Úvod do teórie funkcií

Verzia z 22. septembra 2019

Záznam prednášok

Ľubomír Snoha

Obsah

Predhovor

Tento **predbežný a nedokončený** študijný text je určený študentom prvého ročníka učiteľského štúdia matematiky na Fakulte prírodných vied UMB v Banskej Bystrici ako základná študijná literatúra k predmetu "Úvod do teórie funkcií."

Text ešte nie je ukončený a aj zoznam literatúry je zatiaľ neúplný. Najmä niektoré kapitoly o funkciách chýbajú alebo sú neúplné alebo sú len v predbežnom tvare. Ďalšie materiály možno nájsť na webovej stránke Katedry matematiky FPV UMB. Kapitoly a podkapitoly označené hviezdičkou presahujú rozsah povinného učiva a sú nepovinné.

Ak by ste mali akékoľvek poznámky (najmä kritické) alebo akékoľvek návrhy k tomuto textu, píšte prosím na adresu Lubomir.Snoha@umb.sk.

Banská Bystrica, 21. september 2019 — Ľubomír Snoha

Časť I

POSTUPNOSTI

Kapitola 1

Postupnosti a ich základné vlastnosti

1.1 Pojem postupnosti

Postupnosť je predpis (pravidlo), ktorý každému prirodzenému číslu priraďuje nejaký prvok z danej množiny A. (Pritom predpokladáme, že množina A je neprázdna, inak by sa predsa žiaden taký predpis nedal vymysliet'.) Podrobnejšie hovoríme o postupnosti prvkov množiny A.

Zdôrazňujeme, že každému prirodzenému číslu priraďujeme práve jeden prvok množiny A, rôznym prirodzeným číslam však môže byť priradený ten istý prvok (ak sa tak nestane, tj. ak každým dvom rôznym prirodzeným číslam sú priradené rôzne prvky, hovoríme, že postupnosť je *prostá* alebo *injektívna*). Tiež zdôrazňujeme, že nie každý prvok množiny A musí byť k nejakému číslu priradený, i keď to tak môže byť – v takom prípade sa niekedy hovorí, že ide o postupnosť *všetkých* prvkov množiny A.

V matematike, ako v každej vede, je veľmi dôležité klásť si otázky (formulovať problémy). Tie sú hybnou silou matematického výskumu. Ak si nebudete klásť otázky, sotva to pri štúdiu matematiky ďaleko dotiahnete. Aj hlúpa otázka je lepšia ako žiadna otázka! Bez toho, aby ste si kládli otázky zostanete v matematike na úrovni memorovania. Aj triviálne otázky, aj otázky na ktoré nikto nevie odpovedať, aj otázky zdanlivo smiešne či zbytočné ("načo sa to vôbec pýtať?") vám pomôžu lepšie pochopiť rôzne súvislosti študovanej látky, jej hĺbku a rozsah. Ubezpečujeme vás, že máločo vašich učiteľov poteší tak ako (matematické) otázky, ktoré sformulujete.

V tejto chvíli je napr. možnou otázkou to, či pre každú neprázdnu množinu A existuje postupnosť *všetkých* jej prvkov.

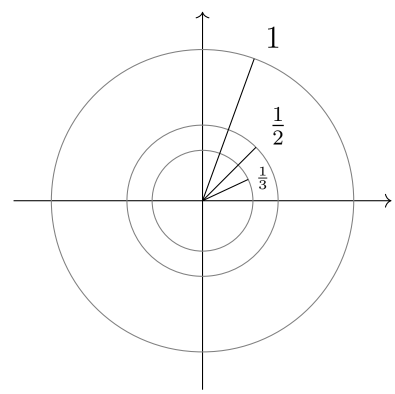
Prezradíme vám, že odpoveď na položenú otázku je záporná a sformulovaná otázka viedla v matematike k vybudovaniu teórie tzv. spočítateľných a nespočítateľných množín . O tom sa budete učiť v teórii množín.

Postupnosti vznikajú v matematike (ale nielen v nej) obyčajne veľmi prirodzeným spôsobom. Jedným z nich je, že (nie nutne všetky) prvky nejakej neprázdnej množiny A *oindexujeme* prirodzenými číslami. Indexovanie znamená vymenúvanie prvkov tejto množiny (prvý, druhý atď), t.j. ide o dohodu, ktorý prvok budeme považovať za prvý, ktorý za druhý atď. Podľa toho, čo sme povedali vyššie, nie je dovolené dva rôzne prvky množiny A prehlásiť za prvok s tým istým poradovým číslom (napr. za tretí), ale je dovolené, aby jeden a ten istý prvok množiny A mal viac rôznych poradových čísel (aby bol napr. tretím aj siedmym). Inak povedané, pri indexovaní sa môžme opätovne vracať k prvkom, ktorým už raz bol index pridelený (t.j. postupnosť nemusí byť prostá).

Príklad 1.1. Predstavme si, že uvažujeme kruh so stredom v počiatku a polomerom 1, ďalej kruh so stredom v počiatku a polomerom $\frac{1}{2}$, kruh so stredom v počiatku a polomerom $\frac{1}{3}$ atď, ako na Obrázku 1.1 . (Môže nás napríklad zaujímať, aký je prienik týchto kruhov, alebo sa zberáme uvažovať o valcoch s takýmito základňami a pod.). Prirodzené je napr. povedať si, že n-tým kruhom bude kruh s polomerom $\frac{1}{n}$ (pritom $n = 1, 2, 3, \dots$). Opísali sme práve pravidlo, ktoré každému $n \in \mathbb{N}$ priraďuje prvok množiny všetkých kruhov v rovine. Teda opísali sme postupnosť - postupnosť (niektorých) kruhov v rovine. Naše vyjadrovanie sa zostruční a prípadné ďalšie úvahy o týchto kruhoch sa sprehľadnia, ak kruhy vhodne označíme. Napríklad ten kruh, ktorý sme priradili číslu n, by sme mohli označiť K_n. Matematici v takomto prípade zvyknú hovoriť o postupnosti kruhov

$$K_1, K_2, \dots, K_n, \dots \ .$$

Všimnite si, že táto postupnosť je prostá, Je to postupnosť kruhov v rovine ale nie postupnosť všetkých kruhov v rovine.



Obr. 1.1: Niektoré kruhy v rovine

Zostaňme ešte na chvíľu pri uvedenom príklade. Čo je v ňom K_2, vieme - je to akýsi kruh; hovoríme tiež, že je to druhý *člen postupnosti*. Ale čo je to K? Mohli by sme povedať, že to samo osebe nie je nič, že zmysel má len celé označenie K_2 ale nie samotné K, alebo by sme mohli povedať, že je to jednoducho skratka slova kruh. Matematický pohľad na vec však je, že symbol K označuje samotnú postupnosť, teda to pravidlo, pomocou ktorého sme prirodzeným číslam priraďovali kruhy. Žiaľ, keď teda hovoríme o postupnosti $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$, dopúšťame sa nedôslednosti - veď sme práve povedali, že postupnosť, to je iba "to K". Ostáva len povedať, že táto nedôslednosť je bežná a že je často aj výhodné pod postupnosťou si nepredstaviť príslušné pravidlo na priraďovanie prvkov množiny A prirodzeným číslam, ale predstaviť si všetky členy postupnosti (t.j. tie prvky, ktoré boli prirodzeným číslam priradené), vymenované "zaradom" - najskôr prvý člen, potom druhý člen atď. Iste cítite, že je to v podstate to isté (a práve preto uvedená nedôslednosť "nevadí") : ak poznáte pravidlo K, tak "viete" (aspoň teoreticky) vymenúvať členy $K_1, K_2, \dots$ a obrátene, ak sú "zaradom" vymenované členy postupnosti, vieme aké prvky sú priradené jednotlivým prirodzeným číslam; je tým teda určené pravidlo K.

Iný prirodzený spôsob, ktorým v matematike vznikajú postupnosti, je ten, že počítame nejakú *veličinu, ktorá závisí od parametra* $n \in \mathbb{N}$. Ak nás nezaujíma výsledok iba pre nejaké konkrétne n, ale chceme ho vedieť pre každé n, počítame vlastne členy akejsi postupnosti. Ukážeme to na príkladoch.

Príklad 1.2. (Zložené úrokovanie s úrokom pripisovaným raz ročne.) Vložíme do banky sumu S_0 na ročný úrok p %. Zaujíma nás, koľko budeme mať v banke po n rokoch (za predpokladu, že by sa úroková miera nezmenila).

Počítajme. Po prvom roku budeme mať:

$$S_1 = S_0 + \frac{p}{100} \cdot S_0 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \ .$$

Po druhom roku budeme mať

$$S_2 = S_1 + \frac{p}{100} \cdot S_1 = S_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 .$$

Ľahko vypočítate, že po treťom roku to bude

$$S_3 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 .$$

Matematickou indukciou možno dokázať (urobte to to!), že po n rokoch budeme mať

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n . \tag{1.1}$$

Určili sme takto všetky členy postupnosti

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots .$$

(Samozrejme, môžme uvažovať aj postupnosť $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$. Tu S_0 je suma, ktorú budeme mať na účte po 0 rokoch, teda teraz.)

Príklad 1.3. (Zložené úrokovanie s úrokom pripisovaným viackrát ročne.) Predstavme si, že uložíme do banky na jeden rok sumu S_0 eur. Koľko budeme mať po roku? To samozrejme závisí od ročnej úrokovej miery. No dobre — ak je ročná úroková miera p percent, koľko budeme mať o rok? Tentoraz sa zdá, že odpoveď je už jasná. Z Príkladu 1.2 vieme, že budeme mať $S_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})$. Ale takto je to len v prípade keď nám banka ku vloženej sume pridá úrok raz za rok, a to celých p percent po uplynutí roka. Ako to však bude v prípade, keď banka pripisuje úroky viackrát, povedzme dvakrát ročne?[1] Všeobecnejšie: Akú sumu S_n budeme mať po roku v prípade zloženého úrokovania, keď sa úroky pripisujú n-krát ročne?[2]

Pre $n = 1$ ide o situáciu z predchádzajúceho príkladu, takže

$$S_1 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) .$$

Pre $n = 2$ si najskôr uvedomme, že po prvom polroku, teda po prvom pripísaní úrokov, budeme mať sumu $S_0 \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{100})$, a teda

$$S_2 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right) = S_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right)^2 .$$

Podobne možno vypočítať, že

$$S_3 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{100}\right)^3$$

a matematickou indukciou sa ľahko dokáže, že

$$S_n = S_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{100}\right)^n \tag{1.2}$$

(urobte!).

Opäť, podobne ako v príklade (1.2), sme určili všetky členy akejsi postupnosti $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

Vypočítali sme, koľko budeme mať pri počiatočnom vklade S_0 na účte po roku, ak sa každú n-tinu roka pripisuje úrok p/n %. Poznamenajme, že výsledok, teda vzťah (1.2) sme mohli získať aj jednoduchšie. Interpretujme n-tinu roka ako novú časovú jednotku; nazvime ju napr. *minirok*. Rok má teda n minirokov. Zaujíma nás, koľko budeme mať z počiatočnej sumy S_0 po n minirokoch, ak nám po každom miniroku pripíšu úrok p/n %. Situáciu možno interpretovať ako zložené úrokovanie s miniročným úrokom p/n % pripisovaným

[1] Po uplynutí pol roka nám k vloženej sume pridá $\frac{p}{2}$ percent a po uplynutí druhého pol roka nám k tomu, čo na účte máme (t.j. k vloženej sume a úrokom pripísaným po prvom polroku) pripíše $\frac{p}{2}$ percent.

[2] Vždy sa pripíše $\frac{p}{n}$ percent k tomu, čo práve máme na účte.

raz miniročne. Počiatočný vklad je S_0 a zaujíma nás, koľko budeme mať na účte po n minirokoch. Teda stačí vo vzorci (1.1) písať p/n namiesto p a dostaneme vzorec (1.2).

Podobne, ak by sme opäť mali p % úrok pripisovaný n-krát ročne (každú n-tinu roka, teda každý minirok sa pripíše p/n %) a zaujímalo by nás, koľko budeme mať po r rokoch (teda po nr minirokoch) pri počiatočnom vklade S_0, odpoveď je, že budeme mať

$$S_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{100}\right)^{nr} = S_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{100}\right)^{n}\right)^{r} .$$

Príklad 1.4. (Skutočný ročný úrok.) Ak vložíme na účet s desaťpercentným ročným úrokom sumu S_0, koľko budeme mať o rok ak sa úrok pripisuje raz mesačne? Zo vzorca (1.2) už vieme, že budeme mať

$$S_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{10}{100}\right)^{12} \doteq 1,1047\ S_0$$

Aký by musel byť ročný úrok pripisovaný *raz* ročne, aby sme z vloženej sumy S_0 dostali po roku túto istú sumu? Z rovnice

$$S_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{10}{100}\right)^{12}$$

dostaneme

$$p = 100 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{10}{100}\right)^{12} - 1\right) \doteq 10,47 .$$

Možno teda povedať, že ak ročný úrok 10 % je pripisovaný mesačne, tak "skutočný" ročný úrok je približne 10, 47 %.

Príklad 1.5. (Ako veľmi možno zbohatnúť častejším pripisovaním ročného úroku?) Predstavme si, že vložíme do banky 1 euro. Banku to tak pobaví, že nám dá ročný úrok 100 %. Ak je tento úrok pripisovaný raz ročne, budeme mať po roku 2 eurá. V predchádzajúcich príkladoch sme videli, že sa dá "zarobiť" na tom, že prehovoríme banku, aby nám dohodnutý ročný úrok 100 % pripisovala polročne a nie ročne (t.j., aby nám každý polrok pripísala úrok 50 %). V takom prípade budeme mať po roku trochu viac ako 2 eurá. Zarobíme ešte viac, ak prehovoríme banku, aby nám tento úrok pripisovala povedzme mesačne a ešte viac, ak bude pripisovaný každú sekundu a ešte viac, ak ... . Napadá nás otázka, či sa môže stať, že ak bude tento čas ("minirok") veľmi malý (teda n v Príklade 1.2 bude veľmi veľké), tak z vloženej sumy 1 euro budeme mať po roku povedzme viac než 1 milión eur? Inak povedané, bude pre veľké n hodnota (pozrite vzorec (1.2))

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{100}{100}\right)^{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \tag{1.3}$$

väčšia než 1 000 000? Všeobecnejšie: akou veľkou vieme urobiť túto hodnotu, ak vezmeme n veľmi veľké? Ľubovoľne veľkou? Alebo je to tak, že táto hodnota nikdy nepresiahne nejakú úroveň, povedzme 1000? Nie sme ešte pripravení dať odpoveď na túto otázku, neskôr tak však urobíme. Zatiaľ vám odporúčame vziať do ruky kalkulačku, pohrať sa s uvedeným problémom a vytvoriť si hypotézu, aká asi bude odpoveď. Určite nebude pre vás stratou času chvíľu si počítať, pretože postupnosť $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ je v matematike (a ako ukazuje príklad, nielen v matematike!) veľmi dôležitá. Nebojíme sa povedať, že jedna z najdôležitejších.

S postupnosťami sa v praxi stretávame tiež vtedy, keď si z nejakých praktických dôvodov všímame hodnoty nejakej funkcie iba pre diskrétne hodnoty argumentu. Môže ísť napr. o funkciu času, pričom si všímame hodnoty iba v pravidelných časových okamihoch. Hovoríme o *diskretizácii času*.

Príklad 1.6. V rozhlase sa každý deň môžeme dozvedieť, aká bola teplota ráno o 6, 00 hod. napr. na Sliači. Teplota vzduchu $T(t)$ v čase t na Sliači je reálna funkcia premennej $t \in \langle 0, \infty)$. My si ju však všímame (zaznamenávame) vždy ráno o 6,00 hod, teda v časových okamihoch $t_1 < t_2 < t_3 \dots$. Namiesto funkcie definovanej na intervale $\langle 0, \infty)$ tak dostávame funkciu, ktorú môžeme zapísať takto:

$$T(t_1), T(t_2), \dots, T(t_n), \dots$$

kde $T(t_n)$ označuje teplotu v čase t_n. Ak zápis zjednodušíme tým, že namiesto $T(t_n)$ budeme písať $T(n)$ resp. T_n, dostaneme postupnosť

$$T(1), T(2), \dots, T(n), \dots \quad \text{resp.} \quad T_1, T_2, \dots, T_n, \dots \ .$$

V predchádzajúcom príklade zvlášť jasne vidieť, že postupnosť je zobrazenie definované na množine $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísel.

1.2 Postupnosť ako špeciálny prípad zobrazenia

Zatiaľ sme o postupnosti trochu hmlisto hovorili ako o 'predpise'. Pre naše účely to síce postačí, kvôli úplnosti však uveďme, že postupnosť možno *definovať* pomocou pojmu zobrazenia:

Definícia 1.7. Zobrazenie $a : \mathbb{N} \to A$ (zobrazenie množiny všetkých prirodzených čísel $\mathbb{N}$ do množiny A) nazývame *postupnosť* prvkov množiny A.

Napr. ak A je množinou všetkých celých resp. reálnych čísel, tak $a : \mathbb{N} \to A$ nazývame postupnosť celých resp. reálnych čísel. [3]

Majme postupnosť $a : \mathbb{N} \to A$. Každému prvku $n \in \mathbb{N}$ je priradený jediný prvok množiny A, ktorý označujeme $a(n)$. Namiesto $a(n)$ býva zvykom písať a_n. Pretože zobrazenie $a : \mathbb{N} \to A$ je jednoznačne určené svojimi hodnotami a_n, $n \in \mathbb{N}$, namiesto symbolu a môžeme písať

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \ . \tag{1.4}$$

Iné používané zápisy sú $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_1^{\infty}$, $(a_n)_1^{\infty}$, prípadne $a_n; n \in \mathbb{N}$ alebo $a_n; n = 1, 2, \dots$ či dokonca $a_1, a_2, \dots$ (tento zápis je však už trochu neporiadny - pozri nižšie odsek 1.5).

Prvky $a_n, n = 1, 2, \dots$ nazývame *členy postupnosti* (1.4). Prvok a_k nazývame k-tý člen danej postupnosti.

Samozrejme, v horeuvedených zápisoch namiesto n (index n tu hrá úlohu nezávisle premennej) môžeme použiť aj iné písmeno, napr. k, i, j apod. Teda napr. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je to isté ako $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, totiž postupnosť $a_1, a_2, \dots$ (v tomto zápise žiadne n ani k nevidieť!), ktorej i-tý člen je prvok a_i pre každé $i \in \mathbb{N}$.

Definícia 1.8. Nech $m \in \mathbb{N}$. *Konečnou (m-člennou) postupnosťou* prvkov množiny A nazývame akékoľvek zobrazenie $a : \{1, 2, \dots, m\} \to A$.

Na označenie postupnosti $a : \{1, 2, \dots, m\} \to A$ používame tiež zápisy $\{a_n\}_{n=1}^{m}$, $(a_n)_{n=1}^{m}$, $\{a_n\}_1^{m}$, $(a_n)_1^{m}$, prípadne $a_1, a_2, \dots, a_m$ alebo $a_n; n = 1, 2, \dots, m$. Prvky $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ nazývame členy uvedenej konečnej postupnosti.

Postupnosť $a : \mathbb{N} \to A$ sa niekedy nazýva *nekonečná postupnosť*.

[3] Pozor, nesmiete si myslieť, že *každé* celé resp. reálne číslo je tu obrazom niektorého z prirodzených čísel. Ako sme už upozorňovali vyššie, v prípade reálnych čísel to dokonca ani nie je možné.

Dohoda. Pre nás slovo postupnosť bude znamenať nekonečnú postupnosť, t.j. zobrazenie definované na celej množine $\mathbb{N}$. Pokiaľ budeme výnimočne uvažovať konečnú postupnosť, vždy to zdôrazníme. [4]

Poznamenajme ešte, že pri zápise postupností je výhodné pripustiť niektoré odchýlky od definície. Tak napríklad, nedodržiava sa vždy doslovne požiadavka, že definičný obor postupnosti je množina všetkých prirodzených čísel. Z rôznych dôvodov sa stretávame s postupnosťami, ktorých prvý člen je označený trebárs a_0, x_{-3} či ω_4. Uvažujeme teda postupnosti

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{x_k\}_{k=-3}^{\infty}, \quad \{\omega_i\}_{i=4}^{\infty} .$$

Presne povedané, napr. v poslednom prípade ide o postupnosť $\{\omega_i^*\}_{i=1}^{\infty}$, kde $\omega_i^* = \omega_{i+3}$, teda $\omega_1^* = \omega_4$, $\omega_2^* = \omega_5$ atď. Ide tu teda len o formálnu odchýlku od definície.

Druhú nedôslednosť, ktorej sa dopúšťame pri zápise postupnosti, ukážeme na príklade. Ak napíšeme $\{\frac{n+1}{n^2-7n+10}\}_{n=1}^{\infty}$, nejde v pravom slova zmysle o postupnosť, lebo výraz v zloženej zátvorke nie je definovaný pre $n = 2$ a $n = 5$. Ak označíme $a_n = \frac{n+1}{n^2-7n+10}$, máme teda dobre definované hodnoty

$$a_1, a_3, a_4, a_6, a_7, a_8, \dots .$$

Hovoríme o "postupnosti" $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ale správnejšie by bolo hovoriť o postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$b_1 = a_1, b_2 = a_3, b_3 = a_4, b_4 = a_6, b_5 = a_7, b_6 = a_8, \dots .$$

Ak budeme hovoriť, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nejakú vlastnosť, budeme mať na mysli, že postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ má túto vlastnosť. Túto dohodu prijímame preto, lebo pri skúmaní niektorých dôležitých vlastností postupností (napr. pri skúmaní limít postupností v matematickej analýze) nevadí, ak nie sú určené všetky členy postupnosti. Počet nedefinovaných členov však musí byť konečný. Teda od istého prirodzeného čísla (indexu) počnúc musia už byť definované všetky členy (v našom prípade poznáme všetky členy počnúc šiestym).

1.3 Explicitné a rekurentné určenie postupnosti

Určiť (definovať) postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ znamená určiť všetky jej členy. To možno urobiť (ak si teraz nebudeme všímať napr. rôzne slovné opisy) v zásade dvoma spôsobmi.

Jeden spôsob je ten, že uvedieme *explicitný vzťah* na výpočet všeobecného člena, napr.

$$a_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{1.5}$$

Druhý spôsob je tzv. *rekurentné* určenie postupnosti, ktoré spočíva v tom, že určíme niekoľko prvých členov postupnosti a pre ostatné členy postupnosti zadáme predpis, ako ich určiť pomocou (všetkých alebo niekoľkých) predchádzajúcich členov. Napríklad:

$$\underbrace{b_1 = 1,\ b_2 = 4,\ b_3 = 9}_{\text{počiatočné podmienky}}, \quad \underbrace{b_{n+3} = 3b_{n+2} - 3b_{n+1} + b_n, \quad n = 1, 2, \dots}_{\text{rekurentný vzťah}} . \tag{1.6}$$

Počiatočné podmienky udávajú niekoľko členov postupnosti (v našom prípade prvé tri členy postupnosti), rekurentný vzťah umožňuje postupne vypočítavať ostatné členy. Uvedomme

[4] Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ študenti často čítajú ako "á jedna, á dva, a tak ďalej, až á en". Je zrejmé, že je to chybne, išlo by v takom prípade o konečnú, n-člennú postupnosť. Správne to je "á jedna, á dva, a tak ďalej, á en, a tak ďalej".

si, že postupnosť spĺňajúca (1.5) existuje a to práve jedna — prvé tri členy sú dané, štvrtý sa jednoznačne vypočíta pomocou prvých troch, piaty pomocou druhého, tretieho a už vypočítaného štvrtého atď. Naozaj, ak v rekurentnom vzťahu v (1.6) položíme $n = 1$, dostaneme

$$b_4 = 3b_3 - 3b_2 + b_1 = 3 \times 9 - 3 \times 4 + 1 = 16 = 4^2,$$

pre $n = 2$ dostaneme

$$b_5 = 3b_4 - 3b_3 + b_2 = 3 \times 16 - 3 \times 9 + 4 = 25 = 5^2,$$

a takto možno pokračovať ďalej. Vidíme, prečo sa hovorí o rekurentnom určení postupnosti — aby sme vedeli určiť niektoré členy, musíme "bežať späť "[5], k predchádzajúcim členom. Postupnosti definované rekurentne sa trochu nepresne, ale bežne nazývajú *rekurentné postupnosti*. Nepresnosť je v tom, že na samotnej postupnosti $a_1, a_2, \ldots$ niet nič rekurentného. Rekurentný je len predpis, ktorým je definovaná.

Príklad 1.9. Určíme prvých 6 členov nasledujúcej rekurentne určenej postupnosti:

$$a_1 = 2, a_2 = 3, \quad a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \text{ pre } n = 3, 4, \ldots .$$

Prvé dva členy sú určené, počnúc tretím členom je každý člen súčinom všetkých predchádzajúcich členov. Postupnosť teda začína takto: $2, 3, 6, 36, 1296, 1\,679\,616\ldots$ alebo, čo je prehľadnejšie: $2, 3, 6, 6^2, 6^4, 6^8, \ldots$.

Príklad 1.10. Postupnosť mnohočlenov je určená rekurentne takto:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, \quad P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x),\ n = 0, 2, \ldots .$$

Chceme určiť $P_4(x)$. Postupne dostávame:

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= x.P_1(x) - P_0(x) = x \cdot x - 1 = x^2 - 1 \\
P_3(x) &= x.P_2(x) - P_1(x) = x. \cdot (x^2 - 1) - x = x^3 - 2x \\
P_4(x) &= x.P_3(x) - P_2(x) = x. \cdot (x^3 - 2x) - (x^2 - 1) = x^4 - 3x^2 + 1 .
\end{aligned}$$

Vráťme sa teraz k postupnostiam (1.5) a (1.6). Všimnite si, že sa v prvých piatich členoch zhodujú. Napadá nás, že sa možno zhodujú aj vo všetkých ďalších členoch, teda že je to jedna a tá istá postupnosť.

Príklad 1.11. Dokážeme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ určená vzťahom (1.5) a postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ určená vzťahom (1.6) sa zhodujú, teda že $a_n = b_n$ pre *každé* $n = 1, 2, \ldots$. Dokážeme to matematickou indukciou.

Prvý krok. Platí

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1 = 1^2 = a_1, \\
b_2 &= 4 = 2^2 = a_2, \\
b_3 &= 9 = 3^2 = a_3.
\end{aligned}$$

Druhý krok (indukčný krok). Predpokladajme, že $b_k = a_k$, $b_{k+1} = a_{k+1}$, $b_{k+2} = a_{k+2}$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ (tzv. indukčný predpoklad). Dokážeme, že potom aj $b_{k+3} = a_{k+3}$. Naozaj,

$$\begin{aligned}
b_{k+3} &= 3b_{k+2} - 3b_{k+1} + b_k && \text{(podľa rekurentného vzťahu z (1.6))} \\
&= 3a_{k+2} - 3a_{k+1} + a_k && \text{(podľa indukčného predpokladu)} \\
&= 3(k+2)^2 - 3(k+1)^2 + k^2 && \text{(podľa (1.5))} \\
&= (k+3)^2 \\
&= a_{k+3} && \text{(podľa (1.5)).}
\end{aligned}$$

Dôkaz je skončený.

[5]lat. recurrere - bežať späť

Vidíme, že explicitne určenú číselnú postupnosť (1.5) možno určiť rekurentne vzťahom (1.6). Prechod od explicitného vyjadrenia k rekurentnému je možný vždy, je na to dokonca jednoduchý všeobecný postup. Ak totiž máme postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ danú "vzorcom"

$$a_n = v(n), \quad n = 1, 2, \dots ,$$

tak vieme vypočítať a_1 a okrem toho máme vzťah

$$a_{n+1} = v(n+1) = v(n) + v(n+1) - v(n) = a_n + v(n+1) - v(n) ,$$

takže máme pre $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rekurentné vyjadrenie. Pre našu postupnosť (1.5) to dáva:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n+1} - a_n = a_n + (n+1)^2 - n^2 = a_n + 2n + 1,$$

čo je jej iné, jednoduchšie, rekurentné vyjadrenie ako (1.6). Vidíme teda, že rekurentné vyjadrenie postupnosti nie je jednoznačne určené — postupnosť môže mať rekurentné vyjadrenia, ktoré "vyzerajú rôzne" (teda na vzhľad, čiže "fotograficky" sa odlišujú [6]) a až bližšie skúmanie ukáže, že naozaj určujú jednu a tú istú postupnosť. [7]

Zatiaľ čo prechod od explicitného vyjadrenia k rekurentnému je ľahký, obrátene je to často ťažká až nemožná úloha. V princípe síce každú rekurentnú postupnosť možno určiť aj explicitne, ale ide tu len o teoretickú možnosť, lebo len zriedkavo sa nám to aj prakticky podarí. [8]

Vo všeobecnosti ťažko povedať, či je explicitné alebo rekurentné určenie postupnosti "krajšie", "lepšie", "výhodnejšie", "jednoduchšie" ako to druhé. To závisí od konkrétnej situácie. Predstavme si napr., že potrebujeme vedieť len člen a_{2007} postupnosti štvorcov prirodzených čísel a ostatné členy postupnosti nás nezaujímajú. Ak by sme mali postupovať podľa rekurentného vyjadrenia (1.6), bolo by nepríjemné, že musíme "zbytočne" najskôr počítať všetky predchádzajúce členy — určite je pre takýto cieľ výhodnejšia explicitná formula (1.5). Naproti tomu v prípade tzv. Fibonacciho postupnosti (pozri časť 4.4) je explicitné vyjadrenie veľmi komplikované a ak by našou úlohou bolo vypočítať prvých dvadsať členov Fibonacciho postupnosti, určite by sme uprednostnili rekurentné vyjadrenie.

Postupy ako možno pre niektoré dôležité triedy rekurentne určených postupností nájsť ich explicitné vyjadrenie, sa naučíme neskôr, v Kapitole 4.

1.4 Iteračné postupnosti

Nech X je neprázdna množina a $f : X \to X$ je funkcia.[9] Uvažujme postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ zadanú rekurentne takto: Nech $x_0 \in X$ je nejako zvolené a nech pre ostatné členy postupnosti platí

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \geq 0 .$$

[6] podobne ako sa na vzhľad odlišujú čísla 5 a $7 - 2$

[7] Samozrejme, aj dve zdanlivo rôzne explicitné vyjadrenia môžu dávať jednu a tú istú postupnosť. Napr. $a_n = n^2$ je to isté ako $a_n = (n+1)^2 - 2n - 1$.

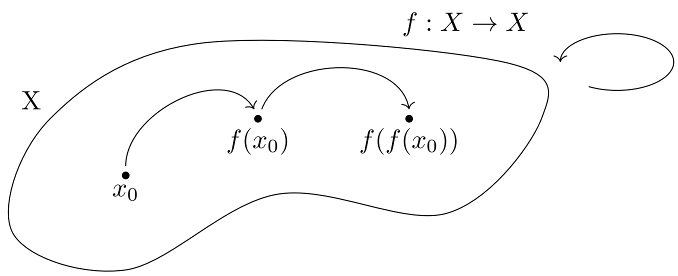
[8] Určite by napríklad bolo veľmi ťažké nájsť explicitné vyjadrenie pre nasledujúcu postupnosť :

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}, \quad a_2 = \log_{10}(\pi - 1), \\ a_{n+2} &= \sin(n^3 + 2n - \sqrt{3 + \cos^{2000} n}) \cdot (n^2 + \cos a_{n+1}) + \\ &\quad + 12345(n^7 - n - 1) \cdot (\log_2 n + 2^{a_n - n}), \quad n = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

[9] Stotožňujeme pojmy funkcia a zobrazenie. Teraz stačí vedieť, že f je predpis, ktorý každému bodu $x \in X$ priradí práve jeden bod $f(x) \in X$.

Teda zvolíme bod x_0, zobrazíme ho funkciou f, získaný bod znovu zobrazíme funkciou f atď, ako na Obrázku 1.2. Dostaneme tak postupnosť

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad = \quad x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots, \underbrace{f(\dots f(f(}_{n\text{-krát}} x_0)) \dots) \,.$$



Obr. 1.2: Iteračná postupnosť

Takúto postupnosť nazývame *iteračná postupnosť* prislúchajúca k funkcii f a bodu x_0 alebo iteračná postupnosť bodu x_0 vzhľadom na funkciu f alebo iteračná postupnosť funkcie f generovaná bodom x_0. V teórii dynamických systémov sa používa názov *trajektória* bodu x_0 vzhľadom na funkciu f.

Označme tzv. k-tú *iteráciu* funkcie f, t.j. kompozíciu $\underbrace{f \circ \dots f \circ f}_{k\text{-krát}}$ symbolom $f^{\circ k}$ alebo len krátko f^k (pozor, napriek takémuto označeniu tu nejde o žiadne umocňovanie ale o opakované skladanie funkcie so sebou samou). Teda

$$f^{\circ 1} = f^1 = f, \quad f^{\circ 2} = f^2 = f \circ f, \quad f^{\circ 3} = f^3 = f \circ f \circ f, \dots \,.$$

Niekedy sa ešte označuje symbolom $f^{\circ 0}$ alebo krátko f^0 identita na množine X, teda funkcia $\mathrm{id}_X : X \to X$ definovaná tak, že $\mathrm{id}_X(x) = x$ pre každé $x \in X$. Iterácie funkcie f možno teda rekurentne definovať takto:

$$f^0 = \mathrm{id}_X, \qquad f^n = f \circ f^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \,.$$

S využitím týchto označení môžeme horeuvedenú iteračnú postupnosť zapísať aj v tvare $(f^n(x_0))_{n=0}^{\infty}$.

Možno ste si všimli, že iteračné postupnosti sú len špeciálnym prípadom rekurentných postupností. Inak povedané, každá iteračná postupnosť je rekurentná postupnosť. Obrátene to však vo všeobecnosti nie je pravda.

Príklad 1.12. Rekurentná postupnosť

$$a_0 = 3, \qquad a_{n+1} = (a_n)^2 + 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

je iteračná postupnosť prislúchajúca k bodu 3 a funkcii $f(x) = x^2 + 1$. Platí totiž $a_{n+1} = f(a_n)$.

Naproti tomu rekurentná postupnosť

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

nie je iteračná, pretože $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ nie je tvaru $a_{n+1} = f(a_n)$. Naozaj, $a_n + 2n + 1$ nezávisí len od a_n ale aj od n.

1.5 Problémy s určovaním všeobecného člena postupnosti

Ak pracujeme s nejakou postupnosťou, často je výhodné určiť jej n-tý člen explicitne. To môže byť niekedy veľmi ťažké, napr. ak je postupnosť určená rekurentne.

Príklad 1.13. Už od čias Euklida sa vie, že prvočísel je nekonečne veľa. Množina všetkých prvočísel je usporiadaná podľa veľkosti (lebo takou je jej nadmnožina $\mathbb{N}$). Označme symbolom p_n n-té najmenšie prvočíslo (presnejšie, matematickou indukciou definujme: nech p_1 je najmenšie prvočíslo a pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ nech p_n je najmenšie prvočíslo väčšie ako p_{n-1} – to bola vlastne slovná rekurentná definícia). Tým, že sme zaviedli toto označenie, sme definovali postupnosť p, ktorú vzhľadom na vyššie spomínané zvyklosti môžme napísať aj v tvare

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots, p_n, \ldots .$$

Táto postupnosť je dobre definovaná, pretože sme slovne presne povedali, čo je p_n (n-té najmenšie prvočíslo), teda význam symbolu p_n je jednoznačný. Doposiaľ však nikto na svete nenašiel nejaký uspokojivý "vzorec", ktorý by umožňoval "vypočítať" číslo p_n (presnejšie, taký vzorec existuje, ale je príliš komplikovaný na to, aby sa dal rozumne použiť na uvedený účel).

V tejto časti však chceme hlavne upozorniť na nasledujúcu vec.

