).$$

Rovnako sa ukáže, že²

$$\text{frekvencia cifry 1 v bin. rozvoji } x = \frac{\text{Leb}[\frac{1}{2}, 1)}{\text{Leb}[0, 1)} = \frac{1}{2} \quad \text{pre Leb-skoro každé } x \in [0, 1).$$

Pretože prienik dvoch množín plnej miery je množina plnej miery, skončili sme dôkaz. $\square$

Poznámka 11.3. Ak má číslo dva binárne rozvoje, jeden končiaci samými nulami a druhý končiaci samými jednotkami, tak nie je normálne v báze 2, nech by sme už brali do úvahy ktorýkoľvek rozvoj. Nebolo preto nijako obmedzujúce uvažovať len rozvoje nekončiace samými jednotkami.

Poznámka 11.4. Podobne sa ukáže, že pre ľubovoľné iné celé $b \geq 2$ je skoro každé číslo $x \in [0, 1)$ normálne vzhľadom na bázu b (každá spomedzi cifier $0, 1, \dots, b-1$ sa v zápise čísla x v číselnej sústave so základom b vyskytuje s frekvenciou $1/b$). Stačí namiesto E_2 vziať E_b . Pretože prienik spočítateľne veľa množín plnej miery je množina plnej miery, tak dostávame, že skoro každé číslo $x \in [0, 1)$ je normálne vzhľadom na každú bázu $b \geq 2$. Konečne, ak si pripomenieme, že reálne čísla s tou istou necelou časťou majú v b -árnych rozvojoch rovnaké tie časti, čo sú za b -árnou čiarkou³, tak môžeme hovoriť aj o normálnych číslach $x \in \mathbb{R}$. Z toho, čo sme už povedali, je zrejmé, že skoro každé číslo $x \in \mathbb{R}$ je normálne vzhľadom na každú bázu $b \geq 2$.

11.2 Rozvoje čísel do ret'azových zlomkov

Gaussovo zobrazenie úzko súvisí s ret'azovými zlomkami.

²Možno tiež použiť úvahu, že ak sa pre nejaké x frekvencia cifry 0 v binárnom rozvoji x rovná $1/2$, tak sa frekvencia cifry 1 rovná $1 - 1/2 = 1/2$.

³Analógia s desatinnou čiarkou v prípade $b = 10$.

11.2.1 O reťazových zlomkoch

Každé *racionálne číslo* x sa dá rozvinúť do tzv. konečného reťazového zlomku. Dané číslo najskôr vyjadríme ako súčet jeho celej časti (čo je celé číslo, najlepšia dolná celočíselná aproximácia daného racionalného čísla) a necelej časti, čo je zase racionalné číslo, avšak už z intervalu $[0, 1)$. Ak je toto nové racionalné číslo 0 (t.j. ak x bolo celé číslo), skončili sme. Ak patrí do $(0, 1)$, je to kladný zlomok s čitateľom menším ako menovateľom. Napíšeme ho v tvare zlomku s čitateľom 1, takže v menovateli bude zlomok (racionalné číslo z $(1, \infty)$), ktorého čitateľ je väčší ako menovateľ. S ním zopakujeme celú procedúru. Takto pokračujeme, až kým neskončíme (t.j. kým sa nedopracujeme k nulovej necelej časti). Keďže sme pôvodne začali s racionalným číslom, dá sa ukázať, že po konečnom počte krokov skončíme, teda racionalné čísla majú konečné rozvoje do reťazových zlomkov. Celá procedúra zodpovedá Euklidovmu algoritmu.⁴ Uvedieme niekoľko príkladov takých rozvojev. Keďže sa objavujú “mnohoposchodové” zlomky, je rozumné používať aj označenia, ktoré sa zmestia do riadku. Začnime príkladom

$$-\frac{20}{7} = -3 + \frac{1}{7} =: [-3; 7].$$

Podobne,

$$-\frac{19}{7} = -3 + \frac{2}{7} = -3 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = -3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} =: [-3; 3, 2]$$

(všimnite si, že bodkočiarkou oddeľujeme len celú časť pôvodného čísla, potom používame čiarky). Ešte jeden príklad:

$$\frac{59}{21} = 2 + \frac{17}{21} = 2 + \frac{1}{\frac{21}{17}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{4}{17}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{17}{4}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}} =: [2; 1, 4, 4]$$

Všimnite si, čo je podstatné na takomto rozvoji: všetky čitatele sú jednotky. Tie sa preto v “jednoriadkovom” zápise neobjavujú.