Často sa v literatúre (a v istej obmene aj v kútikoch rekreačnej matematiky v rôznych časopisoch) možno stretnúť s úlohami typu : Určte *všeobecný člen* postupnosti

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots .$$

Očakáva sa odpoveď $a_n = n^2$. Treba si však uvedomiť, že takáto odpoveď nie je celkom v poriadku. Zo znalosti prvých piatich členov postupnosti totiž nie je možné jednoznačne určiť ostatné členy. Postupnosť so všeobecným členom $a_n = n^2$ nie je jediná, ktorá má prvých 5 členov $1, 4, 9, 16, 25$. V skutočnosti existuje nekonečne veľa takých postupností. Môžu to byť napr. postupnosti so všeobecnými členmi

$$b_n = \begin{cases} n^2, & \text{ak } n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ 3n + 1, & \text{ak } n \geq 6 \end{cases}$$

alebo

$$c_n = \begin{cases} n^2, & \text{ak } n \leq 100, \\ 0, & \text{ak } n \geq 101. \end{cases}$$

Je možné však aj to, aby všeobecný člen takej postupnosti bol určený jediným výrazom, napr.

$$d_n = n^2 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

(overte, že $d_n = n^2$ pre $n \leq 5$ ale $d_n \neq n^2$ pre každé $n \geq 6$). Pozmeňte vzťah pre d_n tak, aby bolo zrejmé, že existuje nekonečne veľa takých postupností.

1.6 Množina hodnôt postupnosti. Konštantné a prosté postupnosti

Treba dôsledne rozlišovať medzi postupnosťou $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ a množinou jej hodnôt:

Definícia 1.14. *Množinou hodnôt postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazývame množinu $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (t.j. množinu všetkých jej členov).

Príklad 1.15. (Nekonečná) postupnosť reálnych čísel $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má konečnú množinu hodnôt $\{-1,+1\}$. Tú istú množinu hodnôt majú aj iné postupnosti, napr. $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

Teda z množiny hodnôt postupnosti nemožno vo všeobecnosti postupnosť zrekonštruovať (nemožno určiť jednotlivé členy $a_1, a_2, \dots$). Jedinou výnimkou je prípad jednoprvkovej množiny $\{c\}$. Takú množinu hodnôt má jedine postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v ktorej $a_n = c$ pre $n = 1, 2, \dots$; píšeme tiež $(c)_{n=1}^{\infty}$. Je prirodzené nazvať takú postupnosť konštantnou:

Definícia 1.16. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva *konštantná* (alebo aj *stacionárna*), ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_{n+1}$, čiže ak $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots$.

V konštantnej postupnosti sa všetky členy rovnajú. Akýmsi protikladom konštantných postupností sú tie postupnosti, v ktorých sa žiadne dva členy nerovnajú.

Definícia 1.17. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva *prostá*, ak pre každé dve čísla $n, k \in \mathbb{N}$, $n \neq k$, platí $a_n \neq a_k$ (ekvivalentná formulácia: ak pre každé dve čísla $n, k \in \mathbb{N}$ platí implikácia $a_n = a_k \Rightarrow n = k$).

Príklad 1.18. Postupnosť z príkladu 1.1 je prostá.

Príklad 1.19. Postupnosť $a_n = \frac{2n-3}{3n+2}$, $n = 1, 2, \dots$ je prostá, lebo z rovnosti $\frac{2n-3}{3n+2} = \frac{2k-3}{3k+2}$ jednoduchými ekvivalentnými úpravami dostaneme $n = k$ (urobte !).

1.7 Zoraďovanie množín do postupností

Definícia 1.20. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prvkov množiny A. Budeme hovoriť, že je to *postupnosť všetkých prvkov množiny* A, ak sa množina hodnôt tejto postupnosti rovná množine A. V takom prípade tiež hovoríme, že množina A je *zoradená do postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 1.21. Postupnosť z príkladu 1.1 nie je postupnosťou všetkých kruhov v rovine.

> Dá sa ukázať, že postupnosť všetkých kruhov v rovine neexistuje – všetkých kruhov v rovine je 'príliš veľa' na to, aby sa dali zoradiť do postupnosti.

Príklad 1.22. V príklade 1.13 sme zoradili do (prostej) postupnosti množinu všetkých prvočísel.

Príklad 1.23. Postupnosť $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť všetkých párnych prirodzených čísel. Je to postupnosť prirodzených čísel, nie je to však postupnosť všetkých prirodzených čísel.

Príklad 1.24. Ukážeme, že množina $\mathbb{Z}$ všetkých celých čísel sa dá zoradiť do postupnosti. Začneme upozornením, že

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

nie je zoradenie množiny $\mathbb{Z}$ všetkých celých čísel do postupnosti (lebo to vôbec nie je postupnosť v zmysle našej definície). Jedným z mnohých zoradení $\mathbb{Z}$ do postupnosti je

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \ .$$

Ide o postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} -\frac{n-1}{2}, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je nepárne,} \\ \frac{n}{2}, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je párne.} \end{cases}$$

Nie je ľahké vymyslieť predpis pre túto postupnosť, ktorý by bol daný jedným “vzorcom”. Ukážeme, že v istom zmysle (použitím funkcie celá časť, čo je jedna z tzv. neelementárnych funkcií) sa to dá. Predovšetkým, ak si uvedomíme, že $0 = -0$, môžeme povedať, že znamienka sa pravidelne striedajú. Striedanie znamienok sa dá zariadiť činiteľom $(-1)^n$ alebo $(-1)^{n+1}$. Pretože my máme záporné znamienko pre nepárne n a kladné pre párne n, vyhovuje $(-1)^n$. Horšie je to s absolútnymi hodnotami členov postupnosti. Všimnime si tabuľku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\lvert a_n \rvert$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	...

Pri troche šťastia si všimneme, že číslo $|a_n|$ je vždy zhruba polovica z čísla n. Niekedy je to presne polovica, niekedy nie. Ale keďže nemáme lepší nápad, skúsime zisťovať, či by sa vo vzorci nemohlo vyskytovať číslo $n/2$. Koniec koncov, isté je, že $|a_n|$ sa viac “ponáša” na $n/2$ než na n. Pridáme preto do našej tabuľky ešte riadok s hodnotami $n/2$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\frac{n}{2}$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$	...
$\lvert a_n \rvert$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	...

Vidíme, že číslo $|a_n|$ sa získa z čísla $n/2$ zaokrúhlením nadol. Presnejšie, $|a_n|$ je najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako $n/2$. Hovorí sa tomu *celá časť čísla* $n/2$ (niekedy sa vraví *dolná celá časť*) a značí sa symbolom $[\frac{n}{2}]$, modernejšie $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.[10] Dostávame tak vzorec

$$a_n = (-1)^n \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \qquad n = 1, 2, \dots \,.$$

Samozrejme, mali by sme dokázať, že vzorec platí pre každé prirodzené n a nielen pre prvých deväť prirodzených čísel, ktoré sme odskúšali v našej tabuľke. Keďže našou úlohou bolo zoradiť množinu $\mathbb{Z}$ do postupnosti, ide hlavne o dôkaz, že množina hodnôt postupnosti $((-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)_{n=1}^{\infty}$ je práve množina $\mathbb{Z}$. Prenechávame to na čitateľa. Asi najjednoduchšie je uvažovať najskôr o členoch s párnymi indexami n ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$) a potom o členoch s nepárnymi indexami n ($n = 2k + 1$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$).

Príklad 1.25. Uvažujme o dvojrozmernej tabuľke

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots & \frac{n}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots & \frac{n}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots & \frac{n}{3} & \cdots \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
\frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \frac{4}{n} & \cdots & \frac{n}{n} & \cdots \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill}
\end{array}$$

Je zrejmé (vysvetlite), že tabuľka obsahuje práve všetky kladné racionálne čísla, každé je však v tabuľke napísané nekonečne veľa krát (napríklad číslo 1 je tam napísané aj ako $\frac{1}{1}$, aj ako $\frac{2}{2}$, aj ako $\frac{3}{3}$ atď.) Ak budeme prechádzať tabuľkou po líniách vedených “severovýchodným” smerom a začneme v ľavom hornom rohu, zoradia sa prvky tabuľky do postupnosti

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \dots, r_n, \dots \,.$$

Všimnite si, že uvedená postupnosť predstavuje zoradenie všetkých symbolov v tabuľke do prostej postupnosti. Zároveň je to zoradenie množiny $\mathbb{Q}^+$ všetkých kladných racionálnych čísel do postupnosti, ktorá nie je prostá. Samozrejme, nie je problém zoradiť množinu $\mathbb{Q}^+$ aj do prostej postupnosti. Stačí v nájdenej postupnosti “vynechať” čísla, ktoré v nej už raz uvedené boli (teda tie čísla r_n, pre ktoré existuje také $m < n$, že $r_m = r_n$). Dostaneme postupnosť

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \dots, r_n^*, \dots \,.$$

[10] Anglicky *floor function*, čiže podlahová funkcia, čo je výstižný názov, keďže $\lfloor x \rfloor$ je najväčšie celé číslo s vlastnosťou $\lfloor x \rfloor \le x$.

1.8 Vybrané postupnosti (podpostupnosti)

Pozerajme sa na chvíľu na postupnosť

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots, a_n, \dots$$

ako na 'zástup' prvkov. Vynechajme v tomto 'zástupe' niektoré prvky – konečne veľa alebo nekonečne veľa prvkov, ale tak, aby ich aj zostalo nekonečne veľa. Vynechajme napr. všetky tie prvky, ktorých index je násobkom 3. Dostaneme 'zástup'

$$a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_8, a_{10}, \dots$$

ktorý opäť môžme považovať za postupnosť – veď sú tu vymenované akési prvky a vidíme, ktorý je prvý, ktorý druhý, ktorý tretí, atď. Môžme sa naň teda dívať ako na novú postupnosť

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, \dots, b_n, \dots$$

v ktorej $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_3 = a_4$ atď. Pre každé n sa b_n rovná nejakému a_k. Keďže toto k závisí od n, označíme ho $k(n)$ alebo k_n. (Máme $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4, \dots$.) Teda

$$b_n = a_{k(n)} \qquad \text{alebo} \qquad b_n = a_{k_n}$$

Túto postupnosť nazývame vybranou postupnosťou (alebo podpostupnosťou) pôvodnej postupnosti.

Definícia 1.26. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prvkov množiny A a nech $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel [11]. Potom sa postupnosť $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ nazýva *vybraná postupnosť* z postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ alebo *podpostupnosť* postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. (Hovoríme tiež, že postupnosť $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.)

Možno trochu nesprávne, ale v záujme zdôraznenia budeme niekedy dokonca hovoriť, že sme z postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vybrali *pod*postupnosť $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$.

Teda povedať, že nejaká postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, znamená tvrdiť, že existuje taká rastúca postupnosť $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n = a_{k_n}$.

Všimnite si, že množina hodnôt podpostupnosti je vždy (vlastnou alebo nevlastnou) podmnožinou množiny hodnôt postupnosti. (Nájdite príklady, keď ide o vlastnú podmnožinu a príklady, keď ide o nevlastnú podmnožinu!) Teda ak zistíte, že množina hodnôt postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ nie je podmnožinou množiny hodnôt postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tak $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ určite nie je podpostupnosť postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 1.27. V príklade 1.25 sa nám "nepáčila" postupnosť $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, prešli sme k jej podpostupnosti $(r_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Postupnosť $(k_n)_{n=1}^{\infty}$, udávajúca "poradové čísla" tých prvkov postupnosti $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, ktoré si ponechávame, začína takto: $(k_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 2, 3, 4, 6, 7, \dots$.

Príklad 1.28. V príklade 1.13 sme skúmali postupnosť všetkých prvočísel. Všimnite si, že je to vybraná postupnosť z postupnosti $(n)_{n=1}^{\infty} = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ všetkých prirodzených čísel. Všeobecnejšie, akákoľvek rastúca postupnosť prirodzených čísel je podpostupnosť postupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$.

Pretože dvojité indexy sú dosť neprehľadné, je niekedy rozumné prejsť od označení typu x_n k označeniam typu $x(n)$ (tu x je označenie postupnosti, $x(n) = x_n$ je hodnota tejto postupnosti v čísle n, t.j. n-tý člen postupnosti x).

[11] t.j. $k_1, k_2, \dots$ sú prirodzené čísla a platí $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$.

Príklad 1.29. Majme postupnosť reálnych čísel $a_n = n^2 - 5n + \sqrt{2}$, $n = 1, 2, \dots$ a zvoľme $k_n = 3n + 7$, $n = 1, 2, \dots$. Pretože $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (overte!), môžme vytvoriť podpostupnosť $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Dostaneme:

$$a_{k_n} = a(k_n) = a(3n+7) = (3n+7)^2 - 5 \cdot (3n+7) + \sqrt{2} = 9n^2 + 27n + 14 + \sqrt{2}\ .$$

Teda postupnosť $(9n^2 + 27n + 14 + \sqrt{2})_{n=1}^{\infty}$ je podpostupnosť postupnosti $(n^2 - 5n + \sqrt{2})_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 1.30. Riešme obrátenú úlohu. Sú dané postupnosti $x_n = 9n^2 + 27n + 14 + \sqrt{2}$, $n = 1, 2, \dots$ a $y_n = n^2 - 5n + \sqrt{2}$, $n = 1, 2, \dots$. Máme zistiť, či niektorá z nich je vybraná z tej druhej.

Najskôr ukážeme, že $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ nie je vybraná z $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Najľahšie sa to nahliadne tak, že si všimneme, že $y_1 < 0$ ale $x_n \geq 0$ pre každé n. (Teda množina hodnôt postupnosti y nie je podmnožinou množiny hodnôt postupnosti x. Prvok y_1 sa totiž nemôže rovnať žiadnemu prvku x_{k_n}, nech by sme už postupnosť $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ zvolili akokoľvek.)

Teraz ideme zisťovať, či $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, t.j. či platí $x_n = y_{k_n}$, $n = 1, 2, \dots$, pre nejakú rastúcu postupnosť prirodzených čísel $(k_n)_{n=1}^{\infty}$. Zisťujme, aké by muselo byť k_n, aby platilo

$$9n^2 + 27n + 14 + \sqrt{2} = (k_n)^2 - 5 \cdot k_n + \sqrt{2}\ , \qquad n = 1, 2, \dots\ .$$

Fixujme n a kvôli zjednodušeniu označenia píšme na chvíľu K namiesto k_n. Z predchádzajúceho vzťahu dostaneme po úprave kvadratickú rovnicu pre K:

$$K^2 - 5K - (9n^2 + 27n + 14) = 0$$

Keď ju vyriešite, dostanete korene $K_1 = 3n + 7$ a $K_2 = -3n - 2$. Z dvoch postupností $k_n = 3n + 7$ a $k_n = -3n-2$ prvá je rastúcou postupnosťou prirodzených čísel, druhá nie (druhá je klesajúca a predovšetkým to vôbec nie je postupnosť prirodzených čísel). Teda

$$x_n = y_{3n+7}\ , \qquad n = 1, 2, \dots\ ,$$

čo znamená, že postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z postupnosti $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 1.31.

Ak $b_n = a_{k_n}$ je podpostupnosť postupnosti a_n, tak pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$k_n \geq n$$

Overte si to na oboch predchádzajúcich príkladoch a dokážte to matematickou indukciou!

> Všimnite si, že vybraná postupnosť je vlastne špeciálny prípad zloženého zobrazenia. Najprv sa použije zobrazenie $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré posiela n do $k(n) = k_n$ a potom sa použije daná postupnosť, čiže zobrazenie $a : \mathbb{N} \to A$, ktoré posiela m do $a(m) = a_m$. Výsledkom zloženia týchto zobrazení je vybraná postupnoť, čiže zobrazenie $b : \mathbb{N} \to A$, ktoré posiela n do $b(n) = b_n = a_{k_n}$.

Uvedomte si, že ak $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná postupnosť z postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná postupnosť z postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, tak $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná postupnosť z postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

1.9 Periodické postupnosti

Postupnosť dní v kalendári

P,U,S,Š,P,S,N,P,U,S,Š,P,S,N,P,U,S,Š,P,S,N,...

sa vyznačuje pravidelnosťou – pre každé n platí, že n-tý člen postupnosti sa rovná n+7-tému. Dni v týždni sa opakujú s periódou 7. Tento pojem prevzala z bežnej reči aj matematika.

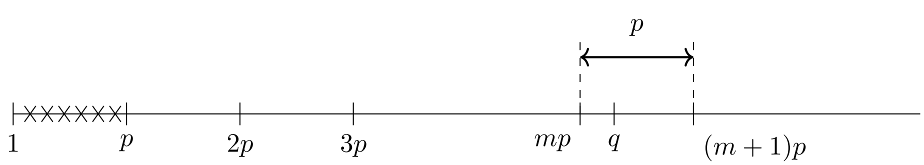
Definícia 1.32. Postupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prvkov množiny A sa nazýva *periodická*, ak existuje také $p \in \mathbb{N}$, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+p} = a_n$. Číslo p sa v takom prípade nazýva periódou danej postupnosti.[12]

Postupnosť nemusí mať žiadnu periódu (nemusí byť periodická). Takou je napr. postupnosť $(n)_{n=1}^{\infty}$ alebo postupnosť všetkých prvočísel. Ak však postupnosť má aspoň jedno prirodzené číslo za svoju periódu, tak ich už má nekonečne veľa. Naozaj, ak číslo p je perióda nejakej postupnosti, tak aj čísla $2p, 3p, \dots$ sú jej periódami (vysvetlite!).

Aby sme sa vyhli komplikovaným indexom, budeme v tejto časti namiesto a_n písať aj $a(n)$.

Veta 1.33. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je periodická postupnosť. Potom medzi jej periódami existuje najmenšia (voláme ju* základná perióda*) a množina všetkých periód danej postupnosti pozostáva práve zo všetkých prirodzených násobkov základnej periódy.*

Dôkaz. Keďže daná postupnosť je periodická, aspoň jedno prirodzené číslo je jej periódou. Nech p je najmenšie číslo v množine všetkých periód.[13] Potom všetky čísla $p, 2p, 3p, \dots$ sú periódami. Ukážeme, že iných periód už niet. Predpokladajme, že by to tak nebolo, teda že existuje perióda q, ktorá nie je násobkom p, pozri Obrázok 1.3. Z definície čísla p vyplýva, že $q \geq p$ a keďže q nie je násobkom p, platí $mp < q < (m+1)p$ pre nejaké prirodzené m.



Obr. 1.3: Medzi číslami menšími ako p niet periód, čísla $p, 2p, 3p, \dots$ sú periódy. Predpokladáme existenciu aj inej periódy q, chceme spor.

Ukážeme, že prirodzené číslo $1 \leq q - mp < p$ je periódou našej postupnosti, čo bude spor s tým, že p je najmenšia perióda. Nech teda $n \in \mathbb{N}$. Potrebujeme dokázať, že $a(n+(q-mp)) = a(n)$. Ak najskôr využijeme, že mp je perióda a potom, že q je perióda, dostaneme:

$$a(n + (q - mp)) = a(n + (q - mp) + mp) = a(n + q) = a(n) \ .$$

□

Príklad 1.34. Postupnosť dní v týždni má základnú periódu 7. Množina všetkých periód tejto postupnosti je množina $\{7, 14, 21, \dots, 7n, \dots\}$, ktorú býva zvykom označovať symbolom $7\mathbb{N}$. (Podobne množinu $\{p, 2p, 3p, \dots\}$ označujeme symbolom $p\mathbb{N}$.)

Príklad 1.35. Postupnosť je konštantná práve vtedy, keď číslo 1 je jej periódou (teda práve vtedy, keď všetky prirodzené čísla sú jej periódami). Vysvetlite!

[12] Niektorí autori v tejto definícii berú $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Pre nich $p = 0$ je automaticky periódou každej postupnosti a postupnosť nazývajú periodickou, ak má aspoň jednu nenulovú periódu. My tak v prípade postupností nerobíme, neskôr pri funkciách však budeme aj nulu považovať za periódu (bude to mať rozumný dôvod).

[13] Využívame, že v každej neprázdnej podmnožine množiny $\mathbb{N}$ existuje najmenší prvok. Múdro sa tomu hovorí, že množina $\mathbb{N}$ je *dobre usporiadaná*. Všimnite si, že množina $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel (s obvyklým usporiadaním) dobre usporiadaná nie je, pretože napr. v otvorenom intervale $(1, 2)$ niet najmenšieho prvku.

Príklad 1.36. Postupnosť

$$\left\{\sin(n \cdot \frac{\pi}{2})\right\}_{n=0}^{\infty} = 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$$

je periodická s periódou 4. Naozaj, pre každé nezáporné celé číslo n platí, že (označme $a_n = \sin(n \cdot \frac{\pi}{2})$)

$$a_{n+4} = \sin\Big((n+4) \cdot \frac{\pi}{2}\Big) = \sin\Big(n \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi\Big) = \sin\Big(n \cdot \frac{\pi}{2}\Big) = a_n \ .$$

Už pohľad na prvé štyri členy postupnosti ukazuje, že číslo 4 je základnou periódou. Teda množinou všetkých periód je množina $4\mathbb{N}$.

Príklad 1.37. Postupnosť $a_n = \sin n$, $n = 1, 2, \dots$ nie je periodická. Dokážeme to nepriamo. Predpokladajme, že existuje také $p \in \mathbb{N}$, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sin(n + p) = \sin n$. Z toho

$$\sin n \cos p + \cos n \sin p = \sin n$$

a odtiaľ dostaneme

$$\frac{\sin n}{\cos n} = \frac{\sin p}{1 - \cos p} \ , \qquad n = 1, 2, \dots \ .$$

(Oba zlomky sú definované, lebo ak sa $\cos x$ rovná nule alebo jednotke, tak x je určite násobok $\pi/2$. Čísla n a p sú však z množiny $\{1, 2, \dots\}$, a teda nemôžu byť násobkom iracionálneho čísla $\pi/2$.) Z predchádzajúcej formuly vyplýva, že $\operatorname{tg} n$ nezávisí od n, t.j. $\operatorname{tg} 1 = \operatorname{tg} 2 = \operatorname{tg} 3 = \dots$. To je však nezmysel, lebo už $\operatorname{tg} 1 \neq \operatorname{tg} 2$. Použite kalkulačku alebo, čo je trochu matematickejšie, nasledujúcu úvahu. Keby platilo

$$\frac{\sin 1}{\cos 1} = \frac{\sin 2}{\cos 2} \ ,$$

tak po úprave by sme dostali $\sin 2 \cos 1 - \cos 2 \sin 1 = 0$, čiže $\sin(2-1) = 0$. Avšak $\sin 1 = 0$ dáva, že jednotka je násobkom π, čo je spor.

1.10 Cvičenia

Všeobecný člen postupnosti

1. V zbierke úloh bola úloha: Určte všeobecný člen postupnosti $1, 2, 4, \dots$. Vo výsledkoch úloh bol uvedený výsledok: $a_n = 2^{n-1}$.

   a) Je to jediné riešenie úlohy? Ukážte, že existuje nekonečne veľa postupností s prvými tromi členmi $1, 2, 4$, dokonca aj keby sme požadovali, aby všeobecný člen bol určený "jediným vzťahom".

   b) Nájdite riešenia v tvare $b_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ a v tvare $c_n = \frac{1}{\alpha n^2 + \beta n + \gamma}$.

2. Nájdite explicitné vyjadrenie nejakej postupnosti, ktorej prvých 5 členov sú nuly a šiesty člen je rok vášho narodenia. Koľko riešení má táto úloha?

3. Skúste nájsť metódu (vzorec) na nájdenie všeobecného člena nejakej takej postupnosti reálnych čísel, ktorá má predpísané členy $a_1, a_2, \dots, a_k$.

   Zoraďovanie množín do postupností

4. Zoraďte do postupnosti množinu $\mathbb{Z}_0^-$ všetkých nekladných celých čísel. Určte všeobecný člen tejto postupnosti.

5. Vypočítajte r_n z príkladu, v ktorom sme množinu $\mathbb{Q}^+$ zoradili do postupnosti (potrebné je poznať pojem celej časti čísla).

   Výsledok: $r_n = \frac{n - \frac{1}{2}s(s-1)}{1 - n + \frac{1}{2}s(s+1)}$, kde $s = \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{8n-7})\right]$, pričom symbol $[x]$ označuje celú časť čísla x

   Niekoľko ďalších úloh o postupnostiach

6. Nech $A_n = \{x \in \mathbb{N} : 0,5n \leq x \leq n-1\}$.

   a) Ktoré členy postupnosti $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahujú práve 50 prvkov ?

   b) Ktoré čísla patria práve do päťdesiatich množín tejto postupnosti ?

7. Nech $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti priamok v súradnicovom systéme definované takto: $p_n = A_nB_n$, kde $A_n[n+1,0]$, $B_n[1,n]$ a q_n má rovnicu $2x - n = 0$. Označme P_n priesečník priamok p_n a q_n. Dokážte, že body $P_1, P_2, \ldots$ ležia na jednej priamke. Aká je jej rovnica ?

8. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prirodzených čísel, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla. Dokážte, že existujú také $i < j < k$, že $a_k - a_j = a_j - a_i$.

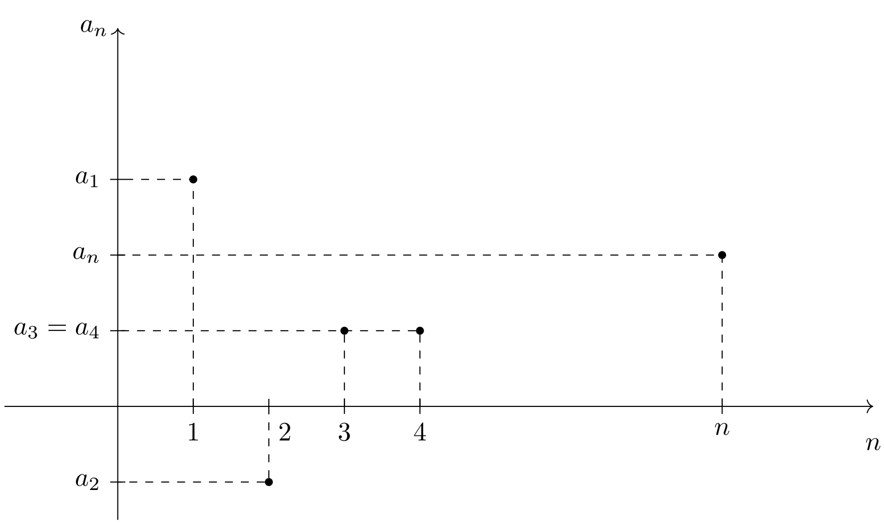
Kapitola 2

Postupnosti reálnych čísel a ich základné vlastnosti

Dohoda. Odteraz, pokiaľ nepovieme inak, sa budeme zaoberať len postupnosťami reálnych čísel.

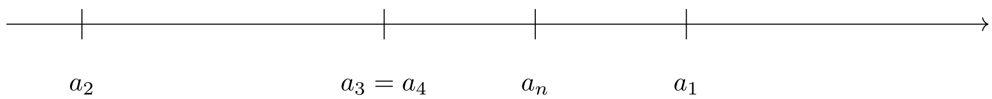
2.1 Graf postupnosti

Majme postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prvkov množiny A. Bez ohľadu na to aká je množina A, môžeme uvažovať o *grafe* tejto *postupnosti* – tak nazývame množinu usporiadaných dvojíc $\{[n, a_n] : n \in \mathbb{N}\}$. Ak ide o postupnosť reálnych čísel, je tento graf podmnožinou množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ a teda aj podmnožinou množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Možno ho preto znázorniť v rovine v karteziánskej súradnicovej sústave (pozri Obrázok 2.1). (Samozrejme, prakticky sme schopní nakresliť len niekoľko bodov grafu a nie celý graf pozostávajúci z nekonečného počtu bodov, ale aj to nám často pomôže.)



Obr. 2.1: Graf postupnosti (tu ide o postupnosť reálnych čísel, graf je podmnožinou roviny)

Je aj iná možnosť ako graficky znázorniť postupnosť reálnych čísel – na číselnú os vyznačíme čísla $a_1, a_2, \ldots,$ pozri Obrázok 2.2. Symboly $a_1, a_2, \ldots$ musíme aj pripísať k príslušným bodom (číslam) na osi, pretože v opačnom prípade by išlo len o znázornenie množiny hodnôt postupnosti — nevedeli by sme, ktorý bod je prvý, ktorý druhý atď.



Obr. 2.2: Iné grafické znázornenie postupnosti reálnych čísel

2.2 Aritmetické operácie s postupnosťami (reálnych čísel)

Vďaka tomu, že pre reálne čísla je definované sčitovanie, násobenie a delenie (s výnimkou delenia nulou), je možné definovať analogické operácie pre postupnosti reálnych čísel.

Definícia 2.1. Nech $(a_n)_1^\infty$, $(b_n)_1^\infty$ sú postupnosti reálnych čísel.

(1) Ich súčtom nazývame postupnosť

$$(a_n)_1^\infty \oplus (b_n)_1^\infty := (a_n + b_n)_1^\infty$$

(teda postupnosť $(c_n)_1^\infty$, v ktorej pre každé n je $c_n = a_n + b_n$).

(2) Ich rozdielom nazývame postupnosť

$$(a_n)_1^\infty \ominus (b_n)_1^\infty := (a_n - b_n)_1^\infty$$

(3) Ich súčinom nazvame postupnosť

$$(a_n)_1^\infty \odot (b_n)_1^\infty := (a_n \cdot b_n)_1^\infty$$

(4) Ak $b_n \neq 0$ pre každé n, tak ich podielom (s delencom $(a_n)_1^\infty$ a deliteľom $(b_n)_1^\infty$) nazývame postupnosť

$$(a_n)_1^\infty : (b_n)_1^\infty := (a_n : b_n)_1^\infty$$

Symboly operácií sme uviedli v krúžkoch preto, aby sme odlíšili operácie na množine postupností od operácií na množine čísel. V ďalšom texte väčšinou krúžky budeme vynechávať, treba si však vždy uvedomovať, či ide o operácie s číslami alebo postupnosťami.

Namiesto $a_n : b_n$ budeme častejšie písať $\frac{a_n}{b_n}$. Teda $(a_n)_1^\infty : (b_n)_1^\infty = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_1^\infty$.

Ak c je reálne číslo, tak pod postupnosťou $c \odot (a_n)_1^\infty$, resp. stručne $c \cdot (a_n)_1^\infty$ budeme rozumieť súčin konštantnej postupnosti $(c)_1^\infty$ a postupnosti $(a_n)_1^\infty$, teda postupnosť $(c \cdot a_n)_1^\infty$.

Namiesto $(-1)(a_n)_1^\infty$ budeme tiež písať $-(a_n)_1^\infty$. Všimnite si, že $(a_n)_1^\infty \ominus (b_n)_1^\infty = (a_n)_1^\infty \oplus (-(b_n)_1^\infty)$.

V definícii sme uvažovali postupnosti reálnych čísel. Dôležité však bolo len to, že reálne čísla vieme sčitovať, odčitovať, násobiť, deliť. Lenže to vieme robiť aj s niektorými inými matematickými objektami, napr. s komplexnými číslami. Preto úplne analogicky definujeme aritmetické operácie aj pre postupnosti komplexných čísel.

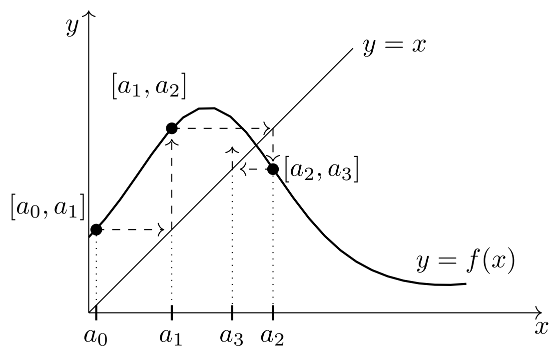
2.3 Iteračné postupnosti reálnych čísel

Iteračné postupnosti *reálnych čísel* možno geometricky znázorňovať pomocou tzv. iteračných alebo pavučinových diagramov.

Nech $D \subseteq \mathbb{R}$ a nech $f : D \to D$ je nejaká funkcia. Uvažujme o postupnosti zadanej rekurentne takto: Nech $a_0 \in D$ je nejako zvolené a nech pre ostatné členy postupnosti platí

$$a_{n+1} = f(a_n), \qquad n \geq 0 \; .$$

Nakreslime graf funkcie $y = f(x)$ (os x vodorovne, os y zvisle) a do toho istého obrázku nakreslime aj tzv. *diagonálu*, čo je priamka $y = x$. Sledujte Obrázok 2.3. Vyznačme na osi x číslo a_0. Budeme "cestovať", a to vždy len zvislým alebo vodorovným smerom a budeme pritom zanechávať za sebou stopu v podobe čiary poskladanej zo zvislých a vodorovných úsekov. Najskôr sa postavme do bodu $[a_0, 0]$ a pohnime sa zvislým smerom, až kým nenarazíme na graf funkcie (to, či treba ísť nahor alebo nadol, závisí od polohy grafu). Sme v bode $[a_0, f(a_0)] = [a_0, a_1]$. Z tohto bodu zase putujme vodorovným smerom (doprava alebo doľava, podľa situácie), až kým nenarazíme na diagonálu. Sme v bode $[a_1, a_1]$ (pamätajte, že bod diagonály má obe súradnice rovnaké). Takže už vieme na osi x vyznačiť číslo a_1, teda druhý člen postupnosti.



Obr. 2.3: Iteračný diagram (funkcia $f(x)$, počiatočný bod a_0)

Putujeme ďalej. Z bodu $[a_1, a_1]$ ideme zvislo, až kým nenarazíme na graf funkcie. Sme v bode $[a_1, f(a_1)] = [a_1, a_2]$. Z tohto bodu pokračujeme vodorovne až do bodu $[a_2, a_2]$ na diagonále. Už vieme vyznačiť na osi x číslo a_2. Takto pokračujeme a postupne získavame ďalšie a ďalšie členy našej postupnosti. [1] Obrázok, ktorý takto získame, sa volá *iteračný diagram* funkcie $f(x)$ prislúchajúci počiatočnému bodu a_0. Postupnosť, ktorú takto získame, t.j. postupnosť $a_0, f(a_0), f(f(a_0)), f(f(f(a_0))), \ldots$ je iteračná postupnosť daná funkciou f a počiatočným bodom a_0 (pozri podkapitolu 1.4).

Načo je to všetko dobré? Na to, že "uvidíme" našu postupnosť $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a jej vlastnosti. Napríklad "uvidíme", či je monotónna. Obrázok síce nie je dôkaz, ale dobre nakreslený iteračný diagram môže byť zdrojom hypotézy, ktorú potom už ľahšie dokážeme (pozri príklad 2.20).

[1] Stručne: začneme v bode $[a_0, 0]$ na osi x a potom ideme zvisle na graf, vodorovne na diagonálu, zvisle na graf, vodorovne na diagonálu, atď do nekonečna. Čísla z našej postupnosti sú priesečníky osi x s priamkami, na ktorých ležia zvislé úseky našej cesty.

Poznamenajme ešte, že pri kreslení iteračného diagramu je obyčajne veľmi dôležité znázorniť priesečníky grafu funkcie f s diagonálou. Ich prvé súradnice sú tzv. *pevné body* funkcie f (sú to riešenia rovnice $f(x) = x$). Ak sa pri našom putovaní dostaneme do priesečníka grafu s diagonálou, putovanie skončí, z daného bodu už neunikneme (kreslite!).

2.4 Ohraničené postupnosti

Ako odpovedať, ak sa vás niekto opýta, či je postupnosť $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ohraničená alebo neohraničená? Možno sa vám na jazyk tlačí odpoveď, že je "neohraničená, lebo nikde nekončí, za každým členom a_n nasleduje ďalší člen a_{n+1}". Takáto odpoveď je však zlá – to, že "za každým členom nasleduje ďalší" (presnejšie, to, že ide o postupnosť definovanú na $\mathbb{N}$ a nie na $\{1, 2, \dots, m\}$), znamená len toľko, že ide o nekonečnú a nie o konečnú postupnosť (pozri definície 1.7 a 1.8). *Ohraničenosť* postupnosti je definovaná tak, že množina *hodnôt* postupnosti je ohraničená.

Definícia 2.2. Nech A je nejaká množina reálnych čísel, t.j. $A \subseteq \mathbb{R}$. Povieme, že množina A je

a) zdola ohraničená, ak $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall a \in A)(D \leq a)$ (každé také číslo D sa nazýva dolným ohraničením množiny A),

b) zhora ohraničená, ak $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall a \in A)(a \leq H)$ (každé také číslo H sa nazýva horným ohraničením množiny A),

c) ohraničená, ak je ohraničená zdola aj zhora,

d) neohraničená (zdola neohraničená, zhora neohraničená), ak nie je ohraničená (ak nie je zdola ohraničená, ak nie je zhora ohraničená).

Teda množina A je zdola (zhora) ohraničená, ak má aspoň jedno dolné (horné) ohraničenie. Všimnite si, že ak má množina nejaké dolné ohraničenie D, tak ich má nekonečne veľa, lebo každé číslo menšie ako D je tiež dolným ohraničením (vysvetlite). Podobne, každé číslo väčšie ako nejaké horné ohraničenie danej postupnosti je tiež jej horným ohraničením.

Príklad 2.3. Interval $(-\infty, 0\rangle$ je množina ohraničená zhora (horným ohraničením je číslo 0 a samozrejme aj každé kladné číslo) ale nie je ohraničená zdola.

Množina $\mathbb{N}$ je ohraničená zdola ale nie zhora.

Množina $\mathbb{Z}$ nie je ohraničená ani zdola ani zhora.

Každá neprázdna konečná množina je ohraničená. Naozaj, najmenšie (najväčšie) číslo v danej množine je jej dolným (horným) ohraničením.

Možno vás trochu prekvapí, že aj prázdna množina je ohraničená. Dokonca každé reálne číslo r je jej dolným a zároveň horným ohraničením. Naozaj, výrok $(\forall r \in \mathbb{R})(\forall a \in \emptyset)(r \leq a \leq r)$ je pravdivý.[2]

Vráťme sa ešte k definícii ohraničenosti množiny $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(\exists D \in \mathbb{R})(\exists H \in \mathbb{R})(\forall a \in A)(D \leq a \leq H) .$$

[2] Z logiky by ste mali vedieť, že pre každú výrokovú formu V platí, že výroky $(\exists a \in \emptyset)V(k)$, $(\exists a \in \emptyset)\neg V(k)$ sú nepravdivé (to preto, lebo v prázdnej množine neexistuje žiaden prvok). Teda ich negácie $(\forall a \in \emptyset)\neg V(k)$, $(\forall a \in \emptyset)V(k)$ sú pravdivé. Stručne: Každý výrok začínajúci kvantifikátorom $(\exists a \in \emptyset)$ je nepravdivý, každý výrok začínajúci kvantifikátorom $(\forall a \in \emptyset)$ je pravdivý, a to bez ohľadu na to, aká výroková forma za ním nasleduje.

Je trochu nepríjemné, že tu vystupujú dva kvantifikátory. Nasledujúca veta hovorí, že A je ohraničená práve vtedy, keď je množina $\{|a| : a \in A\}$ ohraničená zhora. Teda vystačíme s jedným kvantifikátorom:

Veta 2.4. *Množina $A \subseteq \mathbb{R}$ je ohraničená vtedy a len vtedy keď* $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall a \in A)(|a| \leq K)$.

Dôkaz. Implikácia sprava doľava je triviálna, lebo $|a| \leq K$ znamená $-K \leq a \leq K$. Implikácia zľava doprava je založená na tom, že z nerovností $D \leq a \leq H$ vyplýva nerovnosť $|a| \leq K$ kde $K = \max\{|D|, |H|\}$. (Zdôvodnite.) □

Prejdime teraz od množín k postupnostiam.

Definícia 2.5. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nejaká postupnosť reálnych čísel. Povieme, že daná postupnosť je

a) zdola ohraničená (zhora ohraničená, ohraničená), ak množina jej hodnôt $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je zdola ohraničená (zhora ohraničená, ohraničená),

b) neohraničená (zdola neohraničená, zhora neohraničená), ak nie je ohraničená (ak nie je zdola ohraničená, ak nie je zhora ohraničená).

Teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená, ak $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(D \leq a_n)$ a je zhora ohraničená, ak $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq H)$. Postupnosť je ohraničená, ak

$$(\exists D \in \mathbb{R})(\exists H \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(D \leq a_n \leq H)\ .$$

alebo, čo je podľa vety 2.4 to isté,

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq K)\ .$$

Všimnite si, že postupnosť je ohraničená vtedy a len vtedy, keď je ohraničená zdola aj zhora.

Príklad 2.6. Postupnosť $(8n - 10^{10})_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola číslom $8 - 10^{10}$. Dokážeme, že zhora nie je ohraničená. Nech $H \in \mathbb{R}$. Chceme ukázať, že H nie je horným ohraničením pre danú postupnosť. Potrebujeme dokázať, že existuje $n \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou $8n - 10^{10} > H$. To je však zrejmé – stačí zvoliť $n > \frac{1}{8}(H + 10^{10})$ (uvážte, že od každého reálneho čísla existuje väčšie prirodzené číslo).

Príklad 2.7. Postupnosť $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$ je podľa vety 2.4 ohraničená, pretože pre každé n platí $|\sin n| \leq 1$.

Príklad 2.8. Dokážeme ohraničenosť postupnosti $a_n = \frac{n-2}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Možno postupovať napríklad takto:

$$a_n = \frac{n-2}{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1}\ ,$$

takže (ak využijeme, že $|a \pm b| \leq |a| + |b|$)

$$|a_n| \leq |1| + \left|\frac{3}{n+1}\right| \leq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\ .$$

(V poslednom kroku sme využili, že $n + 1 \geq 2$, takže $3/(n+1) \leq 3/2$.) Teda postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Poznamenajme ešte, že z dokázaného vyplýva, že číslo $-5/2$ je dolným ohraničením a číslo $5/2$ je horným ohraničením postupnosti. To samozrejme nijako neznamená, že sa tieto odhady nedajú zlepšiť. (Skúste dokázať, že platí dokonca $-1/2 \leq a_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$.)

Príklad 2.9. Dokážeme, že postupnosť $a_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$ je neohraničená.

Keďže postupnosť zdola ohraničená je (prečo?), treba dokázať, že nie je zhora ohraničená. Použijeme dôkaz sporom. Predpokladajme, že je zhora ohraničená. Potom existuje také $K \in \mathbb{R}$, že $n^2 \le K$, $n = 1, 2, \dots$. Z tohto systému nerovností vyplýva, že $K > 0$ (vysvetlite!).

Ukážeme dve (nepodstatne sa líšiace) možnosti, ako postupovať v dôkaze ďalej.

(1) Z vyššie získaného systému nerovností máme, že pre každé prirodzené n platí $n \le \sqrt{K}$ (odmocnina existuje, lebo $K > 0$). Dostali sme, že reálne číslo $\sqrt{K}$ je horným ohraničením množiny $\mathbb{N}$. To je spor s tým, že $\mathbb{N}$ je zhora neohraničená.

(2) Pretože od každého reálneho čísla existuje väčšie prirodzené číslo, existuje také $m \in \mathbb{N}$, že $m > \sqrt{K}$. Potom však $m^2 > K$, čo je spor s tým, že vyššie sme odvodili, že $n^2 \le K$ pre *každé* prirodzené n.

Príklad 2.10. Dokážeme, že postupnosť $a_n = \frac{1000^n}{n!}$, $n = 1, 2, \dots$ je ohraničená.

Predovšetkým, pre každý člen a_n platí $a_n > 0$, teda dolným ohraničením je napr. číslo 0. Ďalej platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000}{n+1}$, z čoho vyplýva:

a) ak $n + 1 < 1000$, tak $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, t.j. $a_{n+1} > a_n$ (využili sme, že $a_n > 0$),

b) ak $n + 1 > 1000$, tak $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, t.j. $a_{n+1} < a_n$,

c) ak $n + 1 = 1000$, tak $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, t.j. $a_{n+1} = a_n$.

Z a) vidieť, že $a_1 < a_2 < \dots < a_{999}$. Podobne, z b) máme, že $a_{1000} > a_{1001} > a_{1002} > \dots$. Konečne, z c) máme $a_{1000} = a_{999}$. Teda pre každý člen a_n platí

$$a_n \le a_{999} \left(= \frac{1000^{999}}{999!} \right) = a_{1000} \left(= \frac{1000^{1000}}{1000!} \right) .$$

Postupnosť je zhora ohraničená číslom $\frac{1000^{999}}{999!} \left(= \frac{1000^{1000}}{1000!} \right)$ (a každým väčším číslom, avšak žiadnym menším číslom).

Príklad 2.11. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je taká, že $a_1 < a_2$ a každý člen počnúc druhým je menší alebo sa rovná aritmetickému priemeru jeho dvoch susedných členov. Máme zistiť, či je postupnosť ohraničená.

Platí $a_2 - a_1 > 0$ a pre $n \ge 2$ máme $a_n \le \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, teda $a_n - a_{n-1} \le a_{n+1} - a_n$. Odtiaľ

$$0 < a_2 - a_1 \le a_3 - a_2 \le a_4 - a_3 \le \dots \le a_n - a_{n-1} \le \dots \ . \tag{2.1}$$

Z toho vidieť, že $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, a teda postupnosť (a_n) je zdola ohraničená číslom a_1. Dokážeme, že zhora je neohraničená. Vďaka získaným nerovnostiam (2.1) máme

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 \ge (n-1) \cdot (a_2 - a_1) + a_1 \ .$$

Keďže $a_2 - a_1 > 0$, z tohto už ľahko odvodíme, že postupnosť (a_n) je zhora neohraničená. Urobte to! (Ak s tým máte problémy, tak ste nedostatočne pozorne preštudovali príklad 2.6.)

Príklad 2.12. V príklade 1.5 ste iste dospeli k domnienke, že členy postupnosti

$$a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n , \qquad n = 1, 2, \dots$$

nepresiahnu istú hodnotu. Teraz dokážeme, že táto postupnosť je naozaj zhora ohraničená, a to napr. číslom 3. [3]

[3] Neskôr ukážeme, že číslo 3 možno dokonca ešte o niečo málo znížiť, a to na hodnotu $2,71828....$ Ak ste poslúchli našu výzvu a v príklade 1.5 ste experimentovali s kalkulačkou, iste ste zistili, že pre veľmi veľké n sa čísla $(1 + 1/n)^n$ na displeji kalkulačky "začínajú" práve takto.

Podľa binomickej vety[4] máme

$$\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \\
=1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k} + \dots \\
\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} = \\
=1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots \\
\dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) .
\end{aligned}$$

(Aj keď to teraz nie je našou úlohou, všimnime si, že z tohto vyjadrenia vidieť, že ak od a_n prejdeme ku a_{n+1}, t.j. zväčšíme n o jednotku, dôjde k dvom veciam: pribudne ešte jeden, totiž $(n+2)$-ý, (kladný) člen a okrem toho každý z už napísaných $n+1$ členov sa zväčší (presnejšie, dve jednotky vpredu sa nezmenia a ďalšie členy sa zväčšia), pretože každý činiteľ tvaru $1-\frac{r}{n}$ sa nahradí väčším činiteľom $1-\frac{r}{n+1}$. (Ak je niečo nejasné, odporúčame čitateľovi vyjadriť člen a_{n+1} podobne ako sme to urobili s členom a_n.) Teda pre každé n platí $a_n < a_{n+1}$. To sa dalo očakávať, lebo intuitívne sa zdá zrejmým, že ak sa ročný úrok počíta $(n+1)$-krát ročne, vklad vzrastie viac ako keď sa ročný úrok počíta iba n-krát ročne.)

Prejdime teraz k odhadom. Ak vo vyššie uvedenom vyjadrení pre a_n vynecháme (nahradíme jednotkami) všetky činitele v zátvorkách, výraz sa zväčší. Preto

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} .$$

Ak ešte uvážime, že $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot k \geq 1\cdot 2\cdot 2\cdot\dots\cdot 2 = 2^{k-1}$ (pre $k\geq 3$ platí dokonca ostrá nerovnosť), dostaneme

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3 .$$

(Sčítali sme za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Ak vám to robí problémy, pozrite podkapitolu 3.2. Iná možnosť je pomôcť si tzv. obrázkovým sčitovaním, inšpiráciu nájdete v podkapitole 6.3.)

Ak je postupnosť reálnych čísel ohraničená, tak každá jej podpostupnosť je tiež ohraničená.

2.5 Monotónne postupnosti

Postupnosť reálnych čísel si možno predstaviť ako nekonečný súbor oindexovaných čísel:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots .$$

Ak sú tieto čísla usporiadané podľa veľkosti, t.j. väčším indexom zodpovedajú vždy väčšie čísla (alebo vždy menšie čísla), postupnosť nazývame monotónnou. Uvedieme presnú definíciu:

Definícia 2.13. Povieme, že postupnosť reálnych čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je

a) rastúca, ak $(\forall k\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(k<n \Rightarrow a_k<a_n)$,

b) klesajúca, ak $(\forall k\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(k<n \Rightarrow a_k>a_n)$,

[4] Pripomeňme: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. Pritom $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k}$.

c) nerastúca, ak $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(k < n \Rightarrow a_k \geq a_n)$,

d) neklesajúca, ak $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(k < n \Rightarrow a_k \leq a_n)$.

e) rýdzomonotónna, ak je rastúca alebo klesajúca,

f) monotónna, ak je rastúca, klesajúca, nerastúca alebo neklesajúca.

Všimnite si, že ak je postupnosť rastúca, tak je aj neklesajúca a ak je klesajúca tak je aj nerastúca. Obrátené implikácie vo všeobecnosti neplatia (uveďte príklady). Postupnosť nemôže byť súčasne rastúca aj klesajúca. Existujú však postupnosti, ktoré sú súčasne nerastúce aj neklesajúce (ktoré sú to ?).

V definícii ktoréhokoľvek zo štyroch druhov monotónnosti vystupujú dva kvantifikátory. To je nepríjemné pri dokazovaní, že nejaká postupnosť je monotónna. Našťastie máme jednoduchú vetu, ktorá ukazuje, že vystačíme s jedným kvantifikátorom:

Veta 2.14. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom platí:*

a) (a_n) je rastúca $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_n < a_{n+1})$,

b) (a_n) je klesajúca $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_n > a_{n+1})$,

c) (a_n) je nerastúca $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq a_{n+1})$,

d) (a_n) je neklesajúca $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq a_{n+1})$.

Dôkaz. Urobíme ho pre prípad a), ostatné prípady prenechávame čitateľovi.

Implikácia zľava doprava je triviálna. Predpokladajme teraz, že pre každé prirodzené n platí $a_n < a_{n+1}$. Nech $k < n$ sú prirodzené čísla. Potrebujeme dokázať, že $a_k < a_n$. To je však zrejmé, lebo opakovaným použitím predpokladu dostávame

$$a_k < a_{k+1} < a_{k+2} < \cdots < a_{k+(n-k-1)} < a_{k+(n-k)} = a_n \ .$$

□

Jednoduchými príkladmi monotónych postupností sú aritmetické postupnosti a tie geometrické postupnosti, ktoré majú kladný kvocient. Vyšetrite, v ktorých prípadoch sú uvedené druhy postupností rastúce a v ktorých prípadoch klesajúce.

Keď máme vyšetriť monotónnosť nejakej postupnosti a nevieme ako začať, je prirodzené vypočítať niekoľko prvých členov. Buď odhalíme nemonotónnosť, alebo získame hypotézu, o aký druh monotónnosti ide. (Pozor však, ak aj zistíte, že $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$, neznamená to ešte rastúcosť, ba ani neklesajúcosť. Veď čo ak $a_{100} > a_{101}$?)

Príklad 2.15. Máme vyšetriť monotónnosť postupnosti $a_n = 2 + 7n - n^2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Výpočet prvých piatich členov odhalí nemonotónnosť. Platí totiž: $a_1 = 8$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$, $a_4 = 14$, $a_5 = 12$. (Po výpočte prvých štyroch členov sa ešte zdalo, že by snáď mohlo ísť o neklesajúcosť.)

Poznamenajme ešte, že nemonotónnosť danej postupnosti možno uvidieť aj tak, že nakreslíme graf funkcie $y = 2 + 7x - x^2$ a potom na ňom vyznačíme tú jeho časť, ktorá je grafom našej postupnosti. Urobte!)

Uvedieme najzákladnejšie postupy na vyšetrovanie monotónnosti postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

1) Vyšetrujeme rozdiel $a_{n+1} - a_n$, presnejšie jeho znamienko. Ak napr. ukážeme, že pre každé n je tento rozdiel kladný (záporný, nezáporný, nekladný, nulový), je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rastúca (klesajúca, neklesajúca, nerastúca, konštantná).

2) Obmenou predchádzajúceho postupu je ekvivalentne upravovať nerovnosť $a_n < a_{n+1}$. Ak po ekvivalentných úpravách dostanete nerovnosť, o ktorej viete povedať, pre ktoré n je pravdivá a pre ktoré n nepravdivá (radšej: pre ktoré n je pravdivá, pre ktoré n platí obrátená nerovnosť a pre ktoré n rovnosť), je úloha vyriešená. Napríklad, ak po ekvivalentných úpravách zistíte, že nerovnosť platí pre každé n, je postupnosť rastúca.

   Analogicky, môžte začať s ktorýmkoľvek iným znakom nerovnosti ($>$, $\leq$,$\geq$). Skúsený počtár však radšej upravuje vzťah $a_{n+1}\,?\,a_n$, v ktorom otáznik symbolizuje hľadaný znak nerovnosti. Dáva si však pozor, aby používal len také ekvivalentné úpravy, ktoré nemenia symbol "?", teda nenásobí záporným číslom (to nie je podstatné obmedzenie, lebo máme možnosť vymeniť strany a potom násobiť kladným číslom).

3) V prípade, že $a_n > 0$ pre každé n, možno vyšetrovať podiel $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Všímame si, pre ktoré n je tento podiel väčší ako 1, resp. menší ako 1, resp. rovný 1. Ak napr. zistíme, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pre každé n, dostávame z toho, že postupnosť je rastúca. (Vysvetlite! Kde sme využili, že ide o postupnosť s kladnými členmi ? Ako by sme mohli postupovať, ak by išlo o postupnosť so samými zápornými členmi ?)

4) Niekedy stačí vyjadriť a_n v inom tvare a hneď "vidieť" monotónnosť.

Príklad 2.16. Vyšetríme monotónnosť postupnosti $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ štyrmi základnými postupmi.

1) Vyšetrujeme znamienko rozdielu:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \\ &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \end{aligned}$$

   Teda $a_{n+1} - a_n < 0$ pre každé n. Postupnosť je klesajúca.

2) Ekvivalentne upravujeme:

$$\begin{array}{rcl} a_n & ? & a_{n+1} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & ? & \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} & ? & \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \end{array},$$

   z čoho už vidíme, že $? = >$ (menovatele sú kladné, pričom menovateľ vpravo je väčší, teda jeho prevrátená hodnota je menšia). Postupnosť je klesajúca.

3) Postupnosť má kladné členy. Porovnávame podiel s jednotkou:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

   Keďže pre každé $n \in \mathbb{N}$ je čitateľ menší ako menovateľ, je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ a postupnosť je klesajúca.

4) Stačí upraviť:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

   aby sme hneď videli, že postupnosť je klesajúca. Ak totiž zväčšíme n o jednotku na $n+1$, kladný menovateľ sa zväčší a teda jeho prevrátená hodnota sa zmenší.

Príklad 2.17. Nech $a > 1$. Vyšetríme monotónnosť postupnosti

$$a_n = n(\sqrt[n]{a} - 1), \qquad n \geq 1 \ .$$

Keďže $a > 1$, sú všetky členy postupnosti kladné. Budeme odhadovať podiel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(\sqrt[n+1]{a} - 1)}{n(\sqrt[n]{a} - 1)} \ .$$

S odmocninami sa nepríjemne narába. Zbavíme sa ich vhodnou substitúciou. Označme $t_n = \sqrt[n(n+1)]{a}$. Potom $\sqrt[n]{a} = t_n^{n+1}$ a $\sqrt[n+1]{a} = t_n^n$, takže

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(t_n^n - 1)}{n(t_n^{n+1} - 1)} = \frac{(n+1)(1 + t_n + t_n^2 + \cdots + t_n^{n-1})}{n(1 + t_n + t_n^2 + \cdots + t_n^n)}$$

(vykrátili sme výrazom $t_n - 1$). Dokážeme, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Tento vzťah je ekvivalentný s nasledujúcim:

$$(n+1)(1 + t_n + t_n^2 + \cdots + t_n^{n-1}) < n(1 + t_n + t_n^2 + \cdots + t_n^n) \ .$$

Po ďalších ekvivalentných úpravách dostaneme

$$1 + t_n + t_n^2 + \cdots + t_n^{n-1} < n \cdot t_n^n \ .$$

Tento vzťah je však pravdivý. Naozaj, platí $t_n > 1$, odtiaľ $1 < t_n < t_n^2 < \cdots < t_n^n$, takže každý z n členov na ľavej strane je menší ako t_n^n, a preto ich súčet je menší ako $n \cdot t_n^n$.

Ukázali sme, že postupnosť (a_n) je klesajúca.

Príklad 2.18. Vyšetríme monotónnosť postupnosti

$$a_n = n + \frac{\cos 2n}{\sqrt{3}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Počítajme rozdiel

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{\cos 2(n+1) - \cos 2n}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin 1 \cdot \sin(2n+1)$$

(využili sme, že $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$). Pretože $1 < \frac{\pi}{3}$ sú čísla z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, na ktorom je funkcia sin rastúca, máme $\sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Preto

$$\left| \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin 1 \cdot \sin(2n+1) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin 1 < 1 \ ,$$

takže

$$a_{n+1} - a_n \geq 1 - \left| \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin 1 \cdot \sin(2n+1) \right| > 0 \ .$$

Postupnosť (a_n) je teda rastúca.

Ak horeuvedené postupy vedú k zložitým úpravám alebo sú nevhodné na použitie a tušíte, že postupnosť je monotónna, povedzme rastúca (napr. výpočet niekoľkých prvých členov naznačuje, že "by to tak mohlo byť"), môžete dokazovať matematickou indukciou. Teda overíte, že $a_1 < a_2$ a za predpokladu, že pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ je $a_k < a_{k+1}$ dokážete, že $a_{k+1} < a_{k+2}$.

Príklad 2.19. Dokážeme, že rekurentne zadaná postupnosť

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},\ n = 1, 2, \ldots$$

je rastúca, t.j., že platia nerovnosti $a_n < a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ak vypočítate niekoľko členov postupnosti, zistíte, že

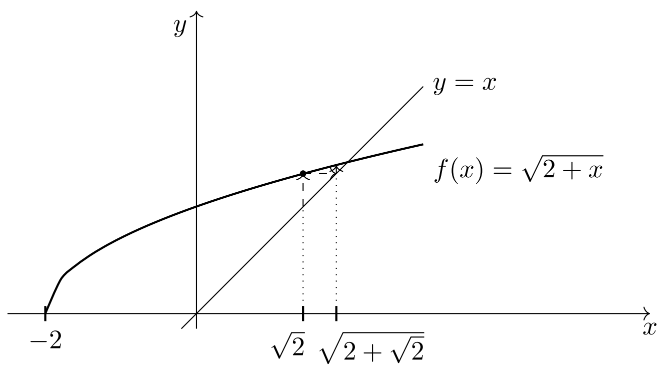
$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} \qquad (n \text{ symbolov druhej odmocniny, } n \text{ dvojek}) .$$

Z toho asi vidíte, že postupnosť je rastúca, ale keďže tam vystupujú tie tri bodky, za ktoré takpovediac nevidieť, chcelo by to precízny dôkaz. Ten je prekvapujúco ľahký.

Najskôr si všimnime, že určite sú všetky členy postupnosti kladné. (Naozaj, $a_1 > 0$ a ak $a_k > 0$, tak aj člen $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}$ je dobre definovaný (pod odmocninou je kladné číslo) a kladný.)

Priamy výpočet dá $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$. Predpokladajme, že pre nejaké $k \geq 1$ platí $a_k < a_{k+1}$. Potom aj $2 + a_k < 2 + a_{k+1}$ a keďže ide, ako sme vyššie dokázali, o kladné čísla, môžme odmocniť, aby sme dostali $\sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + a_{k+1}}$. Teda $a_{k+1} < a_{k+2}$.

V predchádzajúcom príklade sme mali do činenia s iteračnou postupnosťou reálnych čísel. Skutočnosť, že postupnosť je rastúca, vidieť aj z iteračného diagramu (pozri podkapitolu 2.3):



Obr. 2.4: Rastúcosť iteračnej postupnosti (funkcia $f(x) = \sqrt{2 + x}$, počiatočný bod $\sqrt{2}$)

Pri vyšetrovaní vlastností iteračných postupností reálnych čísel býva výhodné začať práve nakreslením iteračného diagramu. Z dobre nakresleného diagramu obvykle "vidieť"' vlastnosti danej postupnosti, takže môžeme vysloviť hypotézu a potom sa môžeme pokúsiť aj dokázať ju.

Postup ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

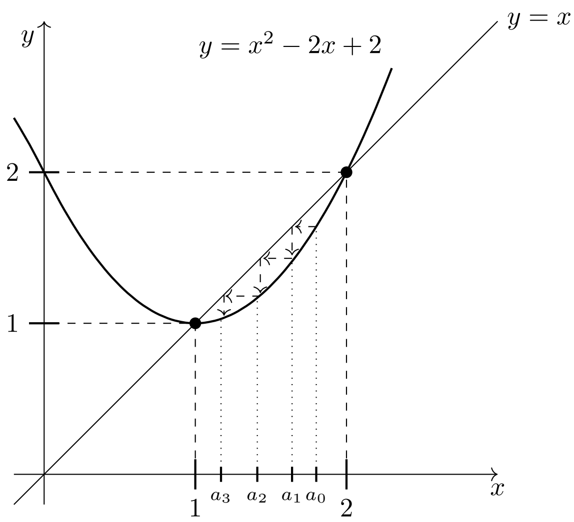
Príklad 2.20. Nech $a_0 \in (1, 2)$ a nech $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ pre každé $n \geq 0$. Teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je iteračná postupnosť

$$a_0 \in (1, 2), \qquad a_{n+1} = f(a_n), \qquad \text{kde} \qquad f(x) = x^2 - 2x + 2 .$$

Vyšetríme jej monotónnosť (je možné, že odpoveď bude závisieť od voľby a_0).

Skutočnosť, že ide o iteračnú postupnosť reálnych čísel, umožnuje využiť iteračný diagram, aby sme "uvideli" správanie sa postupnosti.

Graf kvadratickej funkcie ľahko nakreslíme z tvaru $f(x) = (x - 1)^2 + 1$. Z rovnice $x^2 - 2x + 2 = x$ dostaneme $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. To sú prvé súradnice priesečníkov grafu funkcie $f(x)$ s diagonálou $y = x$, čiže pevné body funkcie $f(x)$.



Obr. 2.5: Iteračný diagram (funkcia $f(x) = x^2 - 2x + 2$, počiatočný bod a_0)

Pretože $a_0 \in (1, 2)$, z Obrázka 2.5 "vidíme", že postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je klesajúca a celá leží v intervale $(1, 2)$. Prísne vzaté, obrázok nie je dôkaz. Dokážeme preto výpočtom, že postupnosť je klesajúca (pri každej voľbe $a_0 \in (1, 2)$).

Počítajme rozdiel

$$a_{n+1} - a_n = (a_n^2 - 2a_n + 2) - a_n = a_n^2 - 3a_n + 2 = (a_n - 1)(a_n - 2) \tag{2.2}$$

Vidíme, že znamienko rozdielu $a_{n+1} - a_n$ budeme poznať vtedy, keď budeme vedieť porovnať veľkosť čísla a_n s číslami 1, 2. Vieme, že $a_0 \in (1, 2)$. Na základe iteračného diagramu (prípadne na základe voľby nejakého konkrétneho $a_0 \in (1, 2)$ a výpočtu niekoľkých ďalších členov $a_1, a_2, \ldots$), sa domnievame, že $a_n \in (1, 2)$ pre každé n. Dokážeme to matematickou indukciou. Pre $n = 0$ je to pravda podľa zadania úlohy. Predpokladajme, že pre nejaké $k \geq 0$ je $a_k \in (1, 2)$. Chceme dokázať, že potom aj $a_{k+1} \in (1, 2)$. Počítajme teda:

$$a_{k+1} = a_k^2 - 2a_k + 2 = (a_k - 1)^2 + 1 \ .$$

Z tohto vyjadrenia na jednej strane dostávame $a_{k+1} > 0 + 1 = 1$ (využili sme, že $a_k - 1 \neq 0$) a na druhej strane $a_{k+1} < 1^2 + 1 = 2$ (využili sme, že $0 < a_k - 1 < 1$). Ak spojíme obe nerovnosti, dostávame, že $a_{k+1} \in (1, 2)$. To však podľa (2.2) znamená, že $a_{n+1} - a_n < 0$, a teda postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je klesajúca.

Príklad 2.21. (**Matematický korešpondenčný seminár Sovietskeho zväzu**) Postupnosť (x_n):

$$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$$

je zadaná takto: $x_1 = 1$ a $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nájdite číslo, ktoré je menšie ako všetky členy postupnosti s párnymi indexami $(x_2, x_4, x_6, \ldots)$ a zároveň väčšie ako všetky jej členy s nepárnymi indexami $(x_1, x_3, x_5, \ldots)$.

Najskôr nás napadne experimentovať s kalkulačkou. To vedie k objavu, že členy postupnosti sú rozložené takto:

$$x_1 < x_3 < x_5 < \ldots \qquad \ldots x_6 < x_4 < x_2 \ .$$

Kdesi "v strede" by malo byť hľadané číslo.[5] Experimentovanie s kalkulačkou nám však nepomôže presne

[5]Bez nároku na presnosť (nejdeme napr. definovať pojem vzdialenosti dvoch množín) si môžme všimnúť, že z textu úlohy sa zdá, že také číslo asi bude existovať (to je to isté ako povedať, že každý člen s nepárnym indexom je vľavo od každého člena s párnym indexom) a že takých čísel nebude viac (to je to isté ako povedať, že medzi skupinami členov s nepárnymi a s párnymi indexami nie je "diera", t.j. že vzdialenosť tých dvoch skupín je nulová).

nájsť hľadané číslo.[6] Chce to nový nápad. Všimneme si, že postupnosť je iteračnou postupnosťou:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots\ ,$$

kde $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Nakreslíme si preto iteračný diagram (pozri Obrázok 2.6). Z neho vidíme, že hľadaným číslom je kladný pevný bod funkcie f. Pevné body funkcie f sú korene rovnice $f(x) = x$, teda $1 + \frac{1}{x} = x$. Odtiaľ máme kvadratickú rovnicu $x^2 - x - 1 = 0$ s koreňmi $1/2(1 \pm \sqrt{5})$. Odpoveď teda je, že hľadaným číslom je číslo

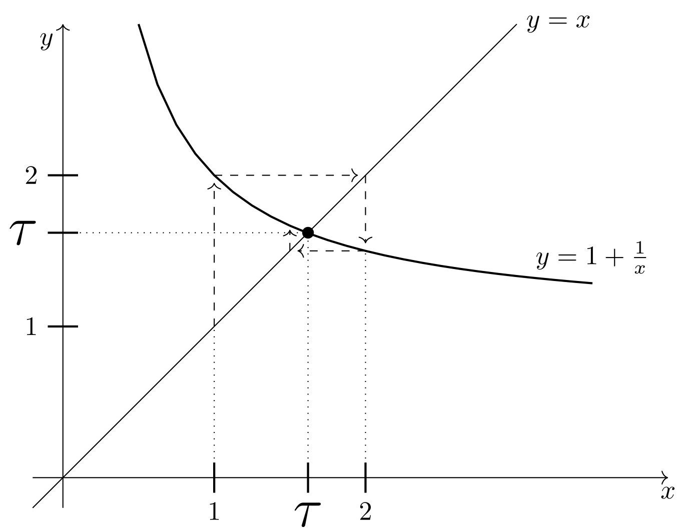
$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\ .$$

Aj keď sme si na základe obrázka "istí" svojou odpoveďou, obrázok nie je dôkaz. Musíme *dokázať*, že hľadané číslo má požadované vlastnosti.[7] Poďme teda dokazovať.

Predovšetkým si všimnime, že $x_k > 0$ pre každé k (prečo ?). Keďže $x_1 = 1 < \tau$, stačí, ak matematickou indukciou dokážeme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$x_n < \tau \Rightarrow x_{n+1} > \tau \qquad a \qquad x_n > \tau \Rightarrow x_{n+1} < \tau\ .$$

(Potom totiž: $x_2 > \tau$, $x_3 < \tau$, $\dots$.)



Obr. 2.6: Iteračný diagram (funkcia $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, počiatočný bod 1)

1. Predpokladajme, že pre nejaké $n \geq 1$ je $x_n < \tau$. Potom $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\tau}$ (využili sme, že $x_n > 0$), takže $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} > 1 + \frac{1}{\tau} = \tau$ (posledná rovnosť je splnená preto, lebo τ je koreň rovnice $1 + \frac{1}{x} = x$).

2. Podobne, predpokladajme, že pre nejaké $n \geq 1$ je $x_n > \tau$. Potom $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{\tau}$, takže $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} < 1 + \frac{1}{\tau} = \tau$

Poznámka 2.22. V predchádzajúcom príklade, keď sme podľa vzťahu $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ jeden za druhým počítali členy postupnosti $1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots$, ako keby sme stále s väčšou a väčšou presnosťou počítali koreň rovnice $1 + \frac{1}{x} = x$. Takýto postup je základom tzv. *iteračnej*

[6] Už len z toho dôvodu, že, ako o chvíľu uvidíte, ide o iracionálne číslo. Kalkulačka však ukáže vždy len konečne veľa desatinných miest.

[7] Nebudeme dokazovať, a v úlohe sa to ani nežiada, že viac takých čísel neexistuje. To by totiž chcelo úvahu na úrovni limitného prechodu, čomu sa v našom texte snažíme vyhýbať.

metódy približného riešenia rovníc. Rovnica $F(x) = 0$ sa prepíše (pripočítaním x alebo iným vhodným spôsobom) na tvar $f(x) = x$. Zvolí sa počiatočné číslo x_0 a počítajú sa členy iteračnej postupnosti $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Existuje teória o tom, kedy to "funguje". [8]

2.6 Monotónnosť na úsekoch. Extrémne členy

Väčšina postupností nie je monotónnych. Vtedy nás môže zaujímať, aké sú maximálne (najdlhšie) úseky, na ktorých je postupnosť monotónna.

Definícia 2.23. Povieme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca na množine (na úseku) $U = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n_0+k\}$, ak pre každé $r, s \in U$, $r < s$ platí $a_r < a_s$. Analogicky pre klesajúcosť, nerastúcosť a neklesajúcosť.

Teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca na úseku $U = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n_0+k\}$, ak

$$a_{n_0} < a_{n_0+1} < \cdots < a_{n_0+k} \ .$$

Všimnite si, že na dvojčlenných úsekoch je každá postupnosť automaticky monotónna.

Definícia 2.24. Povieme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca od indexu n_0 počnúc alebo že je rastúca na množine (na úseku) $V = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$, ak pre každé $r, s \in V$, $r < s$ platí $a_r < a_s$. Analogicky pre klesajúcosť, nerastúcosť a neklesajúcosť.