Všeobecne, pre každé racionalné číslo máme jeho rozvoj do konečného reťazového zlomku:

$$x \in \mathbb{Q} \implies x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} =: [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Tu n je nezáporné celé číslo, $a_0 = \lfloor x \rfloor$ je celá časť čísla x a $a_1, \dots, a_n$ sú kladné celé čísla. Takýto rozvoj nie je celkom jednoznačný, lebo pre $a_n \geq 2$ je $[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, (a_n - 1), 1]$. Napr.

$$[0; 3, 8] = \frac{1}{3 + \frac{1}{8}} = \frac{8}{25} = \frac{1}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1}}} = [0; 3, 7, 1].$$

⁴Skúste to vysvetliť.

Obvykle sa uprednostňuje prvý, kratší rozvoj. Pri dodržiavaní takej dohody je rozvoj racionálneho čísla do reťazového zlomku jediný.

Analogická procedúra sa dá robiť s *iracionálnymi* číslami. Postupujeme ako u racionálnych čísel. Zase začneme vyjadrením čísla x v tvare súčtu celej časti a necelej časti. Necelá časť tentoraz nemôže byť nula, lebo je to iracionálne číslo, takže patrí do $(0, 1)$. Vyjadríme ju v tvare zlomku s číslom 1. Menovateľ je potom iracionálne číslo väčšie ako 1. S ním celú procedúru zopakujeme (oddelíme celú časť, atď.). Takto postupujeme donekonečna, procedúra nikdy neskončí (konečný reťazový zlomok, keďže v ňom vystupujú len celé čísla, by bol racionálnym číslom). Teda každé iracionálne číslo má nekonečný rozvoj do reťazového zlomku. Pritom tento rozvoj je jediný (na rozdiel od racionálnych čísel netreba prijímať žiadnu dohodu, aby to tak bolo). Platí teda

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\dots}}}}} =: [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots].$$

To znamená, že existuje také celé číslo a_0 (to je celá časť čísla x , $a_0 = \lfloor x \rfloor$) a kladné celé čísla $a_1, \dots, a_n, \dots$, že procedúra rozvoja x do reťazového zlomku dá horeuvedený výsledok. V teórii reťazových zlomkov sa dokazuje, že tento výraz nie je len zápisom akejsi procedúry, ale že x je limitou tzv. *zblížených zlomkov* čísla x :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Príklad 11.5. Pre číslo $\sqrt{2}$ je začiatok rozvoja takýto (využívame, že $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$):

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}.$$

Keďže sa nám v menovateli objavilo číslo $\sqrt{2} + 1$, ktoré sme už raz v menovateli mali a vzniklo z neho

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1},$$

vidíme, že celý rozvoj je

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = [1; 2, 2, 2, \dots].$$

V predchádzajúcom príklade je nekonečný rozvoj $\sqrt{2} = [1; \bar{2}]$ *periodický*. Tým sa myslí, že má tvar

$$[a_0; a_1, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}, \dots, a_{k+n}}].$$

Podľa tzv. Lagrangeovej vety majú periodický rozvoj do reťazového zlomku tie a len tie iracionálne čísla, ktoré sú tvaru

$$\frac{P \pm \sqrt{N}}{Q}, \quad \text{kde } P, Q \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}, \sqrt{N} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

(prítom v elementárnej teórii čísel sa dokazuje, že ak N je prirodzené, tak $\sqrt{N}$ je alebo prirodzené alebo iracionálne). Všimnite si, že iracionálne číslo má periodický rozvoj práve vtedy, keď je to koreň kvadratickej rovnice s racionálnymi koeficientami (a to je práve vtedy, keď je to koreň kvadratickej rovnice s celočíselnými koeficientami). Také čísla sa nazývajú *kvadratické iracionality*.