Teda $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca od indexu n_0 počnúc, ak

$$a_{n_0} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < \ldots \ .$$

Dá sa to povedať aj tak, že rastúcou je postupnosť $(a_{n+n_0-1})_{n=1}^{\infty}$.

Definícia 2.25. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ je také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n_0}$, resp. $a_n \geq a_{n_0}$. Potom a_{n_0} voláme najväčší, resp. najmenší člen postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Nie každá postupnosť má najväčší resp. najmenší člen. Špeciálne, každá rastúca postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má najmenší člen (je ním a_1) ale nemá najväčší člen. Podobne, klesajúce postupnosti majú najväčšie členy ale nemajú najmenšie členy.

Postupnosť môže mať viac najväčších resp. najmenších členov. Pre konštantnú postupnosť je dokonca každý jej člen najväčším a zároveň najmenším členom.

Príklad 2.26. V príklade 2.4 sme ukázali, že postupnosť $a_n = \frac{1000^n}{n!}$, $n = 1, 2, \ldots$ je rastúca na $\{1, 2, \ldots, 999\}$ (neklesajúca na $\{1, 2, \ldots, 1000\}$), klesajúca na $\{1000, 10001, \ldots\}$ (nerastúca na $\{999, 1000, \ldots\}$). Najväčšie členy sú dva, a to a_{999} a a_{1000}. Prezradíme, že postupnosť nemá najmenší člen. Vedeli by ste to dokázať?

Príklad 2.27. Vyšetríme monotónnosť postupnosti $a_n = \frac{n!\,2^n}{n^n}$, $n \geq 1$.

Všetky členy postupnosti sú kladné a tvar a_n naznačuje, že bude výhodné upravovať podiel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!\,2^n}{n^n}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{1 + n \cdot \frac{1}{n} + \ldots} \tag{2.3}$$

kde na vybodkovanom mieste sú ďalšie kladné členy (ak $n \geq 2$) alebo nula (ak $n = 1$). (Ak vám to nie je jasné, znovu sa vráťte k príkladu 2.12.) Teda pre $n = 1$ sa horeuvedený podiel rovná 1, pre $n > 1$ je menší ako 1. Ukázali sme, že $a_1 = a_2$ a postupnosť je počnúc druhým členom klesajúca. Celá postupnosť je nerastúca. Najväčšie členy sú $a_1 = a_2$, najmenší člen neexistuje (prečo ?).

[8] Teda kedy táto postupnosť konverguje k hľadanému koreňu rovnice $f(x) = x$.

2.7 *AG nerovnosť

Naučíme sa jednu z dôležitých nerovností, ktorú neskôr využijeme pri štúdiu monotónnosti niektorých postupností.

Zo školy si iste pamätáte nasledujúci pojem:

Definícia 2.28. Ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú reálne čísla, tak ich *aritmetickým priemerom* nazývame číslo

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ .$$

Samozrejme, presnejšie by bolo písať $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ale budeme to robiť len niekedy.

Ak v bežnom živote hovoríme o priemernej spotrebe auta či o priemernej mzde, máme na mysli práve aritmetický priemer. Napr. priemerný zárobok skupiny ľudí dostanete, ak sčítate ich zárobky a potom vydelíte počtom ľudí.[9]

Príklad 2.29. Aritmetický priemer čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ leží vždy medzi najmenším a najväčším z nich:

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq A \leq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ .$$

Ak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, platia rovnosti. V opačnom prípade sú obe nerovnosti ostré.

Dôkaz je jednoduchý. Nech m je najmenšie z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a M najväčšie. Potom $m \leq x_i \leq M$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Sčítaním týchto nerovností dostaneme

$$n \cdot m \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n \cdot M \ ,$$

takže stačí vydeliť číslom n, aby sme dostali $m \leq A \leq M$. Pritom ak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, máme $m = M$ a v horeuvedenej úvahe sú všetky nerovnosti rovnosťami. Ak aspoň dve z čísel $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ sú rôzne, je aspoň jedna z nerovností $m \leq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ostrá a aspoň jedna z nerovností $x_i \leq M$, $i = 1, 2, \ldots, n$ je tiež ostrá. Preto ich sčítaním dostaneme ostré nerovnosti a teda bude $m < A < M$.

Úloha nájsť kocku s rovnakým objemom ako kváder s hranami a, b, c vedie k rovnici $x^3 = abc$, z ktorej pre hranu kocky dostaneme $x = \sqrt[3]{abc}$. Číslo x je tzv. geometrický priemer čísel a, b, c.

Definícia 2.30. Ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú *nezáporné* reálne čísla, tak ich *geometrickým priemerom* nazývame číslo

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \ .$$

V definícii sa treba obmedziť na nezáporné čísla, aby sme mali istotu, že odmocnina je definovaná (pre párne n a záporný súčin $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ by G nebolo definované).

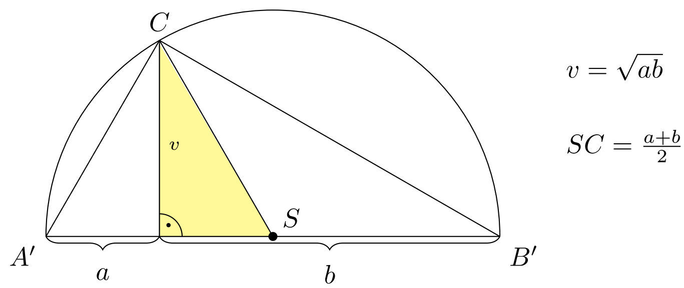
Teda pre nezáporné čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ máme definovaný aj ich aritmetický aj ich geometrický priemer. Pre dve nezáporné čísla a, b máme

$$A = \frac{a+b}{2}, \qquad G = \sqrt{a \cdot b} \ .$$

Ak sa aspoň jedno z čísel $a \geq 0$, $b \geq 0$ rovná nule, je $G \leq A$. Ak sú obe čísla kladné, možno ich geometricky zviditeľniť. Uvažujme o kružnici s priemerom AB o veľkosti $a+b$. Spomedzi pravouhlých trojuholníkov ABC nad týmto priemerom [10] uvažujme o tom, v ktorom výška na preponu AB vytína na nej práve úseky o dĺžkach a, b (pozri Obrázok 2.7).

[9] Samozrejme, pri narábaní s aritmetickým priemerom treba byť opatrný. Iste si viete predstaviť, čo by to narobilo s priemerným zárobkom v nejakej biednej dedinke, keby sa tam prisťahoval Bill Gates.

[10] podľa Talesovej vety teda C leží na danej kružnici



Obr. 2.7: Ilustrácia AG nerovnosti pre dve kladné čísla a, b

Podľa Euklidovej vety má táto výška veľkosť $v = \sqrt{ab}$. Polomer SC kružnice má dĺžku $\frac{a+b}{2}$. Zrejme teda platí (vysvetlite):

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \ ,$$

pričom rovnosť nastáva len v prípade keď $a = b$.

Skutočnosť, že geometrický priemer dvoch kladných čísel je menší alebo sa rovná ich aritmetickému priemeru, sa samozrejme dá dokázať aj algebraicky:

Veta 2.31. (AG$_2$ nerovnosť.) *Pre nezáporné čísla a, b je ich geometrický priemer menší alebo sa rovná ich aritmetickému priemeru:*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \ .$$

Pritom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b$.

Dôkaz. Platí $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, odkiaľ po úprave dostaneme $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0$ a odtiaľ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Rovnosť nastáva vtedy a len vtedy, keď $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, t.j. $a = b$. □

Čo by to bol za matematik, ktorý by sa teraz nespýtal, či analogické tvrdenie platí aj pre priemery viacerých ako dvoch čísel. Po chvíli experimentovania s kalkulačkou zistíte, že to "vychádza". Lenže overiť to na niekoľkých konkrétnych prípadoch ešte nie je dôkaz. Ako to teda *dokázať*? Pomerne jednoduchý je prípad štyroch čísel.

Príklad 2.32. (AG$_4$ nerovnosť.) Nech sú dané štyri nezáporné čísla x_1, x_2, x_3, x_4. Všimnime si, že aritmetický priemer týchto štyroch čísel sa rovná aritmetickému priemeru aritmetických priemerov prvých dvoch čísel a druhých dvoch čísel, t.j. $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(A(x_1, x_2), A(x_3, x_4))$. Naozaj, rovnosť

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2}$$

ľahko overíte priamym výpočtom. Podobne: $G(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(G(x_1, x_2), G(x_3, x_4))$. Naozaj, rovnosť

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} = \sqrt{\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4}}$$

je zrejmá. Ak využijeme tieto rovnosti a opakovane použijeme AG$_2$ nerovnosť, dostaneme

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \ .$$

Dokázanú nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom štyroch čísel budeme nazývať AG$_4$ nerovnosť. Premyslite si, kedy v nej platí rovnosť, ľahšie sa Vám bude študovať dôkaz nasledujúcej vety.

Dokážeme, že dvojka a štvorka nie sú výnimočné. Platí:

Veta 2.33. (AG$_n$ nerovnosť.) *Pre ľubovoľné nezáporné čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ (n je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 1) platí nerovnosť:*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ .$$

Pritom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dôkaz. Postup, ktorý použijeme, pochádza od Cauchyho[11] a využíva tzv. regresívnu (spätnú) indukciu. Stručne povedané, dôkaz urobíme niekoľkými krokmi indukciou "tam a späť". Najskôr dokážeme AG$_n$ nerovnosť pre niektoré vybrané n, v našom prípade pre mocniny dvojky, teda pre $n = 1, 2, 4, \dots, 2^k, \dots$. Tých je nekonečne veľa, ale stále ešte v medzerách medzi mocninami dvojky zostalo veľa "bielych" miest. Tie vyplníme spätnou indukciou – dokážeme, že ak platí AG$_n$ (tu n už nie je nutne mocnina dvojky), tak platí aj AG$_{n-1}$.

1.krok. Matematickou indukciou dokážeme, že nerovnosť AG$_n$ platí pre všetky n tvaru $n = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$ pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď sa všetky čísla x_i navzájom rovnajú.

Prípad $k = 1$ je už dokázaná veta 2.31. Predpokladajme, že AG$_n$ platí pre $n = 2^k$. Ideme dokázať, že potom platí aj AG$_m$ pre $m = 2^{k+1} = 2n$. Dokážeme to jednoduchým zovšeobecnením postupu z príkladu 2.32:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2} \geq \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}}{2} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}} = \sqrt[2n]{x_1 x_2 \dots x_{2n}} \ .\end{aligned}$$

Rovnosť medzi prvým a posledným členom v tomto výpočte nastane práve vtedy, keď prvá aj druhá nerovnosť budú rovnosťami, teda práve vtedy, keď (využívame indukčný predpoklad) $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ a $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ a zároveň (využívame vetu 2.31) $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}$. Teda práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n}$

2. krok. Ukážeme, že ak nerovnosť AG$_n$ platí pre nejaké $n > 2$, tak platí aj nerovnosť AG$_{n-1}$. Nech teda $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ sú kladné čísla. Označme ich aritmetický priemer A. Upravujme:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n x_1 + n x_2 + \cdots + n x_{n-1}}{n-1} \\ &= \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right) \\ &\geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \cdot \frac{x_1 + x + 2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \cdot A} \qquad (*) \end{aligned}$$

(nerovnosť sme dostali z predpokladu, že platí AG$_n$). Po umocnení dostaneme

$$A^n \geq x_1 x_2 \dots x_{n-1} \cdot A$$

a odtiaľ, po vydelení (kladným) číslom A a odmocnení,

$$A \geq \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \ .$$

[11] A. L. Cauchy (1789 - 1857) bol slávny francúzsky matematik, ktorý sa veľmi zaslúžil o rozvoj matematickej analýzy.

Rovnosť tu nastane práve vtedy, keď platí rovnosť v (*), teda práve vtedy, keď platí (využívame predpoklad, že platí AG_n) $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = A$, čiže keď platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$.

3. krok. Teraz už ľahko dokážeme, že AG_n platí pre každé prirodzené $n \geq 2$. Pre každé n sa dá nájsť také prirodzené k, že $n < 2^k$. Pre 2^k platí nerovnosť podľa 1. kroku a ďalej stačí $(2^k - n)$-krát opakovať druhý krok. □

Príklad 2.34. Dokážeme, že kocka je kváder s maximálnym objemom pri danom povrchu a s minimálnym povrchom pri danom objeme.

Nech a, b, c sú rozmery kvádra. Potom pre povrch a objem kvádra máme

$$S = 2(ab + bc + ca) \qquad \text{a} \qquad V = abc\ .$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí

$$V^2 = (abc)^2 = (ab)(bc)(ca) \leq \left(\frac{ab + bc + ca}{3}\right)^3 = \left(\frac{2(ab + bc + ca)}{6}\right)^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^3\ .$$

Nech S je dané. Kvádrov s takýmto daným povrchom je (nekonečne) veľa, s rôznymi objemami.[12] Podľa vyššie uvedeného pre ich objemy platí

$$V \leq \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}\ .$$

(Pravá strana je konštanta, lebo S je dané. Podľa toho ako meníme a, b, c pri zachovanom S, sa mení ľavá strana ale vždy platí daná nerovnosť.) Rovnosť podľa nerovnosti AG_3 nastane v jedinom prípade, a to keď je

$$ab = bc = ca, \qquad \text{t.j.} \qquad a = b = c\ .$$

Dostali sme, že keď meníme rozmery kvádra tak, aby sa zachovával povrch S, dostaneme najväčší objem v prípade $a = b = c$, čiže pre kocku (objem sa vtedy rovná $(\frac{S}{6})^{\frac{3}{2}}$).

Teraz nech V je dané. Ak budeme meniť rozmery kvádra tak, aby sa objem zachovával, povrch sa bude môcť meniť, ale podľa vyššie odvodenej nerovnosti bude vždy $S \geq 6V^{\frac{2}{3}}$. Rovnosť nastane, teda povrch bude minimálny (a bude sa rovnať $6V^{\frac{2}{3}}$) len v prípade $a = b = c$, t.j. v prípade kocky.

2.8 *Bernoulliho nerovnosť

Urobíme si ďalší výlet do krásneho sveta nerovností. Aj nerovnosť, ktorú spoznáme v tejto časti, bude pre nás neskôr veľmi užitočná.

Podľa binomickej vety pre nezáporné x dostávame

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \text{nezáporné členy (ak } x \geq 0)\ ,$$

a teda

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx\ , \qquad \text{ak } x \geq 0\ .$$

Táto jednoduchá nerovnosť nie je príliš užitočná. Našťastie je známe, že ju možno značne zovšeobecniť. Pre naše účely postačí táto (nie najvšeobecnejšia známa) formulácia:

Veta 2.35. (Bernoulliho nerovnosť.) *Pre všetky prirodzené čísla n a reálne čísla $x \geq -1$ platí:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx\ .$$

Pritom rovnosť nastáva vtedy a len vtedy keď $n = 1$ alebo $x = 0$.

[12] Premyslite si túto vetu, vyrobte si konkrétne príklady.

Dôkaz. Ak $n = 1$ alebo $x = 0$, platí rovnosť. Stačí teda ukázať, že

$$(1+x)^n > 1+nx\ , \qquad \text{ak } n \geq 2 \text{ a } x \geq -1,\ x \neq 0\ . \tag{*}$$

Uvedieme dva dôkazy tohto tvrdenia.

Dôkaz (*) pomocou AG nerovnosti. Pretože $1 + x \geq 0$, je vľavo nezáporné číslo. Ak je $1 + nx < 0$, máme v (*) naozaj ostrú nerovnosť. Nech teda $1 + nx \geq 0$. Použijeme AG_n nerovnosť na skupinu n čísel, v ktorej je nezáporné číslo $1 + nx$ a $n - 1$ jednotiek. Platí$1 + nx \neq 1$ lebo $x \neq 0$. Preto

$$\sqrt[n]{(1+nx)\cdot 1^{n-1}} < \frac{(1+nx)+(n-1)\cdot 1}{n} = 1+x\ ,$$

odkiaľ už po umocnení dostaneme $(1 + x)^n > 1 + nx$, čo sme chceli dokázať.

Dôkaz (*) matematickou indukciou.

1. krok. Nech $n = 2$. Potom pre $x \geq -1$, $x \neq 0$ platí $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$.[13]

2. krok. Predpokladajme, že sme už dokázali, že pre nejaké $k \geq 2$ platí

$$(1+x)^k > 1+kx \qquad \text{pre všetky } x \geq -1,\ x \neq 0.$$

Chceme dokázať, že potom analogické tvrdenie platí aj keď zameníme k na $k + 1$. Ak $x = -1$, platí $(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)x$ triviálne (vysvetlite). Vezmime teda $x > -1$, $x \neq 0$ a vynásobme nerovnosť $(1 + x)^k > 1 + kx$ číslom $1 + x$. Pretože násobíme kladným číslom, dostaneme

$$(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x\ .$$

(Posledná nerovnosť je dokonca ostrá, lebo $x \neq 0$. Nám však stačilo všimnúť si, že platí aspoň neostrá nerovnosť, lebo vďaka tomu, že prvá nerovnosť je ostrá, máme $(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)x$.) □

Bernoulliho nerovnosť sa dá zovšeobecniť vo viacerých smeroch. Napríklad namiesto prirodzeného exponentu n môžme mať reálny exponent α. Samozrejme, tu je trochu problém, čo to znamená umocniť reálne číslo na reálne číslo. Napr., čo to je $3^{\sqrt{2}}$ alebo π^π ? Problém už siaha do vyššej matematiky. Ak však exponent α je racionálny, tak takýto problém nenastane. Spomeňte si, že pre celé m a prirodzené n je $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ (prinajmenšom pre $x > 0$ tu nie je žiaden problém). Nasledujúcu vetu síce kvôli úplnosti sformulujeme pre reálne exponenty, ale dokazovať ju kvôli uvedeným problémom budeme len pre racionálne exponenty. Neskôr, keď už budete vedieť viac z matematickej analýzy, vám nebude robiť problém rozšíriť dôkaz aj na reálne exponenty.

Veta 2.36. *Nech $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$. Potom*

(1) ak $0 < \alpha < 1$, tak $\quad (1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$,

(2) ak $\alpha > 1$, tak $\quad (1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

V každom z dvoch prípadov platí, že rovnosť nastáva vtedy a len vtedy, keď $x = 0$.

[13] Využili sme, že $x \neq 0$. Predpoklad, že $x \geq -1$ nebolo potrebné použiť, teda pre $n = 2$ platí ostrá nerovnosť pre každé nenulové reálne x.

Dôkaz. Budeme dokazovať len pre prípad, že α je racionálne číslo. Ak $x = -1$ tak obidve uvažované nerovnosti zrejme platia a sú ostré (vysvetlite). Nech teda $x > -1$.

a) Racionálne číslo $0 < \alpha < 1$ sa dá napísať v tvare $\alpha = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < n$. Ak využijeme jednoduché úpravy a nerovnosť AG_n, dostaneme:

$$(1+x)^\alpha = (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m} = \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} \leq$$
$$\leq \frac{m(1+x) + (n-m)\cdot 1}{n} = \frac{m + mx + n - m}{n} = 1 + \frac{m}{n} \cdot x = 1 + \alpha x \ .$$

Podľa AG_n nerovnosti rovnosť nastáva práve vtedy, keď $1 + x = 1$, t.j. $x = 0$.

b) Uvažujeme o prípade $\alpha > 1$, $x > -1$. Potom $1 + x > 0$ a $(1+x)^\alpha > 0$. Ak $1 + \alpha x \leq 0$, niet čo dokazovať (platí ostrá forma dokazovanej nerovnosti a je zrejme $x \neq 0$). Nech teda $1 + \alpha x > 0$, t.j. $\alpha x > -1$. Potom podľa a) platí:

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha}(\alpha x) = 1 + x \ ,$$

pričom rovnosť nastane len pre $x = 0$. Získaná nerovnosť má obe strany nezáporné. Ak ju umocníme na exponent α, dostaneme

$$\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^\alpha \leq (1+x)^\alpha,$$

odkiaľ už máme $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$. K ukončeniu dôkazu stačí uvážiť, že umocnenie kladných čísel na α (je väčšie ako 1, teda kladné) zachováva rovnosť i prípadnú ostrú nerovnosť. $\square$

V .... môžete nájsť iné zovšeobecnenie Bernoulliho nerovnosti: Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $x \geq -2$ platí: $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Číslo -2 sa tu už nedá nahradiť menším číslom (akokoľvek zvolíte $x < -2$, nájde sa také $n \in \mathbb{N}$, že nerovnosť platiť nebude.)

2.9 Monotónne a ohraničené postupnosti

V matematickej analýze sú mimoriadne dôležité také postupnosti reálnych čísel, ktoré sú monotónne a zároveň ohraničené. Pretože neklesajúce (nerastúce) postupnosti sú automaticky ohraničené zdola (zhora), presnejšie možno povedať, že sú dôležité neklesajúce zhora ohraničené a nerastúce zdola ohraničené postupnosti.[14]

V tejto časti sa v príkladoch ale aj v teoretických výsledkoch stretneme s niektorými monotónnymi a ohraničenými postupnosťami. Zvlášť dôležité sú postupnosti súvisiace s tzv. číslom e (pozri vetu 2.37).

Veta 2.37. (Postupnosti súvisiace s číslom e.) *Označme $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Potom*

(1) postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je rastúca,

(2) postupnosť $(b_n)_{n=1}^\infty$ je klesajúca,

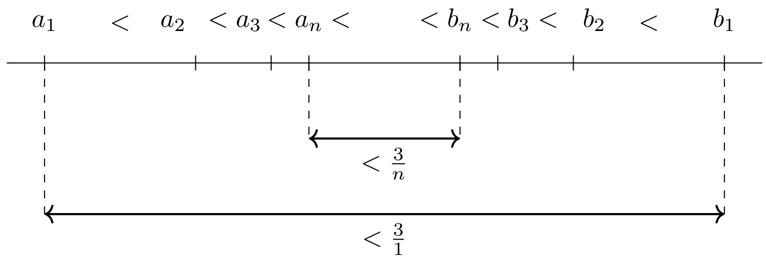
(3) $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(a_k < b_n)$,

(4) postupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty$ sú ohraničené, o.i. platí, že $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n < 3)$,

(5) $(\forall n \in \mathbb{N})(b_n - a_n < \frac{3}{n})$.

Všimnime si,že podľa (1) – (3) máme situáciu ako na Obrázku 2.8.

[14] Každá taká postupnosť má totiž *vlastnú* limitu. K existencii limity stačí už samotná monotónnosť.



Obr. 2.8: Postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$

Dôkaz. (1) Ak si pozorne pozriete riešenie príkladu (2.12), zistíte, že už sme dokázali rastúcosť (a_n). Uvedieme ďalšie dva dôkazy.

Pomocou Bernoulliho nerovnosti:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$
$$= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} >$$
$$> \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 + (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \ .$$

(Použili sme Bernoulliho nerovnosť.) Postupnosť (a_n) je teda rastúca.

Pomocou A-G nerovnosti:

Použijeme A-G nerovnosť na skupinu $n+1$ čísel, v ktorej je číslo 1 a n čísel $1+\frac{1}{n}$:

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \ .$$

Odtiaľ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \ .$$

(2) *Pomocou Bernoulliho nerovnosti:*

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}} <$$
$$< \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \ .$$

Postupnosť (b_n) je teda klesajúca.

Pomocou A-G nerovnosti:

Použijeme A-G nerovnosť na skupinu $n+2$ čísel, v ktorej je číslo 1 a $n+1$ čísel $1-\frac{1}{n+1}$:

$$\sqrt[n+2]{1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}<\frac{1+(n+1)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}\ .$$

Odtiaľ po úprave

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\ .$$

Teda postupnosť (b_n) je klesajúca.

(3) Predovšetkým, pre každé $n\in\mathbb{N}$ triviálne platí $a_n=(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}=b_n$. Ďalej už vieme, že (a_n) je rastúca a (b_n) klesajúca. Ak teda $k<n$, tak $a_k<a_n<b_n$ a ak $k>n$ tak $a_k<b_k<b_n$.

(4) Podľa (1) a (3) je postupnosť (a_n) zdola ohraničená číslom a_1 a zhora hociktorým b_r. Stačí nájsť také r, že $b_r\leq 3$ (urobte!). Ohraničenosť (b_n) dokazujte analogicky.

(5) Ak využijeme, že postupnosť (a_n) je zhora ohraničená trojkou, máme:

$$b_n-a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=a_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}-1\right)<\frac{3}{n}\ .$$

□

Poznámka 2.38. Na základe tejto vety sa v matematickej analýze dokazuje, že postupnosti (a_n), (b_n) majú spoločnú vlastnú limitu. Táto limita sa označuje symbolom e. Je to jediné číslo, pre ktoré platí $a_n<e<b_n$ pre každé n.

Číslo e je v matematike mimoriadne dôležité. Veľký význam má exponenciálna funkcia e^x a logaritmická funkcia $\log_e x$ (tzv. prirodzený logaritmus, obyčajne sa preň používa kratšie označenie $\ln x$). Vie sa, že e je číslo iracionálne (to nie je príliš ťažké dokázať), ba dokonca transcendentné, t.j. nie je koreňom žiadneho polynómu s celočíselnými koeficientami (dôkaz tohto tvrdenia sa robí pomocou integrálneho počtu).

Pretože $a_n<e<b_n$ pre každé n, vieme počítať číslo e s ľubovoľnou presnosťou (sú však aj šikovnejšie metódy). Ak sa s tým pohráte, malo by vám vyjsť $e\doteq 2{,}7182818284$. (Takto sa dal zlepšiť odhad "3" v príklade 2.12.) Z kalkulačky číslo e vytiahnete na display pomocou tlačítok "1", "e^x".

Poznámka 2.39. Z príkladu 2.12 vieme, že keď vložíme nejakú sumu do banky na 100 % úrok, tak po roku budeme mať najviac trojnásobok, aj keby išlo o zložené úrokovanie s akokoľvek častým pripisovaním úrokov. V predchádzajúcej poznámke sme prezradili, že odhad sa dá zlepšiť: nebudeme mať viac než 2,71828... násobok. V reči limít: (rastúca) postupnosť (1.3) má limitu $e=2{,}71828\ldots$. Všeobecnejšie, (rastúca) postupnosť (1.3) má limitu $e^{\frac{p}{100}}$. Pomocou kalkulačky si teda môžte spočítať, aký najväčší násobok vloženej sumy budete mať po roku, nech by sa už ročný úrok p % pripisoval v príslušnej čiastke akokoľvek často.

Poznámka 2.40. Označme (pripomíname, že podľa definície $0!=1$)

$$y_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\ .$$

V príklade 2.12 sme dokázali, že pre každé n je $a_n < y_n < 3$. Postupnosť (y_n) je teda rastúca (to je zrejmé) a zhora ohraničená. Dá sa dokonca dokázať, že pre každé n je $a_n < y_n < b_n$. Aj postupnosť (y_n) má limitu e. Postupnosť (y_n) sa lepšie hodí na približný výpočet čísla e ako postupnosti (a_n), (b_n).

Príklad 2.41. Nech $c > 0$. Definujme postupnosť

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_2 = \sqrt{c+\sqrt{c}}, \quad x_3 = \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}, \quad \dots$$

a všeobecne

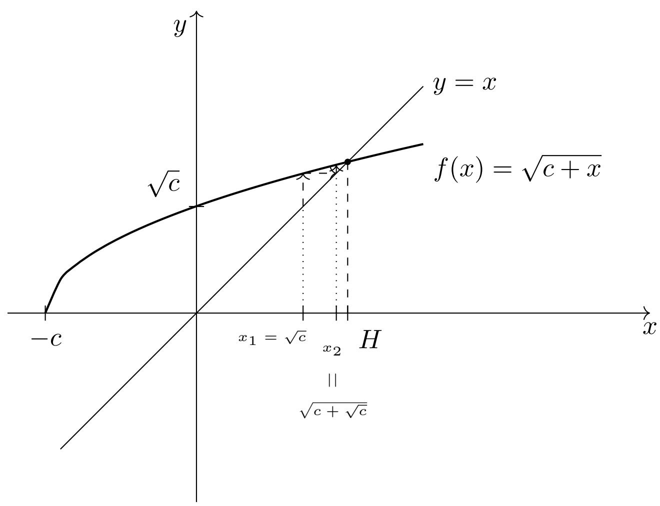
$$x_n = \underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}_{n \text{ odmocnín}} .$$

Teda postupnosť sa dá definovať rekurentne takto:

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_{n+1} = \sqrt{c+x_n} = f(x_n), \qquad \text{kde } f(x) = \sqrt{c+x}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Dokážeme, že postupnosť je rastúca a zhora ohraničená.

Základom úspechu pri riešení tohto problému je iteračný diagram, pozri Obrázok 2.9.



Obr. 2.9: Rastúcosť a ohraničenosť iteračnej postupnosti (funkcia $f(x) = \sqrt{c+x}$, počiatočný bod $\sqrt{c}$)

Z diagramu "vidieť" že postupnosť je naozaj rastúca a že je zhora ohraničená[15] pevným bodom funkcie f, teda číslom H, ktoré je riešením rovnice

$$\sqrt{c+H} = H \ . \tag{2.4}$$

Dôkaz monotónnosti sa dá urobiť matematickou indukciou podobne ako v príklade (2.19) a prenechávame ho čitateľovi. Dokážeme ohraničenosť zhora. Ľahko ukážeme, že rovnica (2.4) má jediný koreň

$$H = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4c}\right) \ .$$

To, že ide o horné ohraničenie postupnosti, dokážeme matematickou indukciou:

(1) $x_1 = \sqrt{c} < H$ (vysvetlite).

[15] Zdola je ohraničená z triviálnych dôvodov (je totiž rastúca), preto sa to obvykle ani nespomína.

(2) Predpokladajme, že pre nejaké $k \geq 1$ je $x_k < H$. Potom pre nasledujúci člen dostávame

$$x_{k+1} = \sqrt{c + x_k} < \sqrt{c + H} = H \ .$$[16]

Dôkaz je skončený.

Príklad 2.42. Nech sú dané dve kladné čísla $a_0 < b_0$. Vytvoríme ich aritmetický priemer a geometrický priemer:

$$a_1 = \sqrt{a_0 b_0} \ , \quad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \ .$$

Podľa AG nerovnosti je $a_1 < b_1$. Ak ešte vezmeme do úvahy, že aj aritmetický aj geometrický priemer dvoch rôznych čísel leží ostro medzi nimi, máme

$$a_0 < a_1 < b_1 < b_0 \ .$$

Z čísel a_1, b_1 znovu vytvoríme ich priemery

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1} \ , \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \ .$$

Potom, ako vyššie,

$$a_1 < a_2 < b_2 < b_1 \ .$$

Ak sú už čísla a_n a b_n definované, definujeme a_{n+1} a b_{n+1} ako ich priemery

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \ , \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \ .$$

a ako vyššie,

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \ .$$

Máme teda:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \ldots \quad \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b_0 \ .$$

Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je rastúca a zhora ohraničená (ľubovoľným z čísel b_i), postupnosť $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ je klesajúca a zdola ohraničená (ľubovoľným z čísel a_i).

Príklad 2.43. (Kyjevská mestská matematická olympiáda 1980, úloha pre žiakov 10. triedy) Postupnosť (a_n) je určená vzťahmi

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n} \quad \text{pre} \quad n \geq 1.$$

Vyšetrite jej monotónnosť a ohraničenosť.[17]

Príklad 2.44. (Rakúska matematická olympiáda 1979) Postupnosť (x_n) je definovaná rekurentne:

$$x_0 = 1979, \quad x_{n+1} = \frac{1979(x_n + 1)}{1979 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Vyšetrite jej monotónnosť a ohraničenosť.[18]

[16] Všimnite si, že sme dokázali dokonca ostrú nerovnosť: $x_n < H$ pre každé n.

[17] V úlohe sa v skutočnosti malo dokázať, že existuje limita postupnosti a_n a vypočítať ju. To je však ľahké, ak už vieme monotónnosť a ohraničenosť.

[18] Aj v tejto úlohe, podobne ako v predchádzajúcej, sa v skutočnosti mala dokázať konvergencia postupnosti a vypočítať jej limita.

2.10 *Každá postupnosť je súčtom rastúcej a klesajúcej postupnosti

Pripomeňme našu dohodu: hovoríme o postupnostiach reálnych čísel.

Iste intuitívne cítite, že "typická" postupnosť reálnych čísel nie je monotónna.[19] Napríklad ak prikážete počítaču náhodne vypísať nejakú postupnosť čísel, iste nebude monotónna. Je preto prekvapujúce, že každá postupnosť $(a_n)_1^\infty$ reálnych čísel je súčtom neklesajúcej postupnosti $(x_n)_1^\infty$ a nerastúcej postupnosti $(y_n)_1^\infty$ (dokonca súčtom rastúcej a klesajúcej postupnosti). Teda ak nám niekto dá k dispozícii množinu všetkých monotónnych postupností a dovolí nám vytvárať súčty dvoch monotónnych postupností, "vygenerujeme" takto množinu všetkých postupností reálnych čísel! Toto pozoruhodné tvrdenie teraz dokážeme.

Definícia 2.45. Nech $(a_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť reálnych čísel. Postupnosť $(v_n)_{n=1}^\infty$ definovaná vzťahom

$$v_n = \begin{cases} 0, & \text{ak } n = 1 \\ |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|, & \text{ak } n > 1 \end{cases}$$

sa nazýva variácia postupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Názorne: ak "preskáčeme" po grafe postupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$ z bodu $[1, a_1]$ až po bod $[n, a_n]$ a posčitujeme (v absolútnej hodnote) všetky zmeny "nadmorskej výšky", dostaneme práve v_n. Inak povedané, v_n je dráha, ktorú pri opísanom pohybe prejdeme v smere druhej súradnice.

Všimnite si, že pre každé n platí

$$v_{n+1} - v_n = |a_{n+1} - a_n|$$

(o chvíľu tento vzťah využijeme).

Okrem pojmu variácie postupnosti budeme potrebovať nasledujúci jednoduchý fakt: Ak x_n je neklesajúca postupnosť, tak $y_n = x_n + n$ je rastúca postupnosť. (Dokážte !) Podobne, ak x_n je nerastúca postupnosť, tak $z_n = x_n - n$ je klesajúca postupnosť.

Veta 2.46. *Každá postupnosť reálnych čísel je súčtom rastúcej postupnosti a klesajúcej postupnosti.*

Dôkaz. Nech (a_n) je postupnosť reálnych čísel. Ideme hľadať rastúcu postupnosť (r_n) a klesajúcu postupnosť (k_n) tak, aby $a_n = r_n + k_n$ pre každé n.

Nech (v_n) je variácia postupnosti (a_n). Uvažujme o postupnostiach (r_n^*) a (k_n^*) definovaných vzťahmi

$$r_n^* = \frac{1}{2}(a_n + v_n)$$
$$k_n^* = \frac{1}{2}(a_n - v_n)\ .$$

Potom pre každé n platí $r_n^* + k_n^* = a_n$ a okrem toho

$$\begin{aligned} r_{n+1}^* - r_n^* &= \frac{1}{2}(a_{n+1} + v_{n+1}) - \frac{1}{2}(a_n + v_n) = \frac{1}{2}\left[(a_{n+1} - a_n) + (v_{n+1} - v_n)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(a_{n+1} - a_n) + |a_{n+1} - a_n|\ \right] \geq 0 \end{aligned}$$

[19] Tomuto tvrdeniu možno dať aj presný matematický význam, je to však zatiaľ nad naše možnosti.

a podobne

$$\begin{aligned} k^*_{n+1} - k^*_n &= \frac{1}{2}(a_{n+1} - v_{n+1}) - \frac{1}{2}(a_n - v_n) = \frac{1}{2}\left[(a_{n+1} - a_n) - (v_{n+1} - v_n)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(a_{n+1} - a_n) - |a_{n+1} - a_n|\,\right] \leq 0 \ , \end{aligned}$$

teda postupnosť (r^*_n) je neklesajúca a postupnosť (k^*_n) je nerastúca.

Zatiaľ sme dokázali, že (a_n) je súčtom neklesajúcej postupnosti (r^*_n) a nerastúcej postupnosti (k^*_n). K ukončeniu dôkazu stačí vziať postupnosti $r_n = r^*_n + n$ a $k_n = k^*_n - n$. Potom (r_n) je rastúca, (k_n) je klesajúca a pre každé n platí $r_n + k_n = r^*_n + k^*_n = a_n$. □

2.11 *Z každej postupnosti možno vybrať monotónnu podpostupnosť

Už vieme, že hoci typická postupnosť reálnych čísel je nemonotónna, v istom zmysle nie je monotónnych postupností až tak málo — každá postupnosť reálnych čísel je súčtom vhodnej rastúcej a vhodnej klesajúcej postupnosti.

Teraz dokážeme veľmi dôležitú vetu, ktorá opäť potvrdí, že monotónnych postupností v istom zmysle nie je až tak málo. Dokážeme, že každá postupnosť reálnych čísel má nejakú monotónnu vybranú postupnosť, čiže z každej postupnosti reálnych čísel možno získať monotónnu postupnosť vynechaním nehodiacich sa členov. Možno to vyjadriť aj tak, že v každej postupnosti reálnych čísel je v zmysle podpostupnosti "prítomná" nejaká monotónna postupnosť.

Dôkazy tohto tvrdenia, ktoré možno nájsť v učebniciach matematickej analýzy sú značne komplikované. Tu uvedieme pozoruhodne jednoduchý dôkaz využívajúci pojem chvost postupnosti. Začneme preto definíciou tohto špeciálneho druhu podpostupnosti.

Definícia 2.47. Nech $(a_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť. Potom každú jej podpostupnosť tvaru

$$a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots$$

(teda $(a_{k_n})_{n=1}^\infty$ kde $k_n = r - 1 + n$ pre každé n) voláme chvost postupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Každá postupnosť má teda nekonečne veľa chvostov (môžu sa však navzájom rovnať, napr. každé dva chvosty konštantnej postupnosti sa (ako postupnosti) rovnajú). Postupnosť je aj sama sebe chvostom (zvoľte v definícii $r = 1$).

Lema 2.48. *Ak postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$ nemá najväčší člen, tak sa z nej dá vybrať rastúca podpostupnosť.*

Dôkaz. Ideme konštruovať rastúcu podpostupnosť $b_n = a_{k_n}$ postupnosti $A = (a_n)_{n=1}^\infty$. Zvoľme $b_1 = a_1$ (teda $k_1 = 1$). Ďalej položme $b_2 = a_{k_2}$ kde k_2 je nejaké prirodzené číslo väčšie ako 1, pre ktoré $a_{k_2} > a_1$ (také existuje, lebo a_1 nie je najväčší člen postupnosti A). Ďalej nech $b_3 = a_{k_3}$, kde k_3 je nejaké prirodzené číslo väčšie ako k_2, pre ktoré $a_{k_3} > a_{k_2}$ (také existuje, lebo inak by najväčší spomedzi členov $a_1, a_2, \ldots, a_{k_2}$ bol najväčším členom postupnosti A). Analogicky postupujúc ďalej dostaneme rastúcu podpostupnosť b_n. □

Veta 2.49. *Z každej postupnosti reálnych čísel možno vybrať monotónnu podpostupnosť.*

Dôkaz. Nech $A = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Sú dve možnosti:

(1) *Existuje chvost postupnosti A, ktorý nemá najväčší člen.* Podľa lemy možno z tohto chvosta vybrať rastúcu podpostupnosť. To je zároveň (rastúca) podpostupnosť postupnosti A.

(2) *Každý chvost postupnosti A má najväčší člen.* Nech a_{k_1} je najväčší člen chvosta $a_1, a_2, \dots$ (ak je ich viac, vezmeme hociktorý z nich). Vezmime teraz chvost $a_{k_1+1}, a_{k_1+2}, \dots$ a jeho najväčší člen a_{k_2}. Zrejme $a_{k_1} \geq a_{k_2}$ (pretože a_{k_2} je člen chvosta $a_1, a_2, \dots$ a a_{k_1} je jeho najväčší člen). Nech ďalej a_{k_3} je najväčší člen chvosta $a_{k_2+1}, a_{k_2+2}, \dots$. Zrejme $a_{k_2} \geq a_{k_3}$ (pretože a_{k_3} je člen chvosta $a_{k_1+1}, a_{k_1+2}, \dots$ a a_{k_2} je jeho najväčší člen). Postupujúc takto ďalej dostaneme nerastúcu podpostupnosť $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ postupnosti A.

□

2.12 Cvičenia

Ohraničenosť postupnosti

1. Vyšetrite ohraničenosť (resp. ohraničenosť zdola a zhora) postupností:
   (a) $a_n = \frac{n^2+n+2}{n^2+4n}$,
   (b) $b_n = n - \sqrt{n}$,
   (c) $c_n = \frac{2^n}{3^n+1}$,
   (d) $d_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n+1}$,
   (e) $e_n = n + 2 - \frac{n+1}{2n+3}$.
2. Nech $a_1 > 1$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Dokážte, že postupnosť $(a_n)_1^{\infty}$ je ohraničená.
3. Nech $a_1 > 1$, $a_{n+1} = 7 + \frac{1}{a_n{}^2}$, $n = 1, 2, \dots$. Dokážte, že postupnosť $(a_n)_1^{\infty}$ je ohraničená.

Monotónnosť postupnosti

4. Vyšetrite monotónnosť postupností:
   (a) $a_n = 1 + (-1)^n + n^2$,
   (b) $b_n = \frac{2n+3}{3n-2}$,
   (c) $c_n = \frac{3n^2+2}{3n^2+1}$,
   (d) $d_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$,
   (e) $e_n = \frac{n^2+2n+7}{n^2+2n+8}$,
   (f) $f_n = \log(n+1) - \log n$.
5. Vyšetrite monotónnosť postupnosti
$$a_n = n + \frac{\cos 2n}{\sqrt{3}}, \quad n \geq 1$$
6. Dokážte, že postupnosť a_n rastie od istého indexu počnúc:
$$a_n = 2^n - 10n, \quad n = 1, 2, \dots$$
   Nájdite najväčší a najmenší člen postupnosti.

7. Dokážte, že každá podpostupnosť rastúcej postupnosti je rastúca.

Monotónne a ohraničené postupnosti

8. Dokážte, že postupnosť $(\frac{1}{2n-1})_1^\infty$ je klesajúca a ohraničená.

9. Vyšetrite monotónosť a ohraničenosť postupnosti

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

10. Dokážte, že postupnosť

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}$$

(n odmocnín) je rastúca a zhora ohraničená (zdola je ohraničená triviálne).

11. Vyšetrite ohraničenosť a monotónnosť postupnosti

    (a) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{5a_n + 1}$,
    (b) $x_0 = 1, \quad x_n = \sqrt{6x_{n-1} + 7}$,
    (c) $x_0 = 1000, \quad x_n = \sqrt{x_{n-1} + 30}$,
    (d) $a_0 = 3, \quad a_n = \sqrt{9a_{n-1} + 10}$,
    (e) $a_1 = 3, \quad a_n = \sqrt{1 + 3a_{n-1}}$.

12. Vyšetrite ohraničenosť a monotónnosť postupnosti

    (a) $x_0 = 1, \quad x_n = \frac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}}$,
    (b) $a_0 = 1, \quad a_n = \frac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}+1}$.

Extrémne členy postupnosti

13. Nájdite najväčší člen postupnosti

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 100}, \quad n = 1, 2, \dots$$

14. Nájdite najmensí člen postupnosti

$$a_n = n + \frac{50}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

15. Nájdite najmenší a najväčší člen postupnosti

    (a) $a_n = 3 + 23n - n^2, \quad n = 1, 2, \dots$
    (b) $b_n = -n^2 + 17n + 1, \quad n = 1, 2, \dots$
    (c) $c_n = n^2 - 40n + 2, \quad n = 1, 2, \dots$
    (d) $d_n = n^2 - 30n + 1, \quad n = 1, 2, \dots$

Kapitola 3

Špeciálne postupnosti

3.1 Aritmetické postupnosti

Definícia 3.1. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálnych (resp. komplexných) čísel sa nazýva *aritmetická*, ak existuje také číslo d, že pre každé prirodzené číslo n platí $a_{n+1} = a_n + d$. Číslo d sa nazýva *diferencia* danej postupnosti.

Teda postupnosť je aritmetická, ak $a_{n+1} - a_n$ je konštanta nezávislá od n.

Nasledujúce postupnosti sú aritmetické:

$$\begin{aligned}
-1, -2, \dots, -n, \dots & \qquad (d = -1) \\
a, a, \dots, a, \dots & \qquad (a \text{ ľubovoľné}, d = 0) \\
5, 7, \dots, 2n+3, \dots & \qquad (d = 2) \\
(2-n)_{n=1}^{\infty} & \qquad (d = -1)
\end{aligned}$$

Postupnosť $((-1)^n)_1^{\infty}$ nie je aritmetická.

Veta 3.2. *Nech $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ je aritmetická postupnosť s diferenciou d. Potom*

(1) pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

(2) pre každé $r, s \in \mathbb{N}$ platí

$$a_s = a_r + (s-r)d,$$

(3) ak $n \in \mathbb{N}$, tak pre súčet $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ platí

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n,$$

(teda súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti sa rovná n-násobku aritmetického priemeru prvého a n-tého člena postupnosti),

(4) ak $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, tak pre súčet $s_{k,n} = a_k + a_{k+1} + \dots + a_n$ platí

$$s_{k,n} = \frac{a_k + a_n}{2} \cdot (n-k+1)$$

(teda súčet za sebou idúcich členov aritmetickej postupnosti sa rovná aritmetickému priemeru prvého a posledného zo sčitovaných členov, vynásobenému ich počtom).

Dôkaz. (1) dokážte indukciou. Aby ste dostali všeobecnejší vzťah (2), stačí odčítať vzťahy

$$\begin{aligned} a_r &= a_1 + (r-1)d \\ a_s &= a_1 + (s-1)d \ . \end{aligned}$$

Vzorec z (3) získame sčítaním vzťahov

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ s_n &= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 \ . \end{aligned}$$

Ak uvážime, že pre každé i je podľa už dokázaného tvrdenia (1)

$$a_i + a_{n-i+1} = a_1 + (i-1)d + a_1 + (n-i)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n \ ,$$

dostaneme

$$\begin{aligned} 2s_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_i + a_{n-1+1}) + \cdots + (a_n + a_1) \\ &= n \cdot (a_1 + a_n) \end{aligned}$$

a odtiaľ už vyjde dokazovaný vzťah.

Potrebujeme ešte dokázať (4), čo je zovšeobecnenie (3). Asi najjednoduchšie je uvedomiť si, že $a_k, a_{k+1}, \ldots$ je aritmetická postupnosť s diferenciou d. Ak teda označíme $a_k = b_1$, $a_{k+1} = b_2$ atď., bude $a_n = b_{n-k+1}$ a podľa už dokázaného vzorca z (3) dostaneme

$$s_{k,n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-k+1} = \frac{a_k + a_n}{2} \cdot (n-k+1) \ .$$

□

Nesnažte sa zapamätať si odvodené vzorce so všetkými tými n, k vystupujúcimi v nich. Ak narazíte na situáciu, v ktorej bude namiesto n povedzme $2n$ a namiesto k povedzme $k+1$, ľahko urobíte chybu. Odporúčame pamätať si *slovné* formulácie z vety, napríklad, že

$$\boxed{\begin{aligned} \text{súčet za sebou idúcich } & \text{ členov aritmetickej postupnosti} = \\ & = \tfrac{\text{prvý + posledný}}{2} \times \text{ počet členov} \ . \end{aligned}} \tag{3.1}$$

Veta 3.3. *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(1) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická,

(2) pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ (t. j. každý člen, okrem prvého, je aritmetickým priemerom dvoch susedných členov — to vysvetľuje názov postupnosti),

(3) existuje lineárna funkcia $f(x) = kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = f(n)$ (t.j. graf postupnosti je časťou grafu lineárnej funkcie f).

Dôkaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, teda pre nejaké d platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_{n+1} - a_n = \cdots = d$. Potom pre každé $n \geq 2$ dostaneme $a_{n-1} + a_{n+1} = (a_n - d) + (a_n + d) = 2a_n$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Podľa predpokladu pre každé $n \geq 2$ je $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, odkiaľ $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Teda rozdiel ľubovoľných dvoch susedných členov je konštanta nezávislá od n. To znamená, že postupnosť je aritmetická.

(1) $\Rightarrow$ (3). Nech je postupnosť aritmetická. Podľa predchádzajúcej vety pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d = nd + (a_1 - d) \ ,$$

takže lineárna funkcia $f(x) = dx + (a_1 - d)$ má požadované vlastnosti.

(3) $\Rightarrow$ (1) Nech platí (3). Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n = kn+q$ aj $a_{n+1} = k(n+1)+q$. Odtiaľ $a_{n+1} = a_n + k$, čo dokazuje, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická (s diferenciou k a prvým členom $a_1 = k + q$). □

3.2 Geometrické postupnosti

Definícia 3.4. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálnych (resp. komplexných) čísel sa nazýva *geometrická*, ak existuje také číslo q, že pre každé prirodzené číslo n platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Číslo q sa nazýva *kvocient* postupnosti.

Všimnime si, že ak a_1 aj q sú nenulové, tak všetky členy a_n sú nenulové. Pre postupnosť so samými nenulovými členmi platí, že je geometrická práve vtedy, keď $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ je konštanta nezávislá od n. Naša definícia však pripúšťa, že v geometrickej postupnosti sú aj nulové členy. Samozrejme, ak je niektorý člen nulový, tak sú nutne nulové aj všetky nasledujúce členy.[1]

Nasledujúce postupnosti sú geometrické:

$$\begin{array}{rl}
1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dots, \dfrac{1}{2^{n-1}}, \dots & \quad (q = \dfrac{1}{2}) \\
0, 0, 0, \dots, 0, \dots & \quad (a_1 = 0,\ q \text{ ľubovoľné}) \\
5, 0, 0, \dots, 0, \dots & \quad (q = 0) \\
\left((-1)^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} & \quad (q = -1)
\end{array}$$

Postupnosť 1, 1, -1, -1, 1,1, -1,-1, ... nie je geometrická.

Veta 3.5. *Nech $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ je geometrická postupnosť s kvocientom q. Potom*

(1) pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí [2]

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ ,$$

(2) pre každé $r, s \in \mathbb{N}$, $s \geq r$ platí [3]

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r} \ ,$$

[1] Niektorí autori vsúvajú do definície geometrickej postupnosti predpoklad, že všetky členy sú nenulové. Ako sme už povedali, my tak nerobíme.

[2] pre $n = 1$ a $q = 0$ interpretujeme v záujme platnosti vzťahu výraz 0^0 ako 1, hoci v matematickej analýze sa väčšinou 0^0 nedefinuje. Iná možnosť je uvažovať v (1) iba $n > 1$

[3] Pre $s = r$ a $q = 0$ platí to, čo sme uviedli v predchádzajúcej poznámke pod čiarou. Pre $s \leq r$ však v prípade $q = 0$ nie je q^{s-r} definované. Platíme teda daň za to, že pripúšťame $q = 0$.

(3) ak $n \in \mathbb{N}$, tak pre súčet $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ platí

$$s_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}, & \text{ak } q \neq 1 \\ na_1, & \text{ak } q = 1 \end{cases}$$

(4) ak $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, tak pre súčet $s_{k,n} = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$ platí

$$s_{k,n} = \begin{cases} a_k \cdot \frac{q^{n-k+1}-1}{q-1}, & \text{ak } q \neq 1 \\ (n-k+1)a_k, & \text{ak } q = 1 \end{cases}$$

Dôkaz. Vzťah (1) dokážte indukciou. Vzťah (2) je zrejmý, ak $a_1 = 0$ alebo $q = 0$. V opačnom prípade stačí vydeliť vzťahy $a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$ a $a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$.

Dokážeme (3). Pre $q = 1$ ide o konštantnú postupnosť, takže tvrdenie je triviálne. Pre $q \neq 1$ z identity $q^n - 1 = (q-1) \cdot (q^{n-1} + \cdots + q + 1)$ dostaneme

$$1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \ ,$$

takže

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ &= a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) \\ &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \ . \end{aligned}$$

(Samozrejme, mohli sme postupovať aj tak, že vzorec "uhádneme" a potom ho dokážeme matematickou indukciou.)

(4) plynie z (3), lebo $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, \ldots$ je tiež geometrická postupnosť s kvocientom q. □

Podobne ako v prípade aritmetickej postupnosti, namiesto vzorcov, v ktorých vystupujú k a n, odporúčame pamätať si radšej *slovné* formulácie, napr.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{súčet za sebou idúcich členov geometrickej postupnosti} = \\ &\qquad = \text{prvý člen} \cdot \frac{\text{kvocient}^{\text{počet členov}} - 1}{\text{kvocient} - 1} \ . \end{aligned}} \tag{3.2}$$

Veta 3.6. *Nech $(a_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(1) $(a_n)_{n=1}^\infty$ je geometrická,

(2) pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

(t.j. absolútna hodnota každého člena okrem prvého je geometrickým priemerom oboch susedných členov - odtiaľ názov postupnosti)

Dôkaz. (1) ⇒ (2). Nech postupnosť je geometrická s kvocientom q a nech $n \geq 2$. Ak $q = 0$, je $a_n = a_{n+1} = 0$, takže (2) platí. Nech teraz $q \neq 0$. Potom $a_n = a_{n-1} \cdot q$ a $a_{n+1} = a_n \cdot q$, takže

$$a_n^2 \cdot q = a_n \cdot a_n q = a_{n-1} q \cdot a_{n+1} \ ,$$

odkiaľ vďaka nenulovosti q vyplýva (2).

(2) ⇒ (1). Nech pre každé $n \geq 2$ platí $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. Z tohto ľahko vyplýva, že ak pre nejaké $k \geq 1$ je $a_k = 0$, tak všetky členy postupnosti s možnou výnimkou prvého su nulové. Teda sú tri možnosti. Buď je postupnosť nulová alebo je prvý člen nenulový a ostatné nulové alebo sú všetky členy nenulové. V prvých dvoch prípadach je postupnosť geometrická. V treťom prípade máme $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ pre každé $n \geq 2$. To však opäť znamená, že ide o geometrickú postupnosť (s kvocientom $\frac{a_2}{a_1}$). □

Veta 3.7. *Každá postupnosť, ktorá je súčasne aritmetická aj geometrická, je konštantná (stacionárna).*

Dôkaz. Urobte samostatne.

□

Príklad 3.8. (Skladanie novín.) Noviny majú hrúbku 0,1mm. Prekladáme ich napoly, vždy znovu a znovu. Akú budú mať hrúbku, keď ich preložíme 50 krát?

Riešenie. Keď noviny preložíme raz, stanú sa dvakrát takými hrubými ako pôvodne. Po druhom preložení sa ich hrúbka opäť zdvojnásobí, teda bude už štyrikrát, t.j. 2^2-krát taká ako pôvodne. Po troch preloženiach bude hrúbka 2^3 taká ako pôvodne, atď. Po 50 preloženiach bude teda hrúbka $2^{50} \cdot 0,1$ mm. Pretože $2^{10} = 1024$, čo je približne 10^3, máme odhad zdola:

$$\begin{aligned} 2^{50} \cdot 0,1\,\mathrm{mm} &= (2^{10})^5 \cdot 0,1\,\mathrm{mm} \\ &> (10^3)^5 \cdot 0,1\,\mathrm{mm} = 10^{15} \cdot 0,1\,\mathrm{mm} = 10^{14}\,\mathrm{mm} = 10^{11}\,\mathrm{m} = 10^8\,\mathrm{km} \\ &= 100\,\text{miliónov km} \ . \end{aligned}$$

Pritom priemerná vzdialenosť Zeme od Slnka je 150 miliónov km. Vidíme, ako rýchlo rastú členy geometrickej postupnosti s prvým členom 0, 1 mm a kvocientom 2.[4]

3.3 Aritmetický a geometrický rast

Pojmom "aritmetický rast" opisujeme rast veličiny, ktorá rastie tak, že v každom kroku (období) vzrastie **o konštantnú hodnotu** (diferenciu d).

Pojmom "geometrický (exponenciálny) rast" opisujeme rast veličiny, ktorá rastie tak, že v každom kroku (období) vzrastie **konštantne veľa krát** (jej hodnota v nejakom období je q-krát väčšia ako v predchádzajúcom období, q je kvocient, koeficient geometrického rastu).

Nasledujúci problém je veľmi populárny a vyskytuje sa v rôznych variantách.

Príklad 3.9. (Pšenica na šachovnici – geometrický (exponenciálny) rast.) Okolo r. 1260 Ibn Khallikan, kurdský historik žijúci v Abbasidskom kalifáte (na území dnešného Iraku), napísal encyklopédiu

[4]Príklad tiež ukazuje, že proces abstrakcie, ktorý je vlastný matematickému prístupu k riešeniam problémov, niekedy vedie za hranice reálneho sveta dokonca v prípadoch, kedy sa riešia úplne reálne problémy. Zrejme nikto neprehlási náš výsledok, hoci bezpochyby správny z matematického hľadiska, za vierohodný. Zdá sa zrejmým, že reálne nie je možné 50 krát preložiť noviny a dosiahnuť tak hrúbku viac ako 100 miliónov km. Ak vás príklad zaujal, pokračujte – aká bude zhruba plocha novín? Pri koľkých preloženiach sa dostaneme zhruba na plochu rádove zodpovedajúcu prierezu atómu, teda asi 10^{-20} m^2?

s biografiami slávnych mužov. Jedna z nich zahŕňa historku o šachu, ktorá názorne ukazuje význam toho, čomu hovoríme exponenciálny rast. Historka je o Indii, lebo Ibn Khallikan vedel, že šach pochádzal z Indie.

Podľa tejto historky sa kráľovi Shihramovi zapáčila šachová hra natoľko, že sa rozhodol odmeniť jej vynálezcu, ktorým bol Sissa ben Dahir. Vyzval ho, aby si vypýtal odmenu. Sissa spočiatku nechcel nič, ale na kráľovo naliehanie nakoniec požiadal, aby mu dali na prvé pole šachovnice jedno pšeničné zrno, na druhé pole dve zrná, na tretie pole štyri zrná a tak ďalej, na každé ďalšie pole vždy dvojnásobok toho počtu zŕn, ktoré je na predchádzajúcom poli (tzv. exponenciálny rast). Panovník prijal požiadavku a prikázal správcovi svojich sýpok vydať odmenu. Správca sa však po dlhom čase vrátil s tým, že v sýpkach nie je toľko pšenice. Koľko pšenice mal Sissa dostať?

Riešenie. Šachovnica má 64 polí. Na n-tom poli malo byť 2^{n-1} zŕn, takže celkový počet zŕn, ktoré mal vynálezca dostať, je

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615\ .$$

Ako si predstaviť také množstvo pšenice? Predpokladajme, že priemerné zrno pšenice zaberá objem $2\,\mathrm{mm} \times 2\,\mathrm{mm} \times 5\,\mathrm{mm} = 20\,\mathrm{mm}^3$. Potom pšenica, ktorú si vypýtal Sissa, zaberá približne objem

$$2^{64} \times 20\,\mathrm{mm}^3 = 2^{65} \times 10 \times 10^{-18}\,\mathrm{km}^3 \doteq 370\,\mathrm{km}^3\ .$$

To je viac než kocka o hrane 7 km. Také množstvo pšenice neexistuje ani na celom svete.[5] Problém so Sissovou požiadavkou bol, ze geometrický rast počtu zŕn na jednotlivých poliach šachovnice je jednoducho príliš rýchly. Ak tento počet rastie geometricky (s kvocientom $q > 1$, tu $q = 2$), tak skoro počet zŕn na poli šachovnice dosiahne astronomické rozmery:

$n =$ pole	1	2	3	4	...	10	...	32	...	64
$2^{n-1} =$ poč. zŕn	1	2	4	8	...	512	...	2 147 483 648	...	9 223 372 036 854 775 808

Dokonca aj keby sa Sessa uskromnil a požadoval len zrná z posledného poľa, išlo by o 2^{63} zŕn, čo je približne polovica z celkového počtu $2^{64} - 1$ zŕn. Stále je to viac pšenice než existuje na celom svete.[6]

Príklad 3.10. (Pšenica na šachovnici – aritmetický rast.) Koľko pšenice by Sissa mal dostať, ak by požadoval jedno zrno na prvé pole šachovnice a na každé ďalšie pole vždy o milión zŕn viac ako na predchádzajúce pole? (Ide tu o aritmetický rast počtu zŕn.)

Riešenie. Situáciu vyjadruje tabuľka

$n =$ pole	1	2	3	...	10	...	32	...	64
$1 + (n-1) \cdot 10^6 =$ poč. zŕn	1	1 000 001	2 000 001	...	9 000 001	...	31 000 001	...	63 000 001

Celkový počet zŕn, ktoré by mal Sissa v takomto prípade dostať, je

$$1 + (10^6 + 1) + (2 \cdot 10^6 + 1) + \cdots + (63 \cdot 10^6 + 1) = \frac{1 + (63 \cdot 10^6 + 1)}{2} \cdot 64 = 2\,016\,000\,064\ .$$

To je množstvo zaberajúce objem

$$2\,016\,000\,064 \times 20\,\mathrm{mm}^3 = 40\,320\,001\,280\,\mathrm{mm}^3 \doteq 40\,\mathrm{m}^3\ ,$$

čo predstavuje kocku o hrane menšej ako $3,5\,\mathrm{m}$. Také množstvo by sa v kráľovských sýpkach iste našlo. Rozdiel oproti predchádzajúcemu príkladu je priepastný.[7]

****

[5] To je pravdepodobne viac pšenice než ľudstvo dopestovalo v celej svojej histórii, pretože v roku 2010 bola celosvetová produkcia pšenice asi 650 miliónov ton, čo je menej než $1\,\mathrm{km}^3$.

[6] Dobrú predstavu o geometrickom raste získate, keď porovnáte počet zŕn na prvej polovici šachovnice a na druhej polovici. Urobte!

[7] Ako by to bolo s výhodnosťou prvej či druhej požiadavky pre Sissu, ak by mala šachovnica menší počet polí, napr. len 16?

3.4 *Postupnosti príbuzné s aritmetickými a geometrickými

Aritmetická postupnosť sa konštruuje člen za členom podľa pravidla "v každom kroku pripočítaj d", geometrická postupnosť podľa pravidla "v každom kroku vynásob q". Je preto prirodzené nazvať postupnosť

$$a,\ (a+d)q,\ ((a+d)q+d)\,q,\ \ldots$$

aritmeticko-geometrickou (pre každé n platí $a_{n+1} = (a_n + d)q$) a postupnosť

$$a, aq+d, (aq+d)q+d, \ldots$$

geometricko-aritmetickou (pre každé n platí $a_{n+1} = a_n q + d$).

Samozrejme, fantázii sa medze nekladú, takže by bolo možné skúmať aj postupnosť

$$a, aq+d, aq^2+2d, aq^3+3d, \ldots$$

(a tiež ju prípadne nazvať geometricko-aritmetickou) alebo postupnosť

$$a, (a+d)q, (a+2d)q^2, (a+3d)q^3, \ldots$$

(a tiež ju prípadne nazvať aritmeticko-geometrickou).

Skúste vypočítať napr. súčet prvých n členov poslednej z uvedených postupností. Ak by vám to nešlo, vráťte sa k problému neskôr, keď sa v tomto texte dočítate o tzv. účtovníckom triku. Malo by vám vyjsť

$$\begin{aligned} s_n &= a + (a+d)q + (a+2d)q^2 + \cdots + (a+(n-1)d)q^{n-1} \\ &= \frac{a(q^n-1)}{q-1} + \frac{dq}{(q-1)^2}\left[(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1\right] . \end{aligned}$$

3.5 Cvičenia

Aritmetické a geometrické postupnosti

1. V aritmetickej postupnosti je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 7$, $d = -2$, $S_n = -20$. Určte n.
2. Tri čísla sú po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Ich súčet je 3, súčet ich druhých mocnín je 4. Určte tieto čísla.
3. Určte tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti, ktorá má diferenciu $d = \frac{13}{3}$, ak viete, že súčin týchto čísel sa rovná ich súčtu.
4. Je daná geometrická postupnosť $(b_n)_1^{\infty}$. Určte S_5, ak $S_2 = 4$, $S_3 = 13$.
5. Nech $(b_n)1^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_1 a q, ak $b_1 + b_2 + b_3 = 31$, $b_1 + b_3 = 26$.
6. Nech $(b_n)_1^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_2, ak $b_1 + b_2 + b_3 = 195$, $b_3 - b_1 = 120$.
7. Nech $(b_n)1^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_1, ak $b_3 = 18$, $S_3 = 26$.
8. Nech $(b_n)1^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_5, ak $b_2 - b_1 = 18$, $b_4 - b_3 = 162$.
9. Určte trojciferné číslo, ak jeho cifry sú za sebou idúce členy geometrickej postupnosti a cifry trojciferného čísla, ktoré je o 400 menšie od daného čísla, sú za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti.

10. Voľne padajúce teleso prejde za prvú sekundu dráhu $0,5g$, za každú ďalšiu sekundu dráhu o g väčšiu ako v predchádzajúcej sekunde. Akú dráhu prejde teleso za t sekúnd ?

11. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky, ktorých dĺžky strán tvoria konečnú aritmetickú postupnosť.

12. Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Určte ich veľkosti ak viete, že polomer kružnice vpísanej do trojuholníka je 7 cm.

13. Robotník obsluhuje 16 automatických stavov, z ktorých každý vyrobí za hodinu a metrov látky. Prvý stav uvedie do chodu o $8,00$ hod a každý nasledujúci vždy o 5 minút neskôr. Koľko metrov látky je vyrobené, keď zapína posledný stav ?

14. Stroj stráca opotrebovaním každý rok p percent zo svojej ceny. Za koľko rokov klesne jeho hodnota na polovicu?

15. Polčas premeny rádioaktívnej látky je čas, za ktorý sa polovica jej pôvodného množstva premení na rozpadové produkty. Aký vek má archeologický nález, ak sa v spoločnej vrstve s ním našlo $2,1g$ rádioaktívneho uhlíka s polčasom premeny 5570 rokov a $300g$ rozpadových produktov? (Úbytok hmoty spôsobený žiarením pri premene zanedbajte.)

16. Vypočítajte:

    (a) $3+8+13+\cdots+(5n+3)$

    (b) $\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{11}}{1+2+2^2+\cdots+2^5}$

    (c) $27,1\overline{02}$ (vyjadrite v tvare zlomku v základnom tvare)

17. Sčítajte: $100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2$.

18. Sčítajte (pre $a\neq b$, $a\neq 1$, $b\neq 1$):

$$S=(a+b)+(a^2+ab+b^2)+\cdots+(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n)$$

19. Sčítajte:

$$S=(x+\frac{1}{x})^2+(x^2+\frac{1}{x^2})^2+(x^n+\frac{1}{x^n})^2$$

20. Každá postupnosť, ktorá je súčasne aritmetická aj geometrická, je stacionárna. Dokážte.

21. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby tri rôzne čísla a,b,c boli (nie nutne za sebou nasledujúcimi) členmi nejakej aritmetickej postupnosti.

Kapitola 4

O rekurentných vzťahoch

4.1 Rekurentné vzťahy a rekurentné postupnosti – základné pojmy

V časti (1.3) sme videli, že v rekurentnom vyjadrení postupnosti rozlišujeme dve časti – *počiatočné podmienky* a *rekurentný vzťah.* Príkladom je rekurentné vyjadrenie (1.6), ktoré sme skúmali v príklade 1.11:

$$\underbrace{\underbrace{a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9}_{\text{počiatočné podmienky}},\quad \underbrace{a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n, \quad n = 1, 2, \dots}_{\text{rekurentný vzťah}}}_{\text{rekurentná definícia postupnosti}} .$$

Počiatočné podmienky udávajú niekoľko členov postupnosti, rekurentný vzťah umožňuje postupne vypočítavať ostatné členy.

Väčšinou býva rekurentne určená postupnosť zadaná tak, že je určených prvých r členov $a_1, a_2, \dots, a_r$ (r je prirodzené číslo) a je zadaný predpis, ako pre každé $n \in \mathbb{N}$ určiť člen a_{n+r}, ak už poznáme členy $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+r-1}$[1] (teda a_{n+r} sa počíta len pomocou predchádzajúcich r členov). Ide teda o vzťah, z ktorého môžeme vyjadriť a_{n+r} ako funkciu a_{n+r-1}, a_{n+r-2}, $\dots, a_n$,

$$a_{n+r} = f(a_{n+r-1}, a_{n+r-2}, \dots, a_n) \ . \tag{4.1}$$

V takom prípade hovoríme, že ide o rekurentný vzťah *rádu* r.[2] Napríklad v horeuvedenom rekurentnom vzťahu $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ je $r = 3$, teda ide o rekurentný vzťah rádu 3. V príklade 1.12 sme sa stretli s rekurentným vzťahom $a_{n+1} = (a_n)^2 + 1$, ktorý je prvého rádu. Rekurentný vzťah $a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$, ktorý sme skúmali v príklade 1.9 nemá v zmysle našej definície žiaden rád (počet predchádzajúcich členov, pomocou ktorých počítame nejaký člen závisí totiž od toho, ktorý člen počítame — neexistuje teda konštanta r).

Ak nejaká postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňa rekurentný vzťah (4.1), t.j. pri jej dosadení do (4.1) dostaneme rovnosť (pri každom n), hovoríme tiež, že je *riešením* daného rekurentného vzťahu.

Všimnime si, že prvá hodnota, ktorú pomocou vzťahu (4.1) počítame, je a_{r+1}. Ak predpokladáme, že funkcia f r premenných je definovaná na *celej* množine $\mathbb{R}^r$, tak rekurentný

[1] resp., čo je to isté, predpis, ako pre každé $n \in \mathbb{N}, n \geq r+1$ určiť člen a_n, ak už poznáme členy $a_{n-r}, a_{n-r+1}, \dots, a_{n-1}$.

[2] Požaduje sa tu, aby závislosť a_{n+r} od a_n bola skutočná, t.j., aby sa vzťah (4.1) nedal písať v tvare $a_{n+r} = F(a_{n+r-1}, a_{n+r-2}, \dots, a_{n+1})$ (v takom prípade by rád bol $r-1$ alebo ešte nižší).

vzťah (4.1) má riešenie. Vyhovuje mu dokonca nekonečne veľa postupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pretože prvých r členov môžeme zvoliť ľubovoľne (na čo máme nekonečne veľa možností) a keď je už prvých r členov zadaných, ostatné členy sú definované jednoznačne: člen a_{r+1} je určený hodnotami $a_1, a_2, \dots, a_r$, člen a_{r+2} hodnotami $a_2, a_3, \dots, a_{r+1}$ atď. Teda na jednoznačné určenie postupnosti musíme okrem rekurentného vzťahu zadať aj počiatočné podmienky.

Príklad 4.1. V príklade 1.9 sme videli, že rekurentný vzťah $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ má riešenie $a_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$. Zodpovedá počiatočným podmienkam $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9$. Nie je to jediné riešenie daného rekurentného vzťahu. Iným počiatočným podmienkam zodpovedajú ďalšie riešenia. Presvedčte sa dosadením, že napr. $a_n = n^2 - n + 1$ je tiež riešenie daného rekurentného vzťahu a že zodpovedá počiatočným podmienkam $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7$.

Ak funkcia f zo vzťahu (4.1) nie je definovaná na celej množine $\mathbb{R}^r$, tak sa môže stať, že rekurentnému vzťahu vyhovuje iba konečne veľa postupností alebo dokonca žiadna (nekonečná) postupnosť.