Príkladom neperiodického rozvoja do reťazového zlomku je

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots, 1, 2n, 1, \dots].$$

Nie je to periodický rozvoj, ale ešte stále tu vidieť akési pravidlo $(1, 2n, 1)$. V rozvoji čísla π do reťazového zlomku však zatiaľ nik žiadne pravidlo neobjavil:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots].$$

11.2.2 Súvis reťazových zlomkov s Gaussovým zobrazením

Budú nás zaujímať vlastnosti reťazových zlomkov čísel z intervalu $[0, 1]$. Pre konkrétne číslo to môže byť ťažké (ako naznačuje napr. rozvoj čísla π), nás však bude zaujímať, čo sa dá povedať o rozvoji do reťazového zlomku pre skoro každé číslo z $[0, 1]$. Máme na mysli “skoro každé” v zmysle Lebesguovej miery $\text{Leb} = \text{Leb}_{[0,1]}$ alebo v zmysle nejakej miery μ , ktorá je s ňou ekvivalentná (lebo pre ekvivalentné miery nulové množiny a teda aj pojmy “skoro každý” vzhľadom k jednej či druhej miere splývajú). Takou mierou μ je napr. *Gaussova miera* z Príkladu 4.21, ktorá je rovnako ako Lebesguova miera definovaná na $\mathcal{L}_{[0,1]}$ a je ekvivalentná s Leb .

Pri takto formulovanej úlohe je jasné, že si nemusíme všimnúť racionálne čísla, ktorých je len spočítateľne veľa (a teda $\text{Leb}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0 = \mu(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$). Ak ich vynecháme z intervalu $[0, 1]$, nezmení to miery podmnožín intervalu $[0, 1]$. Ak totiž označíme

$$\mathbb{J} := (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1],$$

tak množina $A \subseteq [0, 1]$ je lebesguovsky merateľná vtedy a len vtedy keď $A \cap \mathbb{J}$ je lebesguovsky merateľná a to isté platí pre μ -merateľnosť. Navyše, v prípade merateľnosti máme

$$\text{Leb}(A \cap \mathbb{J}) = \text{Leb}(A) = \mu(A) = \mu(A \cap \mathbb{J}).$$

Tiež si všimnime, že Gaussovo zobrazenie z Príkladu 4.21 definované vzt'ahom

$$T: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad T(x) := \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0, \\ \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & \text{ak } x \in (0, 1] \end{cases} \quad (11.1)$$

zobrazuje racionálne čísla do racionálnych a iracionálne do iracionálnych (to okrem iného znamená, že trajektória iracionálneho čísla sa nikdy nedostane do nuly). Teda

$$x \in \mathbb{J} \iff T(x) \in \mathbb{J}. \quad (11.2)$$

Pretože $T(\mathbb{J}) \subseteq \mathbb{J}$,⁵ môžeme zobrazenie T zúžiť na množinu $\mathbb{J}$, teda na tú podstatnú časť intervalu $[0, 1]$, ktorá nás zaujíma. Dovoľme si nezmeniť označenie zobrazenia, takže dostaneme

$$T: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J}, \quad T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor. \quad (11.3)$$

Navyše, keďže nás bude zaujímať Leb-miera resp. μ -miera množín, budeme môcť stotožňovať množiny $A \subseteq [0, 1]$ a $A \cap \mathbb{J} \subseteq \mathbb{J}$. Tiež si budeme môcť dovoliť stotožňovať tvrdenia tvaru “pre skoro každé iracionálne číslo z $[0, 1]$...” (teda “pre skoro každé $x \in \mathbb{J}$...”) a tvrdenia tvaru “pre skoro každé číslo z $[0, 1]$...”. Dokonca môžeme stotožňovať zobrazenia (11.1) a (11.3).