Príklad 4.2. Jediným riešením rekurentného vzťahu

$$a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n - 1} + \sqrt{1 - a_n}$$

je konštantná postupnosť $1, 1, 1, \dots$. Naozaj, ak nejaká postupnosť a_n je riešením, tak nutne $a_n - 1 \geq 0$ a zároveň $1 - a_n \leq 0$, teda $a_n = 1$. Priame dosadenie ukáže, že konštantná postupnosť $1, 1, 1, \dots$ riešením je.

Z vyššie uvedeného je už zrejmé, že mierne pozmenený vzťah

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n - 1} + \sqrt{1 - a_n}$$

nemá žiadne riešenie. (Môžeme zvoliť jedine $a_1 = 1$, potom $a_2 = 0$, ale už člen a_3 sa nedá počítať.)

Treba si uvedomiť rozdiel medzi zápismi (kvôli jednoduchosti uvažujme rekurentný vzťah prvého rádu):

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

a

$$a_1 = A, \quad a_{n+1} = f(a_n), \quad n = 1, 2, \dots \ .$$

Prvý z nich je rekurentný vzťah, ktorý (nemusí mať riešenie ale) možno má nekonečne veľa riešení. Druhý z nich určuje najviac jednu postupnosť (ak postupnosť určuje, je ten zápis jej rekurentnou definíciou).

Príklad 4.3. Uvažujme tri zápisy:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ a_1 = 0, \quad a_{n+1} &= \sqrt{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ a_1 = -1, \quad a_{n+1} &= \sqrt{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Prvý z nich je rekurentným vzťahom, ktorý má nekonečne veľa riešení (vysvetlite!). Druhý z nich je rekurentnou definíciou postupnosti $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Tretí vzťah zdanlivo vyzerá ako rekurentná definícia postupnosti, ale nie je ňou (vysvetlite!).

Ak máme rekurentne definovanú nejakú postupnosť,

$$a_1 = A_1, \dots, a_r = A_r, \quad a_{n+r} = f(a_{n+r-1}, a_{n+r-2}, \dots, a_n), \quad n = 1, 2, \dots \ , \tag{4.2}$$

často nás z rôznych dôvodov zaujíma jej explicitné vyjadrenie (t.j. formula udávajúca a_k ako funkciu k). Súvisiacou úlohou je úloha nájsť v explicitnom tvare všetky riešenia príslušného rekurentného vzťahu

$$a_{n+r} = f(a_{n+r-1}, a_{n+r-2}, \ldots, a_n), \quad n = 1, 2, \ldots \ . \tag{4.3}$$

Táto úloha je v istom zmysle všeobecnejšia. Ak totiž nájdeme všetky riešenia tohto rekurentného vzťahu, obyčajne už nie je ťažké rozhodnúť, ktoré z týchto riešení vyhovuje príslušným počiatočným podmienkam. V praxi to obyčajne funguje tak, že všetky riešenia vzťahu (4.3) nájdeme v tvare formuly

$$a_k = F(k, c_1, c_2, \ldots, c_r)\ ,$$

v ktorej vystupuje r ľubovoľných konštánt $c_1, c_2, \ldots, c_r$ a úloha nájsť explicitné vyjadrenie postupnosti (4.2) potom spočíva v zisťovaní, ako potrebujeme vo formule zvoliť konštanty $c_1, c_2, \ldots, c_r$, aby boli splnené počiatočné podmienky. To sa urobí obyčajným dosadením. Do spomínanej formuly dosadíme postupne $k = 1, k = 2, \ldots, k = r$ a zo získaných r rovníc určíme konštanty $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Väčšinou je to tak, že najľahšie by sa dosadzovalo $k = 0$. To je dôvod, prečo sa pri budovaní teórie riešení rekurentných vzťahov obyčajne uvažujú postupnosti $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ a nie $(a_k)_{k=1}^{\infty}$.[3] Preto už nasledujúcu definíciu sformulujeme pre postupnosti, v ktorých indexy začínajú od nuly.

Definícia 4.4. *Všeobecné riešenie* rekurentného vzťahu

$$a_{n+r} = f(a_{n+r-1}, a_{n+r-2}, \ldots, a_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

je taká postupnosť $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ závisiaca od r konštánt, že

- spĺňa daný vzťah pri každej voľbe konštánt a
- rôznou voľbou konštánt sa vyčerpávajú všetky riešenia (teda pre ľubovoľné počiatočné podmienky $a_0 = A_0, \ldots, a_{r-1} = A_{r-1}$ možno tých r konštánt zvoliť tak, že dostaneme riešenie rekurentného vzťahu spĺňajúce práve dané počiatočné podmienky).

Samozrejme, máme tu na mysli "prípustné" počiatočné podmienky, t.j. také, ku ktorým naozaj existuje riešenie rekurentného vzťahu (4.4), ktoré ich spĺňa. Definícia teda ukazuje, že všeobecné riešenie vzťahu (4.4) predstavuje množinu *všetkých* riešení tohto vzťahu. [4]

Príklad 4.5. Vráťme sa k príkladom 1.11 a 4.1. Ukážeme, že všeobecné riešenie rekurentného vzťahu (tretieho rádu)

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

má tvar

$$a_k = C_1k^2 + C_2k + C_3, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})\ .$$

Dosadením za a_n, a_{n+1}, a_{n+2} a a_{n+3} sa možno presvedčiť, že pre každú voľbu reálnych konštánt C_1, C_2, C_3 naozaj dostaneme riešenie (dosaďte!). Ešte treba overiť, či pre každé počiatočné podmienky $a_0 = A_0$, $a_1 = A_1$ $a_2 = A_2$ existujú také C_1, C_2, C_3, že riešenie $a_k = C_1k^2 + C_2k + C_3$ spĺňa tieto podmienky. Treba teda overiť, či sústava rovníc

$$\begin{aligned} k = 0 \ldots \quad & A_0 = C_3 \\ k = 1 \ldots \quad & A_1 = C_1 + C_2 + C_3 \\ k = 2 \ldots \quad & A_2 = 4 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 + C_3 \end{aligned}$$

[3] Samozrejme, principiálneho rozdielu v tom niet.

[4] S tzv. 'všeobecnými' riešeniami to nie je tak v matematike vždy. Neskôr uvidíte, že to, čo sa v teórii tzv. diferenciálnych rovníc nazýva všeobecným riešením, u niektorých typov diferenciálnych rovníc nevyčerpáva všetky jej riešenia.

(s neznámymi C_1, C_2, C_3) má riešenie. Vyriešením tejto sústavy (urobte!) sa možno presvedčiť, že sústava má riešenie, teda $a_k = C_1k^2+C_2k+C_3$ naozaj je všeobecné riešenie daného rekurentného vzťahu. Poznamenajme ešte, že počiatočným podmienkam $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$ prislúcha riešenie $a_k = k^2$.

Ešte sa vráťme k dohodnutému posunu indexu. V príklade 4.1 sme mali napr., že $a_k = k^2-k+1$ je riešenie nášho rekurentného vzťahu zodpovedajúce počiatočným podmienkam $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7$. Ako to bude teraz, keď máme aj index 0? Postupnosť $a_k = k^2 - k + 1$ je horeuvedeného tvaru ($C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 1$), a teda zostala riešením, ibaže k nej pribudol člen $a_0 = 1$, a teda teraz zodpovedá počiatočným podmienkam $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 3$.

4.2 Od rekurentného k explicitnému — prvé nápady

"Riešiť rekurentný vzťah" znamená nájsť explicitné vyjadrenie všetkých jeho riešení, teda tzv. všeobecného riešenia. Žiaľ, niet univerzálnych pravidiel na riešenie rekurentných vzťahov. Dokonca aj keď máme zadané aj počiatočné podmienky, t.j. keď máme nájsť explicitné vyjadrenie len jednej postupnosti, je situácia obvykle iba o málo ľahšia. V niektorých jednoduchých prípadoch si však vieme poradiť.

Ak vypočítame niekoľko členov rekurentne zadanej postupnosti, môžeme sa napríklad pokúsiť uhádnuť explicitné vyjadrenie ("vzorec") a potom ho dokázať matematickou indukciou. S tým sme sa už stretli v príklade 1.11.

Príklad 4.6. Nájdeme explicitné vyjadrenie rekurentne definovanej postupnosti:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}, \, n \geq 2 \ .$$

Vypočítame niekoľko ďalších členov: $a_2 = \frac{2^2}{1} = 4$, $a_3 = \frac{4^2}{2} = 8$, $a_4 = \frac{8^2}{4} = 16$, $a_5 = \frac{16^2}{8} = 32$. Kdesi sme už také čísla videli... . Aha, sú to mocniny dvojky. Zdá sa, že $a_n = 2^n, n = 0, 1, 2, \ldots$. Dokážeme to matematickou indukciou:

1. Podľa zadania je $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, teda pre $n = 0$ a $n = 1$ naozaj platí $a_n = 2^n$.[5]

2. Predpokladajme, že $a_k = 2^k$ a $a_{k+1} = 2^{k+1}$ pre nejaké $k \geq 0$. (Chceme dokázať, že potom aj $a_{k+2} = 2^{k+2}$.) Potom platí:

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}^2}{a_k} = \frac{\left(2^{k+1}\right)^2}{2^k} = 2^{2k+2-k} = 2^{k+2} \ .$$

   Dôkaz je skončený. Platí $a_n = 2^n, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Podobne možno postupovať, ak nie sú zadané počiatočné podmienky.

Príklad 4.7. Máme riešiť rekurentný vzťah:

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}, \, n \geq 2 \ . \tag{4.5}$$

Aby sme mohli počítať člen a_2, potrebujeme poznať členy a_0, a_1. Tie priamo zadané nie sú. Označme preto

$$a_0 = A, \quad a_1 = B$$

[5] Nestačilo overiť, že $a_0 = 2^0$, pretože v rekurentnom vzťahu $a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ sa a_n počíta pomocou *dvoch* predchádzajúcich členov.

a počítajme ďalej:

$$a_2 = \frac{B^2}{A} = B^2A^{-1} \qquad \text{(teda } a_2 \text{ existuje len ak } A \neq 0\text{)},$$
$$a_3 = \frac{\left(B^2A^{-1}\right)^2}{B} = B^3A^{-2} \qquad \text{(teda } a_3 \text{ existuje len ak } A \neq 0 \text{ aj } B \neq 0\text{)}.$$

Teraz je už zrejmé, že ak sa obmedzíme na nenulové A, B, tak budú existovať aj všetky ďalšie členy postupnosti. Počítajme ďalej:

$$a_4 = \frac{\left(B^3A^{-2}\right)^2}{B^2A^{-1}} = B^4A^{-3}$$
$$a_5 = \frac{\left(B^4A^{-3}\right)^2}{B^3A^{-2}} = B^5A^{-4}\ .$$

Ponúka sa hypotéza, že všeobecné riešenie daného rekurentného vzťahu je:

$$a_k = B^kA^{-(k-1)} = A \cdot \left(BA^{-1}\right)^k\ , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ .^6 \tag{4.6}$$

Dokážeme to. Predovšetkým musíme dokázať, že každá postupnosť tvaru (4.6) je riešením, t.j. že spĺňa rekurentný vzťah (4.5). To sa však ľahko overí priamym dosadením. Naozaj, nech $n \geq 2$. Potom

$$\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} = \frac{\left(A \cdot \left(BA^{-1}\right)^{n-1}\right)^2}{A \cdot \left(BA^{-1}\right)^{n-2}} = \frac{A^2B^{2n-2}A^{2-2n}}{AB^{n-2}A^{2-n}} = A \cdot \left(BA^{-1}\right)^n = a_n\ .$$

Ešte treba dokázať, že pre každé počiatočné podmienky existujú také nenulové konštanty A, B, že postupnosť (4.6) ich spĺňa. Inak povedané, treba dokázať, že pre každé dve reálne čísla A_0, A_1 má nasledujúca sústava rovníc s neznámymi A, B riešenie v obore nenulových reálnych čísel:

$$k = 0 \dots \quad A_0 = A \cdot \left(BA^{-1}\right)^0$$
$$k = 1 \dots \quad A_1 = A \cdot \left(BA^{-1}\right)^1\ .$$

To je však zrejmé, lebo po úprave dostaneme $A = A_0$, $B = A_1$. (Teda riešenie rekurentného vzťahu (4.5) spĺňajúce počiatočné podmienky $a_0 = A_0 \neq 0$, $a_1 = A_1 \neq 0$ je $a_k = A_0 \cdot \left(A_1A_0^{-1}\right)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$.)

Príklad 4.8. Nájdeme explicitné vyjadrenie postupnosti definovanej rekurentne takto:

$$H_1 = 1, \quad H_n = 2H_{n-1} + 1, \quad n = 2, 3, \dots\ . \tag{4.7}$$

Vypočítame niekoľko členov postupnosti: $H_1 = 1$, $H_2 = 3$, $H_3 = 7$, $H_4 = 15$, … a na základe toho uhádneme (vyslovíme hypotézu), že $H_k = 2^k - 1$, $k = 1, 2, \dots$. Matematickou indukciou dokážeme, že objavený vzorec pre H_k je správny.

1. Pre $n = 1$ vzorec dáva $H_1 = 2^1 - 1 = 1$, čo je v súlade s počiatočnou podmienkou. Teda pre $n = 1$ je vzorec správny.

2. Predpokladajme, že vzorec je správny pre $n = k$, t.j. že pre k-ty člen postupnosti (4.7) platí $H_k = 2^k - 1$. Potom $H_{k+1} = 2H_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$, teda vzorec je správny aj pre $n = k + 1$.

Okrem vyššie uvedenej metódy "uhádnem a dokážem matematickou indukciou" sú aj iné postupy. Niekedy napr. pomôže napísať si pod seba vzťahy pre počiatočné členy postupnosti až po k-tý člen vrátane a jednotlivé vzťahy prenásobiť vhodnými výrazmi tak, aby po sčítaní vzťahov vypadli všetky členy okrem k-teho (a prípadne niekoľkých počiatočných členov). Upozorňujeme tiež na to, že niekedy vhodná substitúcia môže rekurentný vzťah zjednodušiť natoľko, že sme už schopní nájsť "vzorec".

Oba popísané postupy budeme ilustrovať na postupnosti z príkladu (4.8).

---

[6] Samozrejme, ak sa vám to viac páči, môžte písať $a_k = a_0 \cdot \left(a_1a_0^{-1}\right)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots,\ a_0, a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Príklad 4.9. Nájdeme explicitné vyjadrenie postupnosti (pozri aj príklad (4.8))

$$H_1 = 1, \quad H_n = 2H_{n-1} + 1, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{4.8}$$

dvoma ďalšími postupmi.

1) Vzťahy pre H_1 až H_k napíšeme pod seba a vynásobíme ich vhodnými číslami:

$$\begin{aligned}
H_k &= 2 \cdot H_{k-1} + 1 & & \\
H_{k-1} &= 2 \cdot H_{k-2} + 1 & & / \cdot 2 \\
H_{k-2} &= 2 \cdot H_{k-3} + 1 & & / \cdot 2^2 \\
&\ldots & & \\
H_3 &= 2 \cdot H_2 + 1 & & / \cdot 2^{k-3} \\
H_2 &= 2 \cdot H_1 + 1 & & / \cdot 2^{k-2} \\
H_1 &= 1 & & / \cdot 2^{k-1} \ .
\end{aligned}$$

Dostaneme:

$$\begin{aligned}
H_k &= 2 \cdot H_{k-1} + 1 \\
2 \cdot H_{k-1} &= 2^2 \cdot H_{k-2} + 2 \\
2^2 \cdot H_{k-2} &= 2^3 \cdot H_{k-3} + 2^2 \\
&\ldots \\
2^{k-3} \cdot H_3 &= 2^{k-2} \cdot H_2 + 2^{k-3} \\
2^{k-2} \cdot H_2 &= 2^{k-1} \cdot H_1 + 2^{k-2} \\
2^{k-1} \cdot H_1 &= 2^{k-1} \ .
\end{aligned}$$

Po sčítaní týchto rovností zistíme, že väčšina členov sa vyruší. Dostaneme

$$H_k = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 1 \cdot \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k - 1 \ .$$

Samozrejme, aj v tomto prípade by bolo treba ešte matematickou indukciou dokázať, že (evidentne jediná) postupnosť určená rekurentne vzťahom (4.8) je naozaj postupnosť $H_k = 2^k - 1, k = 1, 2, \ldots$ (urobte!).

2) Druhou možnosťou je všimnúť si, že vzťah $H_n = 2H_{n-1} + 1$ možno písať v ekvivalentnom tvare $H_n + 1 = 2 \cdot (H_{n-1} + 1)$. Napadne nás použiť substitúciu

$$M_n := H_n + 1, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Pre takto zavedenú postupnosť máme

$$M_1 = 2, \quad M_n = 2M_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots \ .$$

Ak sme snáď mohli mať problém uhádnuť explicitné vyjadrenie pre H_k, úloha je triviálna pre M_k. Výpočtom vychádzajú priamo mocniny dvojky. Teda $M_k = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ (dokážte matematickou indukciou), a preto

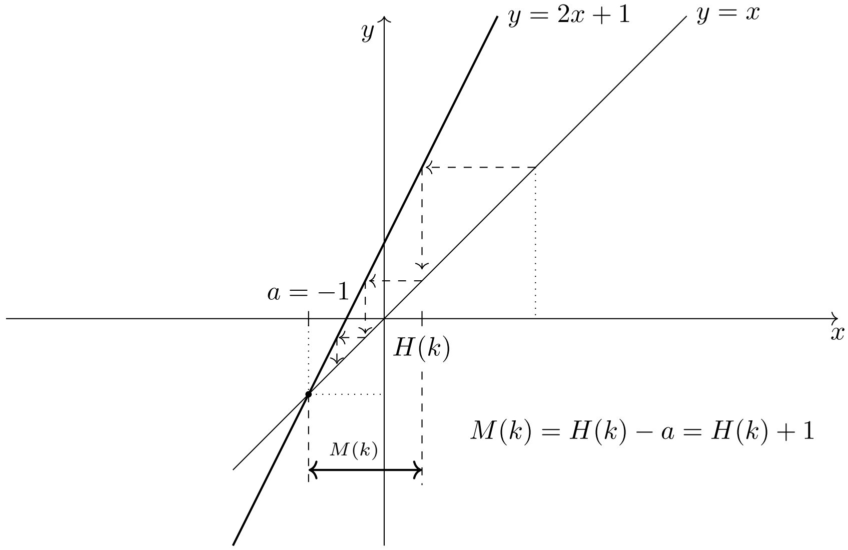
$$H_k = M_k - 1 = 2^k - 1, \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Určite sa vám nápad so substitúciou páčil – riešenie bolo veľmi krátke a elegantné. Nebolo príliš ťažké uhádnuť vhodnú substitúciu. Bude však poučné všimnúť si metódu na nájdenie takej vhodnej substitúcie, ktorú objasníme práve na uvedenom príklade:

Hľadali sme explicitné vyjadrenie rekurentnej postupnosti

$$H_1 = 1, \qquad H_n = f(H_{n-1}), \qquad \text{kde} \quad f(x) = 2x + 1 \tag{4.9}$$

Táto postupnosť je iteračnou postupnosťou funkcie $f(x) = 2x + 1$ s počiatočným bodom 1, pozri iteračný diagram na Obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Substitúcia zjednodušujúca vyšetrovanie iteračnej postupnosti

Funkcia $f(x)$ má jediný pevný bod $a = -1$, ktorý sa nájde riešením rovnice $f(x) = x$. Pri pohľade na iteračný diagram nás napadá zaviesť do našich úvah novú postupnosť $M(k)$, ktorá by vyjadrovala polohu bodu $H(k)$ voči pevnému bodu a:

$$M(k) := H(k) - a = H(k) + 1$$

a to je práve substitúcia, ktorá sa nám tak dobre osvedčila.

Poznamenajme, že analogicky sa dá vhodná substitúcia zvoliť napr. vždy vtedy, keď máte rekurentný vzťah tvaru $a(n + 1) = f(a(n))$, kde $f(x)$ je afinná funkcia, teda $f(x) = rx + b$ (pozri podkapitolu 5.2). Substitúcia

$$e(k) := a(k) - a\ ,$$

kde a je niektorý z pevných bodov funkcie f sa však dá s úspechom použiť aj pri mnohých iných rekurentných vzťahoch $a(n+1) = f(a(n))$. Spomeňte si na to, keď si nebudete vedieť s daným rekurentným vzťahom inak poradiť.

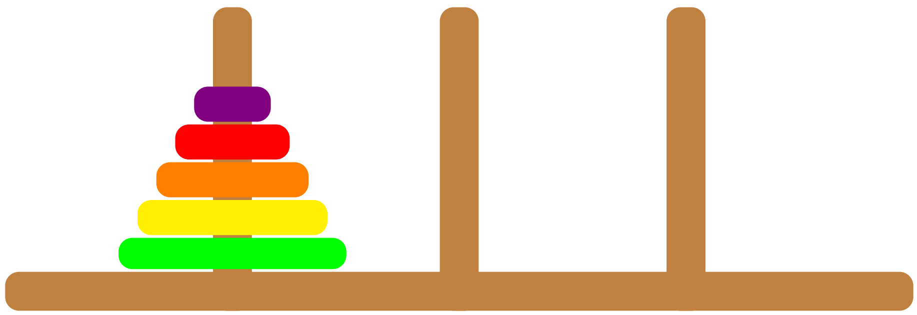
4.3 Hanojská veža

Budeme sa venovať slávnemu problému Hanojskej veže.

Príklad 4.10. (Hanojská veža.) Hanojská veža je hra, ktorú vynašiel v r. 1883 francúzsky matematik E. Lucas.[7] Publikoval ju pod vymysleným menom Claus (ide o tzv. *anagram* jeho mena, ktorý vznikol poprehadzovaním písmen l, u, c, a, s). Lucas prikrášlil hru bájou, podľa ktorej stvoriteľ sveta Brahma umiestnil pod kupolu najväčšej svätyne v meste Benares nad svätou riekou Gangou bronzovú dosku s pripevnenými tromi diamantovými kolíkmi. Na jednom kolíku je navlečených 64 krúžkov (kotúčov) s rôznymi polomermi, pozri Obrázok 4.2. Polomer krúžkov sa smerom nahor zmenšuje, takže tvoria pyramídu. Brahma prikázal kňazom, aby premiestnili všetky krúžky na tretí kolík pri zachovaní týchto pravidiel:

1. prenášať možno vždy len jeden krúžok,
2. prenesené krúžky možno umiestňovať len tak, aby vždy menší ležal na väčšom,
3. krúžky možno umiestňovať na ktorýkoľvek kolík, ale na väčšom krúžku môže vždy ležať len menší krúžok.

Keď kňazi premiestnia všetky krúžky z prvého kolíka na tretí, nastane koniec sveta. Ak každé premiestnenie krúžku trvá jednu sekundu, kedy príde koniec sveta?



Obr. 4.2: Hanojská veža

Úlohu **zovšeobecníme na n krúžkov** a vyriešime ju. Máme teda takúto úlohu:

Do drevenej dosky sú v dostatočných vzdialenostiach od seba vsadené tri kolíky. Na prvom z nich je navlečených n krúžkov s otvormi uprostred a s navzájom rôznymi priemermi tak, že tvoria pyramídu (najväčší krúžok je naspodu). Chceme krúžky postupne premiestniť na tretí (cieľový) kolík tak, aby opäť tvorili rovnakú pyramídu. Počas prekladania nie je dovolené položiť väčší krúžok na menší (preto je potrebné používať aj druhý kolík). Aký najmenší počet krokov je potrebný na preloženie celej pyramídy? (Krokom nazývame preloženie jedného krúžka.)

Pristúpime k riešeniu.

Nech H_n označuje najmenší počet krokov potrebných na prenesenie pyramídy zloženej z n krúžkov. Chceme určiť H_n.

Na prvý pohľad nie je jasné ani len to, či má úloha vôbec riešenie. Dá sa pri dodržaní pravidiel pyramída vôbec preložiť? Začneme s malými hodnotami n. Zrejme $H_1 = 1$ (preložíme jediný krúžok na cieľový kolík). Po chvíli zistíme, že $H_2 = 3$ (menší krúžok preložíme na druhý kolík, väčší krúžok na cieľový kolík a potom naň položíme menší krúžok z druhého kolíka). Pokusy s tromi krúžkami ukazujú, že k cieľu vedie, keď na chvíľu zabudneme na najväčší krúžok a pyramídu z dvoch menších krúžkov, ktorá je na ňom položená, prenesieme tromi krokmi na druhý kolík. Potom preložíme zabudnutý najväčší krúžok na tretí (cieľový) kolík a nakoniec na ten kolík prenesieme aj zvyšné dva krúžky, na čo opäť treba tri kroky. Táto myšlienka sa dá preniesť na všeobecný prípad n krúžkov:[8] najprv prenesieme $n-1$ vrchných krúžkov na druhý (pomocný) kolík (na to potrebujeme H_{n-1} krokov), potom prenesieme najväčší krúžok na tretí (cieľový) kolík (to je

[7] Aj dnes si ju občas možno kúpiť v obchodoch s hlavolamami.

[8] Ak by vám ešte stále nebolo jasné, že úloha má riešenie, zdôraznime, že práve táto myšlienka umožňuje matematickou indukciou dokázať, že pri akomkoľvek $n > 0$ možno krúžky prekladať tak, že dodržiavame pravidlá a dosiahneme požadovaný stav. Premyslite si to!

jeden krok) a nakoniec prenesieme $n-1$ krúžkov položených na pomocnom kolíku na cieľový kolík (znovu H_{n-1} krokov). To ukazuje, že na prenesenie n krúžkov ($n>0$) nám stačí $2H_{n-1}+1$ krokov:

$$H_n \le 2H_{n-1}+1, \quad n>0 \ .$$

Ešte treba ukázať, že menej ako $2H_{n-1}+1$ krokov nestačí, nech by sme krúžky prekladali akokoľvek šikovne (možno inak ako sme vyššie popísali). K tomu si stačí uvedomiť, že v ktoromsi kroku predsa musíme prekladať najväčší zo všetkých n krúžkov z niektorého kolíka na cieľový kolík! Možnože to dokonca robíme viackrát.[9] Uvažujme ten krok, v ktorom posledný krát prekladáme najväčší krúžok na cieľový kolík. To je však možné len tak, ze v okamihu začatia tohto kroku bol na niektorom kolíku len tento najväčší krúžok, na cieľovom kolíku nebol žiaden krúžok a na zvyšnom kolíku bola pyramída z $n-1$ zvyšných krúžkov. Lenže na to, aby sme vytvorili túto pyramídu z $n-1$ menších krúžkov, sme predtým museli urobiť aspoň H_{n-1} krokov. Teraz, ako popisujeme, prekladáme najväčší krúžok na cieľový kolík (to je 1 krok). Čo sa deje ďalej? Najväčší krúžok už neprekladáme, ale pyramídu z $n-1$ krúžkov ešte potrebujeme preniesť na cieľový kolík, na čo treba ešte aspoň H_{n-1} krokov. Ukázali sme, že

$$H_n \ge 2H_{n-1}+1, \quad n>0 \ .$$

To spolu s opačnou nerovnosťou odvodenou vyššie dáva

$$H_1=1, \quad H_n=2H_{n-1}+1, \quad n=2,3,\dots \ .$$

Riešenie tohto rekurentného vzťahu sme našli v príkladoch (4.8) a (4.9):

$$H_k=2^k-1, \quad k=1,2,\dots \ .$$

Teda podľa Lucasovej báje príde koniec sveta o $2^{64}-1=18446744073709551615$ sekúnd. Keďže je to vyše 5 miliárd storočí, môžeme pokojne spávať.

4.4 Fibonacciho čísla

Ťažšou a hlavne z matematického hľadiska oveľa dôležitejšou úlohou ako bol problém Hanojskej veže je problém Fibonacciho králikov.

Stredoveký taliansky matematik Leonardo da Pisa, nazývaný tiež Fibonacci (filius Bonacci – syn Bonacciho), ktorý žil na začiatku 13. storočia, napísal o matematike knihu s mnohými zaujímavými problémami. Jeden z nich sa veľmi preslávil a vošiel do dejín matematiky pod názvom Fibonacciho čísla. Išlo o takúto úlohu:

Predpokladajme, že páru dospelých králikov sa každý mesiac narodí jeden ďalší pár králikov. Novonarodeným králikom trvá mesiac, kým dospejú.[10] V uzavretom priestore umiestnime na začiatku roka jeden pár novonarodených králikov a ponecháme ich voľne bez toho, že by sme z priestoru králiky odoberali alebo do neho králiky pridávali. Koľko párov králikov budeme mať po roku, ak žiaden králik neuhynul?

Fibonacci túto úlohu vyriešil. Pokúsme sa o to aj my. Označme F_n počet párov králikov po n mesiacoch (máme určiť počet párov králikov po roku, teda F_{12}). Uvažujme:

(0) F_0 = počet párov králikov po 0 mesiacoch, čiže teraz, v tejto chvíli. Je $F_0=1$. Ide o jeden celkom mladý pár králikov, na Obrázku 4.3 ho označíme symbolom M.

[9] Jedna z možností, ako sa to môže stať, je, že najväčší krúžok prekladáme niekoľko krát zbytočne z nejakého kolíka na cieľový kolík a späť.

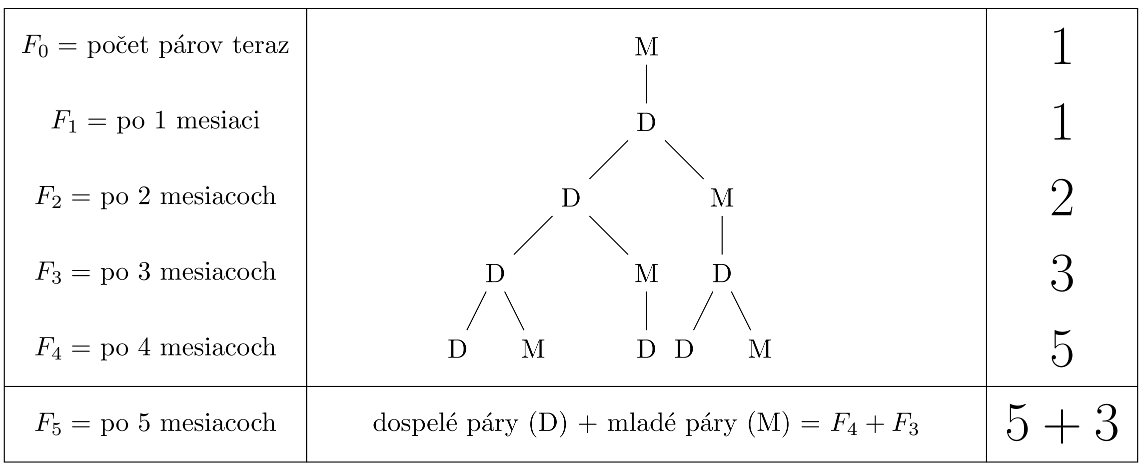
[10] Z toho, čo sme zatiaľ povedali, vyplýva, že králici začínajú rodiť v dvoch mesiacoch svojho života – za prvý mesiac svojho života dospejú a po uplynutí ďalšieho mesiaca už majú mladé. Samozrejme, všetko tu berte ako matematické predpoklady a nie ako zoologické fakty.

(1) F_1 = počet párov králikov po 1 mesiaci. Zrejme $F_1 = 1$. Ide stále o ten istý počiatočný pár králikov, teraz je však už na počiatku dospelosti, použijeme preto označenie D.

(2) F_2 = počet párov králikov po 2 mesiacoch. Po dvoch mesiacoch budeme mať pôvodný pár králikov, ktoré však už majú za sebou prvý mesiac ich dospelosti, takže sa im práve narodil pár mladých králikov. Preto $F_2 = 2$.

(3) Po troch mesiacoch budeme mať všetky tie páry králikov, ktoré sme už mali po dvoch mesiacoch (ibaže teraz sú už všetky dospelé) a okrem toho jeden celkom mladý pár králikov, ktorý sa narodil páru králikov starému dva mesiace. Preto $F_3 = 3$.

(4) Koľko párov králikov budeme mať po 4 mesiacoch? Samozrejme prinajmenšom toľko, koľko sme ich mali po troch mesiacoch, teda prinajmenšom F_3. Okrem toho však budeme mať nejaké čerstvo narodené páry králikov — tých bude toľko, koľko bude po 4 mesiacoch párov králikov starých aspoň dva mesiace (takému a len takému páru sa práve narodil jeden pár mladých králikov). Koľko je však po 4 mesiacoch tých párov králikov, ktoré sú staré aspoň dva mesiace? Nuž toľko, koľko párov králikov žilo po druhom mesiaci, teda $F_2 = 2$. Máme teda $F_4 = F_3 + F_2 = 3 + 2 = 5$.



Obr. 4.3: Počet párov králikov vo Fibonacciho úlohe

(n) Všeobecne, po n mesiacoch budeme mať F_{n-1} dospelých párov králikov (všetky tie, čo sme mali po $n-1$ mesiacoch máme aj teraz) a okrem toho F_{n-2} práve narodených párov králikov (lebo máme práve toľko aspoň dvojmesačných párov králikov a každému takému páru sa práve narodil jeden mladý pár králikov). Preto F_n = počet dospelých párov + počet mladých párov = $F_{n-1} + F_{n-2}$.

Z týchto úvah vidíme, že postupnosť $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, tzv. *Fibonacciho postupnosť*, je rekurentne určená takto:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

(Urobte dôkaz matematickou indukciou! Potrebujete len overiť počiatočné podmienky a zopakovať úvahu z bodu (n) s indexami posunutými o dvojku.)

Po chvíli počítania zistíme, že Fibonacciho postupnosť začína takto:

$$(F_n)_{n=0}^{\infty} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Vidíme, že $F_{12} = 233$, preto po roku budeme mať 233 párov králikov, čo je odpoveď na Fibonacciho úlohu. Poznamenajme ešte, že členy Fibonacciho postupnosti sa nazývajú *Fibonacciho čísla* (F_n je n-té Fibonacciho číslo).

Vyriešili sme Fibonacciho úlohu ale neradi by sme dostali otázku, koľko párov králikov budeme mať po desiatich či dokonca sto rokoch. Poďme preto nájsť explicitné vyjadrenie Fibonacciho postupnosti

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.10}$$

s počiatočnými podmienkami

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1\ . \tag{4.11}$$

Ktosi si všimol, že geometrické postupnosti $(\lambda^n)_{n=0}^{\infty}$ majú istú podobnosť s takými vzťahmi ako je tento.[11] Preto skontrolujeme, či nejaká geometrická postupnosť $a_k = \lambda^k$ nevyhovuje vzťahu (4.10). Hľadáme teda čísla λ s vlastnosťou

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n\ .$$

Jedným riešením tejto rovnice je $\lambda = 0$ (čo znamená, že postupnosť $0, 0, 0, \dots$ je riešením vzťahu (4.10), nevyhovuje však počiatočným podmienkam (4.11)). Nenulové riešenia vzťahu (4.10) sa získajú z rovnice, ktorú dostaneme po vydelení λ^n:

$$\lambda^2 = \lambda + 1\ . \tag{4.12}$$

Je to tzv. *charakteristická rovnica* vzťahu (4.10). Je to kvadratická rovnica. Ľahko nájdeme jej korene

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{a} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ .$$

Našli sme takto dve riešenia vzťahu (4.10). Sú nimi geometrické postupnosti

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \qquad \text{a} \qquad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\ .$$

V skutočnosti však z týchto dvoch riešení vieme vyrobiť mnohé ďalšie riešenia. Naozaj, aj ľubovoľná lineárna kombinácia týchto dvoch riešení, teda

$$F_k = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2 \dots\ , \tag{4.13}$$

je riešením (pre ľubovoľné reálne konštanty C_1, C_2). O tom sa možno presvedčiť tak, že do vzťahu (4.10) dosadíme $F_k = C_1(\lambda_1)^k + C_2(\lambda_2)^k$ a využijeme, že postupnosti $(\lambda_1)^k$ a $(\lambda_2)^k$ vzťahu (4.10) vyhovujú.