Konečne, ak $x \in \mathbb{J}$, tak má celú časť $\lfloor x \rfloor = 0$, teda $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$. Dohodneme sa preto, že si zápisy zjednodušíme a budeme písať len $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ (nie je tam teda bodkočiarka a koeficient $a_0 = 0$ pred ňou).

Prečo hovoríme o Gaussovom zobrazení? Lebo súvisí s reťazovými zlomkami a tie nás teraz zaujímajú. Vysvetlíme tento súvis. Ak $x \in \mathbb{J}$, tak pre nejaké prirodzené čísla $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, máme

$$\underbrace{x}_{\in \mathbb{J}} = \frac{1}{\boxed{a_1(x)} + \frac{1}{a_2(x) + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n(x) + \frac{1}{\dots}}}}} = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots]. \quad (11.4)$$

Dva zarámované výrazy majú svoj význam – prvý sa rovná $\lfloor 1/x \rfloor$ a druhý $T(x)$. Naozaj, z (11.4) dostaneme⁶

$$\frac{1}{x} = \underbrace{a_1(x)}_{\in \mathbb{N}} + \frac{1}{a_2(x) + \underbrace{\frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n(x) + \frac{1}{\dots}}}}_{\in (0,1)}}.$$

Z toho vyplýva, že $a_1(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. Potom, podľa (11.3), $T(x) = \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = \frac{1}{x} - a_1(x)$, takže druhý sčítanec na pravej strane predchádzajúceho vzťahu je práve $T(x)$:

$$\frac{1}{x} = \underbrace{a_1(x)}_{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} + \frac{1}{a_2(x) + \underbrace{\frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n(x) + \frac{1}{\dots}}}}_{T(x) \in \mathbb{J}}}. \quad (11.5)$$

⁵Kedže $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je surjektívne a platí (11.2), je dokonca $T(\mathbb{J}) = \mathbb{J}$.

⁶Všimnite si, že nasledujúci zápis sa dá vyjadriť aj tak, že $1/x = [a_1(x); a_2(x), \dots, a_n(x), \dots]$, pričom vpravo je už bodkočiarka.

Ak porovnáme (11.4) a (11.5), vidíme, že sme dokázali implikáciu:

$$\underbrace{x}_{\in \mathbb{J}} = [a_1(x), a_2(x), \dots] \implies a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad \text{a} \quad \underbrace{T(x)}_{\in \mathbb{J}} = [a_2(x), a_3(x), \dots]. \quad (11.6)$$

Potom však aj

$$\begin{aligned} \underbrace{T(x)}_{\in \mathbb{J}} &= [a_2(x), a_3(x), \dots] \implies a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor \quad \text{a} \quad \underbrace{T^2(x)}_{\in \mathbb{J}} = [a_3(x), a_4(x), \dots], \\ \underbrace{T^2(x)}_{\in \mathbb{J}} &= [a_3(x), a_4(x), \dots] \implies a_3(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^2(x)} \right\rfloor \quad \text{a} \quad \underbrace{T^3(x)}_{\in \mathbb{J}} = [a_4(x), a_5(x), \dots] \end{aligned}$$

atď. To však pre $x \in \mathbb{J}$ znamená, že⁷

$$\begin{aligned} x &= [a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots] \\ \iff a_1(x) &= \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor, a_3(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^2(x)} \right\rfloor, \dots \end{aligned}$$

Podstatné je si teraz všimnúť, v ktorých bodoch $z \in (0, 1]$ (stačilo by nám skúmať $z \in \mathbb{J}$, pozri diskusiu na začiatku tejto subsekcie) je $\lfloor \frac{1}{z} \rfloor = 1$, v ktorých bodoch je $\lfloor \frac{1}{z} \rfloor = 2$, atď (nula to samozrejme nikdy nie je, možné hodnoty sú len prirodzené čísla). Ľahko sa dá overiť, že rôzne hodnoty $\lfloor \frac{1}{z} \rfloor$ zodpovedajú práve intervalom $I_1, I_2, \dots$, na ktorých sú definované jednotlivé vetvy $T_1, T_2, \dots$ Gaussovoho zobrazenia, pozri Obr. 4.6. Túto závislosť ukazuje nasledujúca tabuľka:

$z \in$	$\dots$	$I_k = (1/(k+1), 1/k]$	$\dots$	$I_3 = (1/4, 1/3]$	$I_2 = (1/3, 1/2]$	$I_1 = (1/2, 1]$
$\lfloor 1/z \rfloor =$	$\dots$	k	$\dots$	3	2	1

Tabuľku môžeme zhrnúť takto:

$$\left\lfloor \frac{1}{z} \right\rfloor = \text{poradové číslo intervalu } I_k, \text{ v ktorom sa } z \text{ nachádza.}$$

Prišli sme tak k pozoruhodnému záveru. Ak zvolíme $x \in \mathbb{J}$, tak jeho rozvoj do reťazového zlomku

$$x = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots]$$

sa dá určiť tak, že sa pozrieme na trajektóriu bodu x vzhľadom na Gaussovo zobrazenie T (ide o trajektóriu v dynamickom systéme $(\mathbb{J}, T)$) a zapíšeme si, ktoré intervaly postupne bod x navštevoval:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \lfloor 1/x \rfloor &&= \text{poradové číslo intervalu } I_k, \text{ v ktorom je } x, \\ a_2(x) &= \lfloor 1/T(x) \rfloor &&= \text{poradové číslo intervalu } I_k, \text{ v ktorom je } T(x), \\ a_3(x) &= \lfloor 1/T^2(x) \rfloor &&= \text{poradové číslo intervalu } I_k, \text{ v ktorom je } T^2(x), \\ &\dots && \end{aligned}$$

⁷Implikácia zľava doprava triviálne vyplýva z predchádzajúcich implikácií. Obrátene, nech pre $x \in \mathbb{J}$ platí $a_1(x) = \lfloor 1/x \rfloor$, $a_2(x) = \lfloor 1/T(x) \rfloor$, $a_3(x) = \lfloor 1/T^2(x) \rfloor$, $\dots$. Číslo x má nejaký rozvoj $x = [b_1(x), b_2(x), b_3(x), \dots]$. Potom však opäť zo spomínaných implikácií dostaneme $b_1(x) = \lfloor 1/x \rfloor$, $b_2(x) = \lfloor 1/T(x) \rfloor$, $b_3(x) = \lfloor 1/T^2(x) \rfloor$, $\dots$. Teda $b_1(x) = a_1(x)$, $b_2(x) = a_2(x)$, $b_3(x) = a_3(x)$, $\dots$, čo bolo treba dokázať.

11.2.3 Aplikácia: Vlastnosti ret'azových zlomkov

Z Príkladov 4.21 a 4.32 vieme, že Gaussovo zobrazenie zachováva Gaussovu pravdepodobnostnú mieru

$$\mu(B) = \frac{1}{\log 2} \int_B \frac{1}{1+x} dx, \quad B \in \mathcal{L}_{[0,1]}.$$

Ide o ergodickú mieru.

Veta 11.6. *Gaussova miera je pre Gaussovo zobrazenie (pravdepodobnostná, invariantná a) ergodická.*

Dôkaz ergodičnosti je komplikovaný, nebudeme ho robiť, ale vetu využijeme na získanie zaujímavých faktov o ret'azových zlomkoch.

Veta 11.7. *Pre čísla $x \in [0, 1]$ (prísne vzaté, pre iracionálne x) uvažujme o ich ret'azových zlomkoch*

$$x = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots].$$

Pre skoro každé $x \in [0, 1]$ v zmysle Lebesguovej miery Leb (ekvivalentne, pre skoro každé x v zmysle Gaussovej miery μ) sa prirodzené číslo k objavuje v postupnosti

$$a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots$$

s (kladnou) frekvenciou

$$\text{frekv}_{(k)}(x) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

Dôkaz. Ako sme už vysvetlili na začiatku Subsekcie 11.2.2, môžeme ignorovať racionálne čísla a pracovať s dynamickým systémom $(\mathbb{J}, T)$. Máme v ňom aj Gaussovu mieru, ktorá je pravdepodobnostná, invariantná a podľa vety 11.6 ergodická pre T . Sú splnené predpoklady Birkhoffovej ergodickej vety. Môžeme ju preto použiť, ako aj jej dôsledky, ktoré sme už odvodili.