Platí dokonca, že iné riešenia ako sú uvedené v (4.13), Fibonacciho rekurentný vzťah (4.10) vôbec nemá. Naozaj, predpokladajme, že nejaká postupnosť $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je riešením vzťahu (4.10).

[11] Podrobnejšie sa tomu budeme venovať v podkapitole 5.4. Tu si len všimnime, že pre akékoľvek $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\lambda^{n+2} = c\lambda \cdot \lambda^{n+1} + (1-c)\lambda^2 \cdot \lambda^n\ .$$

Ak by sme teda zvolili λ a c tak, aby $c\lambda = 1$ aj $(1-c)\lambda^2 = 1$, postupnosť $a(k) = \lambda^k$ by bola riešením vzťahu (4.10).

Stačí ukázať, že táto postupnosť je zahrnutá v (4.13), teda že existujú také konštanty C_1 a C_2, že (výhodné je vrátiť sa na chvíľu k označeniam λ_1, λ_2)

$$\begin{aligned} k = 0 \ldots \quad & a_0 = C_1 + C_2 \\ k = 1 \ldots \quad & a_1 = C_1 \cdot \lambda_1 + C_2 \cdot \lambda_2 \ . \end{aligned}$$

Tu využívame zrejmý fakt, že ak sa dve riešenia rekurentného vzťahu (4.10) zhodujú v nultom aj v prvom člene, tak sa automaticky zhodujú vo všetkých členoch (zdôvodnite). Krátkym výpočtom možno overiť, že uvedená sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych C_1, C_2 má (jediné) riešenie (urobte). To znamená, že v (4.13) sú uvedené práve všetky riešenia vzťahu (4.10) (je to teda všeobecné riešenie vzťahu (4.10) v zmysle definície (4.4)).

Nás pravda momentálne zaujíma len to riešenie vzťahu (4.10), ktoré spĺňa počiatočné podmienky (4.11). Preto riešime len konkrétnu sústavu

$$\begin{aligned} k = 0 \ldots \quad & 1 = C_1 + C_2 \\ k = 1 \ldots \quad & 1 = C_1 \cdot \lambda_1 + C_2 \cdot \lambda_2 \ . \end{aligned}$$

Ak dosadíme $C_2 = 1 - C_1$ do druhej rovnice, po úprave dostaneme $C_1 = \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$. Pretože $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ a $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$, máme $C_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}}$. Potom $C_2 = 1 - C_1 = \frac{\sqrt{5}-\lambda_1}{\sqrt{5}} = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{5}}$. Teda

$$F_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_1^k - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_2^k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}) \ .$$

Po dosadení za λ_1, λ_2 konečne dostávame explicitné vyjadrenie Fibonacciho postupnosti:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Výsledok je prekvapujúci. Čísla F_k sú celé (to vidieť z ich rekurentného vyjadrenia), v ich explicitnom vyjadrení však vystupuje iracionálne číslo $\sqrt{5}$. Takmer sa nechce veriť, že pre každé k dá vzorec celé číslo (presvedčte sa o tom výpočtom niekoľkých hodnôt F_k, aspoň pomocou kalkulačky). Použijúc tento vzorec, môžme určiť každé Fibonacciho číslo F_k bez toho, aby sme museli počítať predchádzajúce čísla. Výpočet sa dá zjednodušiť. Všimnime si, že

$$-0,62 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \ ,$$

takže

$$\left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right| < 0,5 \quad \text{pre každé } k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Z toho vyplýva (pozrite sa na explicitné vyjadrenie F_k), že F_k je celé číslo najbližšie k číslu $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$. Dá sa to povedať aj tak, že

$$F_k \doteq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \ ,$$

kde zaokrúhlenie treba urobiť na celé číslo. Vidíme zároveň, že Fibonacciho čísla rastú exponenciálne.

Fibonacciho čísla sú veľmi dôležité. Je prekvapujúce, v akých, často neočakávaných, súvislostiach sa objavujú v matematike i v prírodných vedách.

Podrobnejšie sa tzv. lineárnym rekurentným vzťahom 2. rádu s konštantnými koeficientami, ku ktorým patrí aj Fibonacciho vzťah (4.10), budeme venovať v podkapitole 5.4.

4.5 Cvičenia

Rekurentné postupnosti

1. Ukážte, že
   (a) postupnosť $a_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ spĺňa podmienky
   $$a_0 = a_1 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{pre } n \geq 2 \ ,$$
   (b) postupnosť $a_n = 3^n - 2n3^n$ spĺňa podmienky
   $$a_0 = 1, a_1 = -3, \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \text{pre } n \geq 2 \ ,$$
2. Postupnosť a_n definujeme rekurentne vzťahmi: $a_0 = a_1 = 1$ a $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-2}}{a_{n-1} + a_{n-2}}$ pre $n \geq 2$.
   (a) Vypočítajte niekoľko prvých členov postupnosti.
   (b) Vychádzajúc z bodu (a), odhadnite všeobecný vzorec pre a_n.
   (c) Matematickou indukciou dokážte vzorec z bodu (b).
3. Zopakujte predchádzajúce cvičenie pre postupnosti
   (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ pre $n \geq 2$,
   (b) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1} - a_{n-2} + 3)^2$ pre $n \geq 2$.
4. Postupnosť a_n definujeme rekurentne vzťahmi: $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ a $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ pre $n \geq 3$.
   (a) Vypočítajte niekoľko prvých v clenov postupnosti.
   (b) Dokážte, že všetky čísla a_n sú nepárne.
   (c) Dokážte, že $a_n \leq 2^{n-1}$ pre všetky $n \geq 1$.
5. Je daný rekurentný vzťah
   $$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$
   (a) Koľko má riešení?
   (b) Koľko má takých riešení, pre ktoré $x_0 = 1$?
   (c) Nájdite všetky riešenia.
   (d) Nájdite všetky riešenia, pre ktoré $x_0 = 1$.
   (e) Nájdite všetky konštantné riešenia (t.j. konštantné postupnosti, ktoré sú riešeniami rekurentného vzťahu).

6. Nájdite všeobecný člen postupnosti zadanej rekurentne (použite napr. metódu "uhádnem vzorec a dokážem ho matematickou indukciou", prípadne použite najskôr vhodnú substitúciu):

   (a) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$,

   (b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{4}{4-a_n}$,

   (c) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3+a_n}$,

   (d) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{4+a_n}$,

   (e) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n}$,

   (f) $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)a_n+2n+1}{n+3}$,

   (g) $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_1 a_n - a_0 a_{n-1}$,

   (h) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Vedeli by ste zapísať a_n "jedným" vzťahom? (Dá sa to napr. pomocou celej časti.)

   (i) $x_1 = 7$, $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$ pre $n \geq 1$,

   (j) $y_1 = 0$, $y_k = 1 + y_{k-1} + 2\sqrt{1 + y_{k-1}}$ pre $k \geq 2$.

7. Postupnosti, ktoré sú dané rekurentne, vyjadrite vzorcom pre ich n-tý člen. Snažte sa úlohy riešiť rôznymi metódami (uhádnuť vzorec pre a_n a dokázať ho matematickou indukciou, zapísať vzťahy pre a_i až po a_n vrátane a z toho vypočítať a_n, použiť teóriu o riešení lineárnych rekurentných vzťahov prvého rádu; uvedomte si tiež, že niekedy vhodná substitúcia zjednoduší rekurentný vzťah):

   (a) $a_0 = 3$, $a_n = -2a_{n-1}$ pre $n \geq 1$,

   (b) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$ pre $n \geq 1$,

   (c) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ pre $n \geq 1$,

   (d) $a_0 = 10$, $a_n = a_{n-1} + 3n^2$ pre $n \geq 1$,

   (e) $x_0 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} + 1, n = 1, 2, \ldots$,

   (f) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n - 1, n = 1, 2, \ldots$,

   (g) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n - (n-2), n = 1, 2, \ldots$,

   (h) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 1 - 2a_n$.

   (i) $a_0 = 0$, $a_n = 3a_{n-1} - 2$.

8. Určte súčet $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ prvých n členov postupnosti zadanej rekurentne:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 1, n = 1, 2, \ldots$$

9. Postupnosti, ktoré sú dané rekurentne, vyjadrite vzorcom pre ich n-tý člen:

   (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-2}$ pre $n \geq 2$,

   (b) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} + 4a_n = 0$ pre $n \geq 1$.

   Vedeli by ste zapísať a_n "jedným" vzťahom?

   ****

   Z nasledujúcich dvoch príkladov vybrať len tie, v ktorých má charakteristická rovnica dva rôzne reálne korene.

   ****

10. Určte postupnosť zadanú rekurentne (určte všeobecný člen). Ak ide o postupnosť reálnych čísel ale vo výsledku vystupuje imaginárna jednotka, upravte vždy výsledok tak, aby v ňom imaginárna jednotka nevystupovala.
    (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 10$, $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$,
    (b) $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$,
    (c) $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$,
    (d) $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} + 8a_n$,
    (e) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = \frac{1}{2}(3a_{n+1} - a_n)$,
    (f) $a_1 = 10$, $a_2 = 16$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$,
    (g) $a_0 = 2$, $a_1 = -2$, $a_{n+2} = -6a_{n+1} - 9a_n$,
    (h) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 16a_n$,
    (i) $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$,
    (j) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_{n+2} = 2\sqrt{3}a_{n+1} - 4a_n$,
    (k) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = -2a_{n+1} - 2a_n$,
    (l) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n+2} = \sqrt{2}a_{n+1} - a_n$,
    (m) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} + 4a_n = 0$.

11. Určte postupnosť zadanú rekurentne (určte všeobecný člen):
    (a) $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ pre $n \geq 3$,
    (b) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0$ pre $n \geq 4$.

12. Nech F_n je n-té Fibonacciho číslo ($(F_n)_1^\infty = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$). Nájdite a_n ako funkciu F_n, ak

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

13. Banka pripisuje na konci roka osempercentné úroky k sume, ktorá bola počas roka uložená na účte. Koľko budete mať na účte po n rokoch, ak
    (a) na začiatku roka vložíte na účet 1000 korún a necháte ich tam počas celých n rokov,
    (b) okrem počiatočného vkladu ako v (a) vždy na konci roka vložíte ešte 100 korún?

14. Na koľko oblastí rozdelí rovinu n priamok, z ktorých sa každé dve pretínajú ale žiadne tri sa nepretínajú v spoločnom bode ?

15. Trpaslík chce vystúpiť po schodišti pozostávajúcom z n schodov. Každým krokom vystúpi o jeden alebo o dva schody vyššie (má príliš krátke nohy na to, aby vládal jedným krokom vystúpiť o tri schody). Určte koľkými spôsobmi môže trpaslík vystúpiť po schodišti. (Návod: Označte tento počet symbolom a_n a nájdite preň rekurentný vzťah.)

16. Chodbu o rozmeroch $n \times 2$ máme pokryť dlaždičkami o rozmeroch 2×1. Koľkými spôsobmi to môžme urobiť?

17. Nájdite a vyriešte rekurentný vzťah pre počet spôsobov, koľkými možno na stožiar vysoký n metrov umiestniť zástavy, ak máme k dispozícii zástavy troch druhov: červené zástavy vysoké dva metre, žlté vysoké jeden meter a modré vysoké tiež jeden meter.

18. Nájdite rekurentný vzťah pre maximálny počet častí, na ktoré môže n kružníc rozdeliť rovinu. Napíšte aj počiatočné podmienky.(Potom problém vyriešte.)

19. Nájdite rekurentný vzťah pre počet spôsobov, koľkými možno ušiť z n vodorovných rovnako širokých červených a bielych pruhov vlajku tak, aby žiadne dva biele pruhy neboli vedľa seba. (Červenej aj bielej látky máme dostatok.) Napíšte aj počiatočné podmienky. (Potom problém vyriešte.)

20. Nájdite rekurentný vzťah a počiatočné podmienky pre počet spôsobov, koľkými možno zoradiť autá do radu dlhého n parkovacích miest, ak môžeme použiť autá troch značiek: Cadillac, Continental a Ford. Cadillac alebo Continental zaberá dve miesta, Ford jedno miesto.

Kapitola 5

*Lineárne rekurentné vzt'ahy

Táto kapitola je spracovaná na základe [7].

5.1 *Štruktúra množiny riešení lineárnych rekurentných vzt'ahov

Už sme povedali, že niet všeobecných pravidiel na riešenie rekurentných vzt'ahov. Dokonca vo všeobecnosti nevieme nič povedat' ani o tom, či vôbec majú riešenia a ak áno, aká je "štruktúra" množiny riešení. Existuje však dôležitá trieda rekurentných vzt'ahov, u ktorých je situácia priaznivejšia. Sú to tzv. *lineárne rekurentné vzt'ahy rádu* r, čiže rekurentné vzt'ahy tvaru

$$a(n+r) + b_1(n) \cdot a(n+r-1) + b_2(n) \cdot a(n+r-2) + \cdots + b_r(n) \cdot a(n) = g(n) \ , \tag{5.1}$$

kde koeficienty $b_1(n), b_2(n), \ldots, b_r(n)$ ako aj $g(n)$ sú zadané funkcie premennej $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ (teda postupnosti). Predpokladáme, že $b_r(n)$ nie je nulová postupnost' (teda aspoň pre jedno prirodzené n je $b_r(n) \neq 0$). V opačnom prípade by išlo o rekurentný vzt'ah rádu nižšieho ako r (pozri nižšie vzt'ah (L2), a komentár k nemu).

Všeobecnejšie, za lineárny sa považuje aj vzt'ah, ktorý možno ekvivalentne upravit' (premiestnením členov, "lineárnou" substitúciou $m + s = n$, predelením postupnost'ou, ktorá má všetky členy nenulové apod.) na vzt'ah (5.1). Niekol'ko príkladov takých vzt'ahov uvádzame nižšie (pozri (HL4), (HL5K), (L2)).

Namiesto obvyklého a_i píšeme $a(i)$. Hlavný dôvod je, že v opačnom prípade by sme v zápisoch mali dlhé indexy, napr. a_{n+r-1} a dokonca dvojité indexy, napr. b_{1_n}, čo by bolo nepríjemné a neprehl'adné.

Špeciálne, koeficienty na l'avej strane, t.j. $b_i(n)$ by mohli byt' čísla (konštantné postupnosti). Vtedy hovoríme o lineárnom rekurentnom vzt'ahu s *konštantnými koeficientami.* Ak je na pravej strane nula (postupnost' $g(n)$ je nulová), hovoríme, že uvedený vzt'ah je *homogénny* (niekedy sa dost' paradoxne hovorí, že ide o vzt'ah *bez pravej strany*).

Uved'me niekol'ko príkladov. O aké rekurentné vzt'ahy ide, vidiet' z ich označení (L =

lineárny, H = homogénny, K = s konštantnými koeficientami, číslo = rád, N = nelineárny).

$$a(n+3) + 2^n a(n+2) + (3n^2 - \sin n)a(n+1) + 5a(n) = 1 + \sqrt{n} \tag{L3}$$

$$a(n+3) + 2^n a(n+2) + (3n^2 - \sin n)a(n+1) + 5a(n) = 0 \tag{HL3}$$

$$a(n+3) - 5a(n+1) + 5a(n) = 1 + \sqrt{n} \tag{L3K}$$

$$a(n+3) + 5a(n) = 0 \tag{HL3K}$$

$$a(n+2) + 5a(n) = n^2 - 3^n + 1 \tag{L2K}$$

$$a(n+1) - na(n) = 0 \tag{HL1}$$

$$a(n+4) - (1-n)a(n+2) = (n^2 + 3^n)a(n) \tag{HL4}$$

$$a(n) - a(n-2) = 3a(n-5) \tag{HL5K}$$

$$(n^2+1)a(n+6) + n^5 a(n+4) = 5 \tag{L2}$$

$$a(n+2)\cdot a(n+1) - 5(a(n))^2 = 3n \tag{N}$$

Posledné štyri vzťahy snáď vyžadujú komentár. To, že vzťah (HL4) je homogénny, uvidíte, ak premiestnite člen s $a(n)$ na ľavú stranu (kam podľa (5.1) "patrí"). Vo vzťahu (HL5K) premiestnite členy na ľavú stranu a urobte substitúciu $n - 5 = m$. Dostanete vzťah

$$a(m+5) - a(m+3) - 3a(m) = 0 \ ,$$

čo je naozaj homogénny lineárny rekurentný vzťah piateho rádu, s konštantnými koeficientami. Vzťah (L2) je iba druhého a nie šiesteho rádu. Po vydelení n^2+1 a substitúcii $n+4 = m$ totiž dostaneme

$$a(m+2) + \frac{(m-4)^5}{(m-4)^2+1}a(m) = \frac{5}{(m-4)^2+1} \ ,$$

čo je lineárny rekurentný vzťah druhého rádu (nehomogénny, s nekonštantnými koeficientami). Konečne, rekurentný vzťah (N) je nelineárny (tým máme na mysli, že nie je lineárny), vystupujú v ňom totiž členy $a(n+2)\cdot a(n+1)$ a $(a(n))^2$, čo podľa (5.1) nie je v lineárnych vzťahoch dovolené.

Poznamenajme ešte, že rekurentný vzťah (4.5) je nelineárny a rekurentný vzťah zo vzťahu (4.7) je lineárny prvého rádu, s konštantnými koeficientami.

Ideme skúmať riešenia rekurentného vzťahu (5.1). Vzťah má určite nekonečne veľa riešení $(a(n))_{n=0}^{\infty}$. Naozaj, hodnoty $a(0), \ldots, a(r-1)$ môžme zvoliť ľubovoľne (a na to je nekonečne veľa možností) a potom zo vzťahu (5.1) vypočítame $a(r)$ pomocou $a(0), \ldots, a(r-1)$, ďalej $a(r+1)$ pomocou $a(1), \ldots, a(r-1)$ a už vypočítaného $a(r)$ atď.[1]

Už vieme, že (5.1) má nekonečne veľa riešení. Špeciálne, je to pravda ak je $g(n)$ nulová postupnosť, t.j. ak uvažujeme homogénny vzťah (vtedy, na rozdiel od nehomogénneho vzťahu, jedným z riešení je zrejme nulová postupnosť). O štruktúre množiny riešení všeobecných rekurentných vzťahov nevieme nič povedať. V prípade lineárnych vzťahov však máme nasledujúce dôležité tvrdenie:

[1] Ide o to, že ak (5.1) vyjadríme v tvare (4.1), tak funkcia f je definovaná na *celej* množine $\mathbb{R}^r$.

Veta 5.1. *Uvažujme lineárny rekurentný vzťah rádu r a k nemu prislúchajúci homogénny vzťah:*

$$a(n+r) + b_1(n) \cdot a(n+r-1) + b_2(n) \cdot a(n+r-2) + \cdots + b_r(n) \cdot a(n) = g(n) \ , \qquad \text{(NV)}$$
$$a(n+r) + b_1(n) \cdot a(n+r-1) + b_2(n) \cdot a(n+r-2) + \cdots + b_r(n) \cdot a(n) = 0 \ . \qquad \text{(HV)}$$

(1) Ak $(x_{\text{hom}}(k))_{k=0}^{\infty}$ a $(y_{\text{hom}}(k))_{k=0}^{\infty}$ sú riešenia (HV) *a $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tak aj lineárna kombinácia $(C_1 \cdot x_{\text{hom}}(k) + C_2 \cdot y_{\text{hom}}(k))_{k=0}^{\infty}$ je riešením* (HV).[2]

(2) Ak $(x_{\text{hom}}(k))_{k=0}^{\infty}$ je riešenie (HV) *a $(y^*(k))_{k=0}^{\infty}$ je riešenie* (NV)*, tak potom ich súčet $(x_{\text{hom}}(k) + y^*(k))_{k=0}^{\infty}$ je riešenie* (NV).

(3) Nech $(y^*(k))_{k=0}^{\infty}$ je jedno (pevne zvolené) riešenie (NV). *Potom pre každé riešenie $(z^*(k))_{k=0}^{\infty}$ vzťahu* (NV) *existuje také riešenie $(x_{\text{hom}}(k))_{k=0}^{\infty}$ vzťahu* (HV)*, že $(z^*(k))_{k=0}^{\infty} = (x_{\text{hom}}(k) + y^*(k))_{k=0}^{\infty}$.*

Dôkaz. (1) Podľa predpokladu pre každé $n = 0, 1, \ldots$ platí

$$x_{\text{hom}}(n+r) + b_1(n) \cdot x_{\text{hom}}(n+r-1) + b_2(n) \cdot x_{\text{hom}}(n+r-2) + \cdots + b_r(n) \cdot x_{\text{hom}}(n) = 0 \ .$$
$$y_{\text{hom}}(n+r) + b_1(n) \cdot y_{\text{hom}}(n+r-1) + b_2(n) \cdot y_{\text{hom}}(n+r-2) + \cdots + b_r(n) \cdot y_{\text{hom}}(n) = 0 \ .$$

Keď prvú rovnosť vynásobíme číslom C_1 a druhú číslom C_2 a vzniknuté rovnosti sčítame, dostaneme, že pre každé n je

$$[C_1 x_{\text{hom}}(n+r) + C_2 y_{\text{hom}}(n+r)] + \cdots + b_r(n)[C_1 x_{\text{hom}}(n) + C_2 y_{\text{hom}}(n)] = 0 \ ,$$

čo dokazuje, že $(C_1 \cdot x_{\text{hom}}(k) + C_2 \cdot y_{\text{hom}}(k))_{k=0}^{\infty}$ je riešenie (HV).

(2) Podobne ako (1) (využije sa, že na pravej strane bude $0 + g(n) = g(n)$).

(3) Položme $x_{\text{hom}}(k) := z^*(k) - y^*(k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Stačí dokázať, že $(x_{\text{hom}}(k))_{k=0}^{\infty}$ je riešenie vzťahu (HV). To sa urobí podobne ako v (1) a (2) (využije sa, že na pravej strane bude $g(n) - g(n) = 0$). □

Pomocou tvrdenia (1) matematickou indukciou ľahko dokážeme

Dôsledok 5.2. *Ak $(x_{\text{hom}}^{(1)}(k))_{k=0}^{\infty}, \ldots, (x_{\text{hom}}^{(s)}(k))_{k=0}^{\infty}$ sú riešenia* (HV) *a $C_1, \ldots, C_s \in \mathbb{R}$, tak aj lineárna kombinácia $(C_1 \cdot x_{\text{hom}}^{(1)}(k) + \cdots + C_s \cdot x_{\text{hom}}^{(s)}(k))_{k=0}^{\infty}$ je riešením* (HV).[3]

Dôsledok 5.3. *Predpokladajme, že nájdeme (napríklad nejako uhádneme)* jedno *riešenie* (NV) *a nájdeme* všetky *riešenia* (HV). *Potom* všetky *riešenia* (NV) *sa dajú získať ako aritmetické súčty toho jedného riešenia* (NV) *s jednotlivými riešeniami* (HV). *Symbolicky:*

$$\boxed{\textit{všetky riešenia } \text{(NV)} = \textit{všetky riešenia } \text{(HV)} + \textit{jedno riešenie } \text{(NV)}} \ ,$$

čiže, v skrátenom označení,

$$\boxed{a(k) = a_{\text{hom}}(k) + a^*(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots} \ .$$

[2]Špeciálne, súčet riešení (HV) a C-násobok riešenia (HV) sú opäť riešenia (HV). Pre tých, čo poznajú vektorové priestory uveďme, že (1) znamená, že množina všetkých riešení (HV) je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel. Poznamenajme ešte, že ak uvažujeme postupnosti komplexných čísel, tvrdenie platí všeobecnejšie pre všetky $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. V takom prípade je množina všetkých riešení (HV) vektorovým priestorom nad poľom komplexných čísel.

[3]Opäť, ak uvažujeme postupnosti komplexných čísel, tvrdenie platí všeobecnejšie pre všetky $C_1, \ldots, C_s \in \mathbb{C}$.

Dôkaz. Vyplýva z vety 5.1. Z časti (2) vieme, že uvedenými súčtami vznikajú riešenia (NV) a z časti (3) vieme, že takýmto spôsobom naozaj získame každé riešenie (NV). □

Príklad 5.4. Vrátime sa k príkladom 4.8 a 4.9. Ďalším spôsobom nájdeme explicitné vyjadrenie postupnosti

$$H(1) = 1, \quad H(n) = 2H(n-1) + 1, \quad n = 2, 3, \dots\ .$$

Urobíme to tak, že najskôr nájdeme všetky riešenia lineárneho rekurentného vzťahu prvého rádu

$$H(n) - 2H(n-1) = 1, \quad n = 2, 3, \dots\ . \tag{5.2}$$

Budeme postupovať podľa dôsledku 5.3. Najskôr nájdeme všetky riešenia homogénneho vzťahu

$$H(n) - 2H(n-1) = 0, \quad n = 2, 3, \dots\ . \tag{5.3}$$

Ak $H(1) = C$, tak $H(2) = 2C$, $H(3) = 2H(2) = 2^2C$ atď. Matematickou indukciou dostaneme všeobecné riešenie homogénneho vzťahu: $H_{\mathrm{hom}}(k) = 2^{k-1}C$, $k = 1, 2, \dots$.

Potrebujeme ešte nájsť jedno riešenie nehomogénneho vzťahu (5.2). Obvyklý trik je, že sa snažíme zistiť, či neexistuje také riešenie v nejakej "podozrivej" triede postupností. Napr. v našom prípade je pravá strana vzťahu (5.2) konštantná. Podozrievame preto, že snáď medzi konštantnými postupnosťami by mohlo existovať riešenie (5.2). Overíme to tak, že dosadíme konštantnú postupnosť $h, h, h, \dots$ do (5.2):

$$h - 2h = 1\ .$$

Teda konštantná postupnosť $h, h, h, \dots$ je riešením (5.2) práve vtedy, keď $h = -1$. Našli sme tak jedno riešenie nehomogénneho vzťahu: $H^*(k) = -1$, $k = 1, 2, \dots$.

Podľa dôsledku 5.3 dostávame všeobecné riešenie (5.2) ako súčet všeobecného riešenia (5.3) a už nájdeného jedného riešenia (5.2):

$$H(k) = H_{\mathrm{hom}}(k) + H^*(k) = 2^{k-1}C - 1, \quad k = 1, 2, \dots\ .$$

Aby sme našli explicitné vyjadrenie postupnosti (5.2), stačí už len zistiť, pre akú voľbu C bude splnená počiatočná podmienka $H(1) = 1$:

$$k = 1 \dots \quad 1 = 2^{1-1}C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 2\ .$$

Teda postupnosť (5.2) má explicitné vyjadrenie $H(k) = 2^{k-1} \cdot 2 - 1 = 2^k - 1$, $k = 1, 2, \dots$.

Ak má pravá strana lineárneho rekurentného vzťahu tvar súčtu dvoch postupností $g_1(n) + g_2(n)$, môže byť pri hľadaní riešení výhodné namiesto daného vzťahu uvažovať dva nové vzťahy — jeden s pravou stranou $g_1(n)$, druhý s pravou stranou $g_2(n)$ (ľavé strany ponecháme bez zmeny). Naznačuje to nasledujúce jednoduché ale dôležité tvrdenie.

Veta 5.5. (Princíp superpozície.) *Uvažujme nehomogénne lineárne rekurentné vzťahy (ľavé strany sú rovnaké !):*

$$a(n+r) + b_1(n) \cdot a(n+r-1) + \cdots + b_r(n) \cdot a(n) = g_1(n) + g_2(n)\ , \tag{NV(1+2)}$$

$$a(n+r) + b_1(n) \cdot a(n+r-1) + \cdots + b_r(n) \cdot a(n) = g_1(n)\ , \tag{NV(1)}$$

$$a(n+r) + b_1(n) \cdot a(n+r-1) + \cdots + b_r(n) \cdot a(n) = g_2(n)\ . \tag{NV(2)}$$

Nech $(x^*(k))_{k=0}^{\infty}$ *je nejaké (jedno) riešenie* (NV(1)) *a nech* $(y^*(k))_{k=0}^{\infty}$ *je nejaké (jedno) riešenie* (NV(2)). *Potom* $(x^*(k) + y^*(k))_{k=0}^{\infty}$ *je (jedno) riešenie* (NV(1+2)).

Dôkaz. Sčítaním rovností

$$x^*(n+r) + b_1(n) \cdot x^*(n+r-1) + \cdots + b_r(n) \cdot x^*(n) = g_1(n),$$
$$y^*(n+r) + b_1(n) \cdot y^*(n+r-1) + \cdots + b_r(n) \cdot y^*(n) = g_2(n)$$

dostaneme

$$[x^*(n+r) + y^*(n+r)] + \cdots + b_r(n) \cdot [x^*(n) + y^*(n)] = g_1(n) + g_2(n) \ .$$

□

Princíp superpozície možno zovšeobecniť na prípad, keď pravá strana je súčtom ľubovoľného konečného počtu postupností. Premyslite si to!

5.2 *Afinné rekurentné vzťahy

S afinnými rekurentnými vzťahmi sme sa už stretli v závere podkapitoly 4.2. Pre ich dôležitosť ako aj preto, lebo sú to lineárne rekurentné vzťahy, čo je téma tejto kapitoly, sa pri nich znovu pristavíme.

Budeme riešiť rekurentný vzťah

$$a(n+1) = r \cdot a(n) + b, \quad n = 0, 1, \ldots \ , \quad r \neq 0 \ . \tag{5.4}$$

Vzťahy tohto tvaru sa nazývajú *afinné*. [4]

Ak príslušný vzťah prepíšeme do tvaru $a(n+1) - ra(n) = b$, stane sa zrejmým, že ide o lineárny rekurentný vzťah 1. rádu s konštantnými koeficientami[5] a s konštantnou pravou stranou (na pravej strane je konštantná postupnosť $g(n) = b$). Už v príkladoch 4.8, 4.9 a 5.4 sme niekoľkými rôznymi spôsobmi úspešne vyriešili takýto vzťah pre $r = 2$ a $b = 1$. Tušíme, že nebude ťažké zovšeobecniť naše skúsenosti z uvedených príkladov.

Najskôr skúmajme špeciálny prípad, keď $\boxed{r = 1}$:

$$a(n+1) = a(n) + b, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{5.5}$$

Tento vzťah je natoľko jednoduchý, že k jeho riešeniu nemusíme využiť žiadne teoretické poznatky (hoci aj tak by sa dalo postupovať). Naozaj, ak $a(0) = C$, dostávame postupne $a(1) = a(0) + b = C + b$, $a(2) = a(1) + b = C + 2b$ atď. Matematickou indukciou dostaneme všeobecné riešenie 5.5:

$$a(k) = C + kb, \quad k = 0, 1, 2 \ldots \ .$$

[4]Funkcia $f(x) = rx + b$ (pripúšťa sa aj $r = 0$), nazývaná v stredoškolskej matematike lineárnou, sa totiž vo vysokoškolskej matematike (niekedy) správnejšie nazýva afinnou. Predpoklad $r \neq 0$ robíme z dvoch dôvodov. Predovšetkým chceme, aby vzťah bol prvého rádu. Okrem toho, riešiť vzťah pre $r = 0$ je triviálna záležitosť. Naozaj, pre vzťah

$$a(n+1) = b, \quad n = 0, 1, \ldots$$

vieme okamžite písať jeho riešenia – je zrejmé, že riešeniami sú práve všetky postupnosti tvaru

$$(a(k))_{k=0}^{\infty} = C, b, b, \ldots, b, \ldots \ ,$$

kde C je ľubovoľná konštanta. Partikulárnym riešením daným počiatočnou podmienkou $a(0) = a_0$ je postupnosť $a_0, b, b, \ldots, b, \ldots$.

[5]snáď presnejšie, s konštantným koeficientom

Pre každé $C \in \mathbb{R}$ je to riešenie vzťahu (5.5). Konštanta C závisí od počiatočnej podmienky. Pre riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $a(0) = a_0$ vyjde $C = a_0$, teda

$$a(0) = a_0 + kb, \quad k = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Prejdime teraz k prípadu, keď $\boxed{r \neq 1}$ (stále však predpokladáme, že $r \neq 0$) :

$$a(n+1) = r \cdot a(n) + b, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ , \quad r \neq 1 \ . \tag{5.6}$$

Je veľa postupov, ako sa dopracovať k riešeniu.

(1) *Prvý postup* je zovšeobecnením prvého postupu z príkladu 4.9. Vzťahy pre $a(0)$ až $a(k)$ napíšeme pod seba a vynásobíme ich vhodnými číslami:

$$\begin{aligned}
a(k) &= r \cdot a(k-1) + b \\
a(k-1) &= r \cdot a(k-2) + b \quad && / \cdot r \\
a(k-2) &= r \cdot a(k-3) + b \quad && / \cdot r^2 \\
&\dots \\
a(2) &= r \cdot a(1) + b && / \cdot r^{k-2} \\
a(1) &= r \cdot a(0) + b && / \cdot r^{k-1} \\
a(0) &= a_0 && / \cdot r^k \ .
\end{aligned}$$

Dostaneme:

$$\begin{aligned}
a(k) &= r \cdot a(k-1) + b \\
r \cdot a(k-1) &= r^2 \cdot a(k-2) + rb \\
r^2 \cdot a(k-2) &= r^3 \cdot a(k-3) + r^2 b \\
&\dots \\
r^{k-2} \cdot a(2) &= r^{k-1} \cdot a(1) + r^{k-2} b \\
r^{k-1} \cdot a(1) &= r^k \cdot a(0) + r^{k-1} b \\
r^k \cdot a(0) &= r^k a_0 \ .
\end{aligned}$$

Po sčítaní týchto rovností zistíme, že väčšina členov sa vyruší. Dostaneme

$$a(k) = b + rb + r^2 b + \dots + r^{k-1} b + r^k a_0 = b \cdot \frac{r^k - 1}{r - 1} + r^k a_0 \ .$$

Výsledok sa dá ešte zjednodušiť takto:

$$a(k) = b \cdot \frac{r^k - 1}{r - 1} + r^k a_0 = r^k \left(a_0 - \frac{b}{1-r} \right) + \frac{b}{1-r}, \quad k = 0, 1, \dots \ . \tag{5.7}$$

To je partikulárne riešenie dané počiatočnou podmienkou $a(0) = a_0$. Ak chceme napísať všeobecné riešenie, stačí si uvedomiť, že ak a_0 prebieha všetky reálne čísla, tak $a_0 - \frac{b}{1-r}$ prebieha tiež práve všetky reálne čísla. Teda všeobecné riešenie je

$$a(k) = C r^k + \frac{b}{1-r}, \quad k = 0, 1, \dots \ , C \in \mathbb{R} \ . \tag{5.8}$$

(2) *Druhý postup* je zovšeobecnením druhého postupu z príkladu 4.9. Hľadáme také číslo x, aby sa náš rekurentný vzťah $a(n+1) = r \cdot a(n) + b$ dal písať v tvare

$$a(n+1) + x = r(a(n) + x) \; .$$

Pretože $a(n+1)+x = ra(n)+b+x$, vidíme,že x je číslo s vlastnosťou $rx = b+x$, odkiaľ $x = \frac{b}{r-1}$. Ak teda zavedieme substitúciu $a(k)+\frac{b}{r-1} = A(k)$, dostaneme rekurentný vzťah

$$A(n+1) = rA(n) \; , \quad n = 0, 1, \dots \; ,$$

Ak $a(0) = C$, máme $a(1) = Cr$, $a(2) = Cr^2$, ..., $a(k) = Cr^k$ (dokážte matematickou indukciou). Teda všeobecné riešenie je $A(k) = Cr^k$. Odtiaľ už máme všeobecné riešenie pôvodného rekurentného vzťahu:

$$a(k) = A(k) - \frac{b}{r-1} = Cr^k + \frac{b}{1-r} \; , k = 0, 1, \dots \; .$$

To je samozrejme to isté ako (5.8). Ak hľadáme partikulárne riešenie dané počiatočnou podmienkou $a(0) = a_0$, dosadením $k = 0$ (urobte !) vyjde opäť (5.7).