Podľa záveru Subsekcie 11.2.2 platí, že hľadaná frekvencia nie je nič iné ako frekvencia, s akou bod x v našom dynamickom systéme navštevuje interval $I_k = (1/(k+1), 1/k]$. Teda

$$\text{frekv}_{(k)}(x) = \text{frekv}_{I_k}(x).$$

Keďže sme v ergodickom systéme zachovávajúcim konečnú Gaussovu mieru μ , podľa Vety 10.1(3) μ -skoro každý bod navštevuje μ -merateľnú množinu I_k so správnou frekvenciou, t.j.

$$\text{frekv}_{I_k}(x) = \frac{\mu(I_k)}{\mu(\mathbb{J})} \quad \text{pre } \mu\text{-skoro každý bod } x \in \mathbb{J}.$$

Keďže $\mu \sim \text{Leb}$ a pri každej z týchto mier má $\mathbb{J}$ plnú (teda jednotkovú) mieru v $[0, 1]$, znamená to, že

$$\text{frekv}_{(k)}(x) = \text{frekv}_{I_k}(x) = \frac{\mu(I_k)}{\mu(\mathbb{J})} \quad \text{pre Leb-skoro každý bod } x \in [0, 1].$$

Takáto úvaha platila pre každé k . Pretože intervalov I_k je len spočítateľne veľa a prienik spočítateľne veľa množín plnej miery je opäť množina plnej miery, platí dokonca, že

$$\text{pre Leb-skoro každý bod } x \in [0, 1] \text{ je } \text{frekv}_{(k)}(x) = \frac{\mu(I_k)}{\mu(\mathbb{J})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11.7)$$

Platí $\mu(\mathbb{J}) = \mu([0, 1]) = 1$ a

$$\begin{aligned}\mu(I_k) &= \frac{1}{\log 2} \int_{I_k} \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{\log 2} \left[\log \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{k+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.\end{aligned}$$

Po dosadení za $\mu(J)$ a $\mu(I_k)$ do (11.7) dostaneme požadovaný výsledok. □

11.3 Cvičenia a projekty

Cvičenie 11.1. Dokážte tvrdenia z Poznámky 11.4.

Projekt 11.2. Rozviňte úvahy o normálnych číslach tak, že si namiesto frekvencie cifier budete všimáť frekvencie konečných blokov cifier.

Literatúra

- [BoI] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. I*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [BoII] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. II*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [C13] D. L. Cohn, *Measure theory. Second edition*, Birkhäuser/Springer, New York, 2013.
- [Dav71] R. O. Davies, *Measures not approximable or not specifiable by means of balls*, Matematika **18** (1971), 157–160.
- [Fr82] A. Friedman, *Foundations of modern analysis*, Reprint of the 1970 original. Dover Publications, Inc., New York, 1982.
- [KMS16] M. Kesseböhmer, S. Munday, B. O. Stratmann, *Infinite ergodic theory of numbers*, De Gruyter, Berlin, 2016.
- [KN74] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience, New York-London-Sydney, 1974.
- [Mi16] M. Mihoková, *Rovnomerne rozdelené postupnosti*, Bc práce, FPV UMB 2016.
- [Sch05] R. L. Schilling, *Measures, integrals and martingales. Second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [SS99] B. Sivák, Ľ. Snoha, *Matematická analýza II*, skriptá, Univerzita Mateja Bela, 1999.
- [Sin76] Ya. G. Sinai, *Introduction to ergodic theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976.
- [VO16] M. Viana, K. Oliveira, *Foundations of ergodic theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [Wa82] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, 79, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [Yeh14] J. Yeh, *Real analysis. Theory of measure and integration*, 3rd edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014.