(3) *Tretí postup* je založený na dôsledku 5.3. Najskôr nájdeme všeobecné riešenie príslušného homogénneho vzťahu $a(n+1) = r \cdot a(n)$. To už poznáme: $a_{\mathrm{hom}}(k) = Cr^k$, $k = 0, 1, \dots$. Jedno riešenie $a^*(k)$ nehomogénneho vzťahu budeme hľadať v tvare konštantnej postupnosti $a, a, a, \dots$. Po dosadení do (5.6) dostaneme a =ra+b, odkiaľ $a = \frac{b}{1-r}$ (tu využívame, že uvažujeme prípad $r \neq 1$). Teda

$$a(k) = a_{\mathrm{hom}}(k) + a^*(k) = Cr^k + \frac{b}{1-r}, \quad k = 0, 1, \dots \; ,$$

čo je vzťah (5.8). Partikulárne riešenie sa nájde ako vyššie.

(4) *Štvrtý postup* je založený na tom, že vzťah (5.6) možno písať v tvare

$$a(n+1) = f(a(n)), \; n = 0, 1, \dots \quad \text{kde } f(x) = rx + b \; .$$

Teda riešeniami (5.6) sú práve všetky iteračné postupnosti funkcie f (počiatočný bod postupnosti možno zvoliť ľubovoľne). Funkcia $f(x)$ má jediný pevný bod $a = \frac{b}{1-r}$, ktorý sa nájde riešením rovnice $f(x) = x$. Pre túto konštantu a je postupnosť $a, a, a, \dots$ riešením nášho rekurentného vzťahu. Iteračný diagram (pozri Obrázok 5.1) nás inšpiruje zaviesť do našich úvah novú postupnosť $e(k)$, ktorá by vyjadrovala polohu bodu $a(k)$ voči pevnému bodu a:

$$e(k) := a(k) - a, \quad \text{teda} \quad a(k) = e(k) + a \; .$$

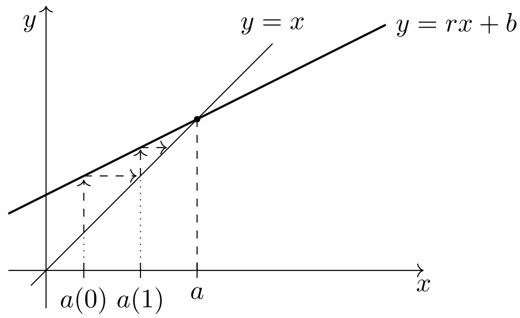
Ak vykonáme v (5.6) túto substitúciu a dosadíme $a = \frac{b}{1-r}$, dostaneme (urobte!)

$$e(n+1) = re(n), \quad n = 0, 1, \dots \; .$$

Všeobecné riešenia je (vysvetlite) $e(k) = Cr^k$, takže pre všeobecné riešenie (5.6) dostávame

$$a(k) = e(k) + a = Cr^k + \frac{b}{1-r}, \quad k = 0, 1, \dots$$

čo je to isté ako (5.8). Partikulárne riešenie dané počiatočnou podmienkou sa nájde dosadením opäť dosadením $k = 0$.



Obr. 5.1: Iteračný diagram (afinná funkcia $f(x) = rx + b$, počiatočný bod $a(0)$)

(5) Ak čitateľovi nestačili uvedené štyri postupy, ponúkame ešte návod na *piaty postup*: uvažujte o postupnosti, ktorá spĺňa daný rekurentný vzťah a počiatočnú podmienku $a(0) = a_0$. Pokúste sa uhádnuť riešenie a potom urobte dôkaz matematickou indukciou, že ste uhádli správne.

Získané poznatky zhrnieme do vety:

Veta 5.6. (Afinné rekurentné vzťahy.) *Uvažujme afinný rekurentný vzťah*

$$a(n+1) = ra(n) + b, \quad n = 0, 1, \dots , \quad r \neq 0 \ .$$

Potom

(1) Všeobecné riešenie je

$$a(k) = \begin{cases} C + kb, & ak \ r = 1 \\ Cr^k + \frac{b}{1-r}, & ak \ r \neq 1 \end{cases} , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(pre $r \neq 1$ je číslo $a = \frac{b}{1-r}$ pevným bodom funkcie $f(x) = rx + b$).

(2) Partikulárne riešenie dané počiatočnou podmienkou $a(0) = a_0$ je

$$a(k) = \begin{cases} kb + a_0, & ak \ r = 1 \\ \left(a_0 - \frac{b}{1-r}\right) r^k + \frac{b}{1-r}, & ak \ r \neq 1 \end{cases} , \quad k = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Príklad 5.7. Máme vypočítať

$$a(k) = 1 + r + r^2 + \cdots + r^k, \qquad r \neq 1 \tag{5.9}$$

bez použitia vzorca pre súčet za sebou idúcich členov geometrickej postupnosti. Môžme postupovať tak, že si všimneme, že

$$a(n+1) = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n+1} = 1 + r(1 + r + \cdots + r^n) = 1 + ra(n) \ .$$

Podľa Vety 5.6 je všeobecné riešenie tohto rekurentného vzťahu

$$a(k) = Cr^k + \frac{1}{1-r} \ .$$

Pretože z (5.9) vidíme počiatočnú podmienku $a(0) = 1$, prichádzame k tomu, že $C = \frac{-r}{1-r}$ (vypočítajte !). Pre súčet (5.9) takto dostávame:

$$a(k) = \frac{-r}{1-r} \cdot r^k + \frac{1}{1-r} = \frac{1 - r^{k+1}}{1-r} ,$$

čo je samozrejme v súlade s Vetou 3.5 (pozrite slovnú formuláciu za dôkazom vety !). Samozrejme, partikulárne riešenie sme mohli na základe vety napísať priamo, bez okľuky cez všeobecné riešenie.

Príklad 5.8. Na účet vložíme sumu s. Predpokladajme, že účet prináša $p\%$ ročný úrok počítaný m-krát ročne. Okrem toho predpokladajme, že na konci každého z období kedy sa počíta úrok vložíme na účet konštantnú sumu b (alebo ju odoberieme z účtu, ak $b < 0$). Nech $a(n)$ je suma na účte po n obdobiach. Chceme vypočítať $a(n)$.

Počiatočná podmienka je $a(0) = s$. Súvis medzi sumou $a(n + 1)$, ktorá je na účte na konci $(n + 1)$-ého odobia a sumou $a(n)$, ktorá je na účte na konci n-tého obdobia je vyjadrený vzťahom

$$a(n+1) = \left(1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{p}{100}\right) \cdot a(n) + b .$$

Ak označíme $r = 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{p}{100}$, je to presne rekurentný vzťah z vety 5.6. Partikulárne riešenie, ktoré hľadáme, je teda

$$a(k) = \left(1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{p}{100}\right)^k \left(s + \frac{100mb}{p}\right) - \frac{100mb}{p} .$$

Ak $b = 0$, formula sa zjednoduší na

$$a(k) = s\left(1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{p}{100}\right)^k .$$

Ak nás zaujíma, koľko budeme mať na účte po r rokoch, treba dosadiť $k = mr$.

5.3 *Lineárne rekurentné vzťahy 1. rádu s konštantnými koeficientami

V predchádzajúcej časti sme sa naučili riešiť rekurentné vzťahy tvaru $a(n+1) = r \cdot a(n) + b$, $r \neq 0$. Išlo o *špeciálne* lineárne rekurentné vzťahy 1. rádu s konštantnými koeficientami. Nahraďme teraz konštantu b ľubovoľnou postupnosťou $g(n)$:

$$a(n+1) = r \cdot a(n) + g(n), \quad n = 0, 1, \dots , \quad r \neq 0 .\text{[6]} \tag{5.10}$$

Porovnaním s (5.1) vidíme, že ide o všeobecný lineárny rekurentný vzťah 1. rádu s konštantnými koeficientami. Ideme sa pokúsiť riešiť takéto vzťahy.

Tieto vzťahy sú oveľa komplikovanejšie ako afinné a nie vždy ich vieme riešiť. Podarí sa nám to len pre niektoré postupnosti $g(n)$. Skôr než ukážeme, ako sa aspoň niektoré z týchto vzťahov dajú riešiť, naznačme, prečo je tu taká veľká odlišnosť oproti prípadu keď postupnosť $g(n)$ je konštantná. Vezmime napr. špeciálny prípad, keď $r = 1$:

$$a(n+1) = a(n) + g(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

[6] Predpoklad $r \neq 0$ zabezpečuje, že ide o vzťah prvého rádu. Okrem toho, podobne ako u vzťahov $a(n + 1) = ra(n) + b$, prípad $r = 0$ by bol triviálny. Riešeniami vzťahu

$$a(n+1) = g(n), \quad n = 0, 1, \dots$$

sú práve všetky postupnosti tvaru

$$(a(k))_{k=0}^{\infty} = C, g(0), g(1), g(2), \dots ,$$

kde C je ľubovoľná konštanta. Partikulárnym riešením daným počiatočnou podmienkou $a(0) = a_0$ je postupnosť $a_0, g(0), g(1), g(2), \dots$.

Ak $a(0) = C$, dostávame postupne $a(1) = a(0)+g(0) = C+g(0)$, $a(2) = a(1)+g(1) = C+g(0)+g(1)$ atď. Matematickou indukciou dostaneme všeobecné riešenie:

$$a(k) = C + g(0) + g(1) + \cdots + g(k-1), \quad k = 0, 1, 2 \ldots .$$

Pre každé $C \in \mathbb{R}$ je to riešenie. Konštanta C závisí od počiatočnej podmienky. Pre riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $a(0) = a_0$ je $C = a_0$, teda

$$a(k) = a_0 + g(0) + g(1) + \cdots + g(k-1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Problémom tu je, že zápis riešenia v tomto tvare sa nepovažuje za dostatočný. Chceli by sme sčítať $g(0) + g(1) + \cdots + g(k-1)$, teda "zbaviť sa tých troch bodiek" (hovorí sa tomu aj "nájsť riešenie v uzavretom tvare"). Ak napríklad $g(n) = n$, máme $g(0) + g(1) + g(2) + \cdots + g(k-1) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{1}{2}k(k-1)$. Tu sme si poradili, lebo išlo o súčet za sebou idúcich členov aritmetickej postupnosti. Ak je však postupnosť $g(n)$ komplikovanejšia, môže sa nám stať, že sa nebudeme vedieť "zbaviť troch bodiek".[7]

Podobné problémy vznikajú aj pre $r \neq 1$. (stále predpokladáme aj to, že $r \neq 0$). V afinnom prípade sme vedeli nájsť riešenie dokonca niekoľkými postupmi. Teraz však tie postupy nezaberajú,[8] jedine (tretí) postup založený na dôsledku 5.3 vnáša trochu jasna do problému — všeobecné riešenie homogénneho vzťahu vieme nájsť, zostáva problém, ako uhádnuť jedno riešenie nehomogénneho vzťahu.

Všeobecné riešenie príslušného homogénneho vzťahu $a(n+1) = r \cdot a(n)$ je

$$a_{\text{hom}}(k) = Cr^k\ , \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{5.11}$$

Jedno riešenie $a^*(k)$ nehomogénneho vzťahu (5.10) sa hľadá v triede postupností, o ktorej si myslíme, že by sa v nej mala nájsť postupnosť, ktorá je riešením. Problém však je, že niet všeobecného pravidla, ako si vytipovať takúto "podozrivú" triedu postupností. Treba uplatniť intuíciu a fantáziu. V praxi to vyzerá tak, že $a^*(k)$ hľadáme v istom tvare (obyčajne v tvare, ktorý sa "podobá" na $g(n)$ alebo je o málo komplikovanejší), teda ako postupnosť, v zápise ktorej vystupuje neurčitý (čiže zatiaľ neurčený) koeficient (nejde teda o jednu postupnosť, ale o triedu postupností). Dosadením do nehomogénneho rekurentného vzťahu (5.10) zistíme, či sa dá neurčitý koeficient zvoliť tak, aby sme dostali riešenie. V prípade, že má pravá strana, t.j. postupnosť $g(n)$ špeciálny tvar, je známe, v akom tvare sa určite dá nájsť jedno riešenie nehomogénneho vzťahu. Rozoberieme prípady, keď funkcia g je exponenciálna alebo polynomická. Ak je g exponenciálna, záleží ešte na tom, či je jej základom číslo r alebo (nenulové) číslo $s \neq r$. Pri polynomickej pravej strane je dôležité, či $r = 1$ alebo $r \neq 1$. Budeme preto skúmať štyri prípady.

Exponenciálna pravá strana.

[7] Viacej sa o tomto probléme dozviete v kapitole ....

[8] Analógia k prvému z tých postupov vedie k problému s "tromi bodkami" (skúsite si to?).

Ani analógia k druhému postupu nepomôže. Ak totiž chceme prejsť od vzťahu $a(n+1) = ra(n) + g(n)$ ku vzťahu $a(n+1) + h(n+1) = r\,(a(n) + h(n))$ (aby sme mohli urobiť substitúciu $a(k) + h(k) = A(k)$), zistíme, že neznáma postupnosť $h(n)$ má spĺňať rekurentný vzťah $h(n+1) = rh(n) - g(n)$, čo je vzťah presne tej istej obťažnosti ako bol pôvodný vzťah. (Jeden prechádza na druhý substitúciou $a(k) = -h(k)$.)

Pokus o štvrtý postup, v afinnom prípade založený na substitúcii, ku ktorej nás inšpiroval iteračný diagram, zlyháva na tom, že $r \cdot a(n) + g(n)$ nie je vo všeobecnosti tvaru $f(a(n))$.

Samozrejme, v niektorých špeciálnych prípadoch má šancu na úspech pokus o piaty postup – uhádnuť riešenie. Ale to sa podarí naozaj len výnimočne.

$\boxed{a(n+1) = r \cdot a(n) + b \cdot s^n, \quad s \neq r}$. (Predpokladáme $s \neq 0$, lebo inak by išlo o triviálny prípad a navyše, nulová postupnosť sa nepovažuje za exponenciálnu.) Skúsme hľadať jedno riešenie vzťahu (5.10) v tvare $a^*(k) = c_1 \cdot s^k$, teda v tvare rovnakom ako $g(n)$, ibaže s neurčitým koeficientom c_1. Dosadením do (5.10) zistíme, či existuje také c_1, že $c_1 \cdot s^k$ je riešenie. Dostaneme

$$c_1 s^{n+1} = r \cdot c_1 s^n + b s^n \ .$$

Odtiaľ po predelení s^n vyjde $c_1 s = r c_1 + b$, z čoho $c_1 = \frac{b}{s-r}$. Teda tipovali sme správne, riešenie uvedeného tvaru existuje.

Nepovažujeme za najrozumnejšie snažiť sa zapamätať si akési vzorce, ako treba v tomto a ďalších prípadoch voliť príslušné neurčité koeficienty.[9] Namiesto toho si budeme pamätať len metódu: v každom konkrétnom príklade dosadením zistíme, či riešenie vo vytipovanom tvare naozaj existuje a ako v takom prípade zvoliť neurčité koeficienty.

$\boxed{a(n+1) = r \cdot a(n) + b \cdot r^n}$. Prvé, čo nás napadne, je skúsiť to, čo sa osvedčilo v predchádzajúcom prípade. Ak však tentoraz dosadíme $a^*(k) = c_1 r^k$, dostaneme $c_1 r^{n+1} = r \cdot c_1 r^n + b \cdot r^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Teda ak $b = 0$, je $c_1 r^k$ riešením pri akejkoľvek voľbe c_1 a ak $b \neq 0$, pri žiadnej voľbe c_1. Nás samozrejme prípad $b = 0$ nezaujíma (nešlo by o exponenciálnu pravú stranu, bola by to dokonca homogénna rovnica), teda tip $a^*(k) = c_1 r^k$ bol jednoznačne chybný, riešenie v takom tvare neexistuje. To sa dalo čakať, veď ak by existovalo jedno riešenie nášho vzťahu v tvare $c_1 r^k$, tak by všeobecné riešenie nášho vzťahu bolo v tvare (pozri(5.11))

$$a(k) = a_{\text{hom}}(k) + a^*(k) = Cr^k + c_1 r^k = (C + c_1) r^k = D r^k \ , \quad k = 0, 1, \ldots \ ,$$

čiže v rovnakom tvare ako všeobecné riešenie homogénneho vzťahu (ak c_1 je reálna konštanta a C prebieha všetky reálne čísla, tak $D = C + c_1$ prebieha všetky reálne čísla). To je však nezmysel, nehomogénny vzťah (s nenulovou pravou starnou) a k nemu prislúchajúci homogénny vzťah predsa nemôžu mať rovnaké riešenia (vysvetlite!). Máme dôležité ponaučenie:

Ak hľadáme všeobecné riešenie nehomogénneho vzťahu v tvare

$$a(k) = a_{\text{hom}}(k) + a^*(k),$$

tak členy vystupujúce v $a^*(k)$ musia byť iného tvaru ako členy v $a_{\text{hom}}(k)$.

Čo teraz? Všimnime si, že v dvoch členoch v našom nehomogénnom vzťahu vystupuje r, preto nás napadne urobiť substitúciu $a(k) = r \cdot B(k)$. Po dosadení do nehomogénneho vzťahu a po úprave dostaneme $B(n+1) = r \cdot B(n) + b \cdot r^{n-1}$. Mocnina r klesla o jednotku! Urobíme ďalšiu substitúciu $B(k) = r \cdot C(k)$ atď, celkove n krát takto budeme znižovať mocninu r. Alebo, čo je šikovnejšie, urobíme to naraz, jedinou substitúciou $a(k) = r^k \cdot A(k)$ do pôvodného nehomogéneho vzťahu. Po dosadení a po úprave dostaneme afinný vzťah

$$A(n+1) = A(n) + \frac{b}{r}$$

so všeobecným riešením $A(k) = c + k \cdot \frac{b}{r}$, takže

$$a(k) = cr^k + \frac{b}{r} \cdot kr^k.$$

[9] Výnimku sme urobili v predchádzajúcej časti, kde sme v najjednoduchšom prípade $g(n) = b$ taký vzorec odvodili, pozri vetu 5.6.

Našli sme takto priamo všeobecné riešenie rekurentného vzťahu $a(n+1) = r \cdot a(n) + b \cdot r^n$. Vidieť z neho, že jedno riešenie nehomogénneho vzťahu, ktoré sme vyššie neúspešne hľadali v tvare $a^*(k) = c_1 \cdot r^k$ sme mohli hľadať v tvare

$$a^*(k) = c_1 \cdot kr^k$$

(dokonca vidíme, že $c_1 = \frac{b}{r}$). Máme ďalšie dôležité ponaučenie:

> Ak jedno riešenie $a^*(k)$ nehomogénneho vzťahu neexistuje v "prirodzenom" tvare ("podobnom" pravej strane $g(n)$, ibaže s neurčitými koeficientami), možno skúsiť k-násobok tohto "prirodzeného" tvaru.

Vyvstáva otázka, prečo sme v danom prípade vôbec hľadali jedno riešenie v nejakom špeciálnom tvare, keď pomocou uvedenej substitúcie vieme v tomto konkrétnom prípade nájsť vcelku bez problémov priamo všeobecné riešenie nášho rekurentného vzťahu. Odpoveď je : Preto, lebo možnosť uvedenej substitúcie bola iba šťastná náhoda spôsobená veľmi špeciálnym tvarom rekurentného vzťahu, zatiaľ čo hľadanie jedného riešenia v akomsi špeciálnom tvare je *všeobecná metóda*. Pre nás sú teda dôležité najmä dve získané ponaučenia.

To, čo je hodné zapamätania v prípade exponenciálnej pravej strany, zhrnieme vo vete:

Veta 5.9. (Lineárne rekurentné vzťahy 1. rádu s konštantnými koeficientami s exponenciálnou pravou stranou.) *Uvažujme lineárny rekurentný vzťah 1. rádu s konštantnými koeficientami tvaru*

$$a(n+1) = r \cdot a(n) + b \cdot s^n, \quad n = 0, 1, \dots\ , \quad r \neq 0\ .$$

Potom podľa dôsledku (5.3) je $a(k) = a_{\text{hom}}(k) + a^*(k)$, kde

$$a_{\text{hom}}(k) = cr^k$$

(v prípade $r = 1$ vychádza $a_{\text{hom}}(k) = c$) a jedno riešenie $a^*(k)$ nehomogénneho vzťahu možno hľadať nasledovne:

(1) Ak $s \neq r$, tak existuje riešenie nehomogénneho vzťahu v tvare

$$a^*(k) = c_1 \cdot s^k\ .$$

(2) Ak $s = r$, tak existuje riešenie nehomogénneho vzťahu v tvare

$$a^*(k) = c_1 \cdot kr^k\ .$$

Príklad 5.10.

Príklad 5.11.

Polynomiálna pravá strana.

$\boxed{a(n+1) = r \cdot a(n) + b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \cdots + b_s n^s\ , r \neq 1,\ b_s \neq 0}$. Teda $g(n)$ je polynóm stupňa s (lebo $b_s \neq 0$). Pre riešenie homogénneho vzťahu platí (5.11), teda

$$a_{\text{hom}}(k) = Cr^k\ .$$

V akom tvare hľadať jedno riešenie $a^*(k)$ nehomogéneho vzťahu? "Prirodzeným" tvarom je tvar "podobný" $g(n)$, ibaže s neurčitými koeficientami:

$$a^*(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \cdots + c_s k^s \ .$$

Sú to všetko členy iného tvaru ako je člen v $a_{\text{hom}}(k)$ (porovnaj s naším prvým ponaučením vyššie). Dúfame preto, že riešenie nehomogénneho vzťahu v takomto tvare naozaj existuje. Dosadením sa dá ukázať, že je to naozaj tak. Nebudeme to však v tejto všeobecnosti robiť. V konkrétnych príkladoch neskôr uvidíte, ako to funguje.

$\boxed{a(n+1) = a(n) + b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \cdots + b_s n^s \ , \ b_s \neq 0}$. Teda $g(n)$ je polynóm stupňa s (lebo $b_s \neq 0$) a koeficient $r = 1$. Pre riešenie homogénneho vzťahu $a(n+1) - a(n) = 0$ tentoraz platí

$$a_{\text{hom}}(k) = C$$

kde C je ľubovoľná reálna konštanta. Potrebujeme ešte nájsť jedno riešenie $a^*(k)$ nehomogéneho vzťahu. "Prirodzeným" tvarom je tvar "podobný" $g(n)$, ibaže s neurčitými koeficientami:

$$a^*(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \cdots + c_s k^s \ .$$

Lenže člen c_0 je toho istého tvaru ako člen C v $a_{\text{hom}}(k)$, teda $C + c_0$ sa sčíta na ľubovoľnú konštantu D. Budeme dôverovať ponaučeniam, ku ktorým sme dospeli vyššie a namiesto toho, aby sme overovali, či predsa len neexistuje riešenie $a^*(k)$ v uvedenom tvare, prejdeme k jeho k-násobku:

$$a^*(k) = c_0 k + c_1 k^2 + c_2 n k^3 + \cdots + c_s k^{s+1} \ .$$

To už sú všetko členy iného tvaru ako je člen v $a_{\text{hom}}(k)$ a dúfame, že riešenie nehomogénneho vzťahu v takomto tvare naozaj existuje. Dosadením sa dá ukázať, že je to naozaj tak.

Poznamenajme ešte, že niekedy sa kvôli kráse indexy píšu takto:

$$a^*(k) = c_1 k + c_2 k^2 + c_3 n k^3 + \cdots + c_{s+1} k^{s+1} \ .$$

To, čo je hodné zapamätania v prípade polynomiálnej pravej strany, zhrnieme vo vete:

Veta 5.12. (Lineárne rekurentné vzťahy 1. rádu s konštantnými koeficientami s polynomiálnou pravou stranou.) *Uvažujme lineárny rekurentný vzťah 1. rádu s konštantnými koeficientami tvaru*

$$a(n+1) = r \cdot a(n) + b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \cdots + b_s n^s, \quad n = 0, 1, \dots \ , \quad b_s \neq 0, \quad r \neq 0 \ .$$

Potom podľa dôsledku (5.3) je $a(k) = a_{\text{hom}}(k) + a^*(k)$, kde:

(1) Ak $r \neq 1$, tak všeobecné riešenie homogénneho vzťahu je

$$a_{\text{hom}}(k) = c r^k$$

a existuje jedno riešenie $a^*(k)$ nehomogénneho vzťahu v tvare:

$$a^*(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \cdots + c_s k^s \ .$$

(2) Ak $r = 1$, tak všeobecné riešenie homogénneho vzťahu je

$$a_{\mathrm{hom}}(k) = c$$

a existuje jedno riešenie $a^*(k)$ nehomogénneho vzťahu v tvare:

$$a^*(k) = c_0 k + c_1 k^2 + c_2 k^2 + \cdots + c_s k^{s+1} \ .$$

Príklad 5.13.

Príklad 5.14.

Použitie princípu superpozície.

Ak $g(n)$ nie je ani exponenciála ani polynóm, treba uplatniť intuíciu a fantáziu. Už sme hovorili, že $a^*(k)$ hľadáme obyčajne v tvare, ktorý sa "podobá" na $g(n)$[10] alebo je o málo komplikovanejší. Je jeden všeobecný postup, ktorý možno použiť, ak je pravá strana $g(n)$ v tvare súčtu niekoľkých postupností (alebo ju tak napíšeme). Je to *princíp superpozície*, s ktorým sme sa stretli vo vete 5.5. Jedno riešenie vzťahu s pravou stranou $g_1(n) + g_2(n)$ hľadáme ako súčet jedného riešenia vzťahu s pravou stranou $g_1(n)$ a jedného riešenia vzťahu s pravou stranou $g_2(n)$. Samozrejme, analogicky postupujeme, ak je pravá strana $g(n)$ súčtom viacerých ako dvoch postupností.

Príklad 5.15.

5.4 *Lineárne rekurentné vzťahy 2. rádu s konštantnými koeficientami

Aj v prípade lineárnych rekurentných vzťahov vyšších rádov postupujeme podľa dôsledku 5.3. V tejto časti sa naučíme riešiť (niektoré) lineárne rekurentné vzťahy 2. rádu s konštantnými koeficientami. Homogénny vzťah vieme vyriešiť vždy (problematiky sme sa už dotkli v kapitole 4.4). Problémy sú s hľadaním jedného riešenia nehomogénneho vzťahu.

Homogénny vzťah.

Chceme riešiť vzťah

$$a(n+2) + b_1 \cdot a(n+1) + b_2 \cdot a(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_2 \neq 0 \ . \tag{5.12}$$

(Predpoklad $b_2 \neq 0$ je tu preto, aby naozaj išlo o vzťah 2. rádu.) Všimnime si, že geometrické postupnosti $(\lambda^n)_{n=0}^{\infty}$ majú istú podobnosť s takými vzťahmi ako (5.12). Naozaj, pre akékoľvek $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\lambda^{n+2} = c\lambda \cdot \lambda^{n+1} + (1-c)\lambda^2 \cdot \lambda^n \ .$$

Teda postupnosť $a(k) = \lambda^k$ je riešením vzťahu

$$a(n+2) + \underbrace{(-c\lambda)}_{b_1} \cdot a(n+1) + \underbrace{(-(1-c)\lambda^2)}_{b_2} \cdot a(n) = 0,$$

[10] Ak je $g(n) = 3n + 2^n$, asi nebudeme skúšať $a(k) = c \sin n$.

čiže vzťahu takého tvaru ako (5.12). Začíname tušiť, že kľúčom k nájdeniu všeobecného riešenia (5.12) bude nájdenie tých geometrických postupností λ^k, ktoré sú riešeniami (5.12).

Hľadáme teda čísla λ s vlastnosťou

$$\lambda^{n+2} + b_1 \cdot \lambda^{n+1} + b_2 \cdot \lambda^n = 0 \ .$$

Jedným riešením tejto rovnice je $\lambda = 0$ (čo znamená, že postupnosť $0, 0, 0, \ldots$ je riešení m vzťahu (5.12)). Nenulové riešenia sa získajú z rovnice, ktorú dostaneme po vydelení λ^n:

$$\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \ . \tag{5.13}$$

Je to tzv. *charakteristická rovnica* vzťahu (5.12) (namiesto 'charakteristická rovnica' budeme niekedy používať skratku CHR). Je to kvadratická rovnica, takže má dva korene λ_1, λ_2. Ide o dva rôzne reálne korene, jeden dvojnásobný reálny koreň ($\lambda_1 = \lambda_2$) alebo dva komplexne združené korene. Rozoberieme jednotlivé prípady.

Prípad, keď charakteristická rovnica má dva rôzne reálne korene.

Z toho, ako sme dospeli ku charakteristickej rovnici, dostaneme, že geometrické postupnosti (reálnych čísel) $(\lambda_1^k)_{k=0}^{\infty}$ a $(\lambda_2^k)_{k=0}^{\infty}$ sú riešenia vzťahu (5.12). Podľa vety 5.1 sú riešeniami aj všetky postupnosti

$$a(k) = C_1 \cdot \lambda_1^k + C_2 \cdot \lambda_2^k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5.14}$$

(pre každú voľbu $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).[11] Otázkou zostáva, či (5.14) zahŕňa už všetky riešenia vzťahu (5.12), t.j., či je to všeobecné riešenie vzťahu (5.12). Ukážeme, že to v našom prípade dvoch reálnych rôznych koreňov charakteristickej rovnice naozaj tak je. Majme ľubovoľné počiatočné podmienky $a(0) = a_0$, $a(1) = a_1$. Chceme dokázať, že existujú také $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, že

$$\begin{aligned} a_0 &= C_1\lambda_1^0 + C_2\lambda_2^0 \\ a_1 &= C_1\lambda_1^1 + C_2\lambda_2^1 \ . \end{aligned}$$

Po úprave[12]

$$\begin{aligned} a_0 &= C_1 \quad + C_2 \\ a_1 &= C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 \ . \end{aligned}$$

Teraz jednoducho stačí túto sústavu vyriešiť, aby sme videli, že naozaj má riešenie. Po krátkom výpočte vyjde $C_1 = \frac{a_1 - a_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $C_2 = \frac{a_0\lambda_1 - a_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ (urobte!).

Získané poznatky zhrnieme do vety:

Veta 5.16. (Prípad dvoch rôznych reálnych koreňov CHR.) *Uvažujme homogénny lineárny rekurentný vzťah 2. rádu s konštantnými koeficientami*

$$a(n+2) + b_1 \cdot a(n+1) + b_2 \cdot a(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_2 \neq 0 \ . \tag{5.15}$$

a jeho charakteristickú rovnicu

$$\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \ . \tag{CHR}$$

[11] Pretože aj geometrická postupnosť $0, 0, 0, \ldots$ je riešením vzťahu (5.12), vlastne sme mohli písať $a_k = C_1 \cdot \lambda_1^k + C_2 \cdot \lambda_2^k + C_3 \cdot 0$, čo ale nemá zmysel, lebo po úprave dostaneme opäť (5.14). Dá sa to povedaťaj inak: riešenie $0, 0, 0, \ldots$ vzťahu (5.12) nemusíme pripájať, lebo je už zahrnuté v (5.14) (voľte $C_1 = C_2 = 0$).

[12] Využívame, že $\lambda_i \neq 0$, takže nie je problém s výpočtom $\lambda_i^0 = 1$.

Predpokladajme, že (CHR) má dva rôzne reálne korene $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Potom všeobecné riešenie vzťahu (5.15) je

$$a(k) = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

kde C_1, C_2 sú ľubovoľné reálne konštanty závisiace od počiatočných podmienok.

Príklad 5.17.

Prípad, keď charakteristická rovnica má dvojnásobný reálny koreň.

Ak charakteristická rovnica má korene $\lambda_1 = \lambda_2$, tak

$$a(k) = C_1 \cdot \lambda_1^k + C_2 \cdot \lambda_2^k = (C_1 + C_2)\lambda_1^k = C\lambda_1^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

je riešením vzťahu (5.12) pre každú konštantu C (súčtom dvoch ľubovoľných konštánt C_1, C_2 je ľubovoľná konštanta C). Nemôže to však byť všeobecné riešenie. Nie je totiž pravdou, že pre ľubovoľné počiatočné podmienky $a(0) = a_0$, $a(1) = a_1$ sa nájde také C, že postupnosť $a(k) = C\lambda_1^k$ spĺňa tieto podmienky. Naozaj,

$$\begin{aligned} k = 0 \dots \quad & a_0 = C \\ k = 1 \dots \quad & a_1 = C\lambda \end{aligned}$$

nemá riešenie, ak $a_1 \neq a_0\lambda$. Napr. pre $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ neexistuje také C. To ukazuje, že medzi riešeniami vzťahu (5.12) sú naozaj aj postupnosti, ktoré nie sú tvaru $a(k) = C\lambda_1^k$.

Ak λ_{12} je dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice (5.13), tak

$$\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = (\lambda - \lambda_{12})^2 .$$

Odtiaľ po porovnaní koeficientov dostaneme $b_1 = -2\lambda_{12}$ a $b_2 = \lambda_{12}^2$. To znamená, že rekurentný vzťah (5.12) má v tomto prípade tvar

$$a(n+2) - 2\lambda_{12}a(n+1) + \lambda_{12}^2 a(n) = 0 . \tag{5.16}$$

Tento vzťah sa značne zjednoduší substitúciou

$$a(n) = \lambda_{12}^n \cdot A(n) .$$

Po dosadení dostaneme

$$\lambda_{12}^{n+2}A(n+2) - 2\lambda_{12}\lambda_{12}^{n+1}A(n+1) + \lambda_{12}^2\lambda_{12}^n A(n) = 0 .$$

Pretože predpokladáme $b_2 \neq 0$, charakteristická rovnica (5.13) nemôže mať nulu ako svoj koreň. Teda $\lambda_{12} \neq 0$. Môžeme preto získaný vzťah vydeliť (nenulovým) číslom λ_{12}^n. Dostaneme

$$A(n+2) - 2A(n+1) + A(n) = 0 . \tag{5.17}$$

Je to lineárny rekurentný vzťah druhého rádu s konštantnými koeficientami, ktorý bude ľahšie riešiť ako vzťah (5.16). Dve riešenia vieme uhádnuť: $A(k) = 1$ a $A(k) = k$ (overte, že sú to naozaj riešenia). Podľa vety 5.1 je riešením aj každá ich lineárna kombinácia. Tvrdíme, že

$$A(k) = C_1 + C_2k$$

je všeobecným riešením (5.17). Naozaj, pre každé počiatočné podmienky $A(0) = A_0$, $A(1) = A_1$ existujú také C_1, C_2, že

$$\begin{aligned} k = 0 \ldots \quad & A_0 = C_1 \\ k = 1 \ldots \quad & A_1 = C_1 + C_2 \end{aligned}$$

(to je zrejmé, stačí sústavu rovníc vyriešiť). To však znamená, že

$$a(k) = \lambda_{12}^k \cdot (C_1 + C_2 k) = C_1 \cdot \lambda_{12}^k + C_2 \cdot k\lambda_{12}^k$$

je všeobecným riešením vzťahu (5.16). Dospeli sme k tomu, že ak charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň λ, tak nielen postupnosť λ^k ale aj postupnosť $k\lambda^k$ je riešenie a všeobecné riešenie má tvar ich lineárnej kombinácie.

Získané poznatky zhrnieme do vety:

Veta 5.18. (Prípad dvojnásobného koreňa CHR.) *Uvažujme homogénny lineárny rekurentný vzťah 2. rádu s konštantnými koeficientami*

$$a(n+2) + b_1 \cdot a(n+1) + b_2 \cdot a(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_2 \neq 0 \ . \tag{5.18}$$

a jeho charakteristickú rovnicu

$$\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \ . \tag{CHR}$$

Predpokladajme, že (CHR) má dvojnásobný koreň λ. Potom všeobecné riešenie vzťahu (5.18) je

$$a(k) = C_1\lambda^k + C_2 k\lambda^k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

kde C_1, C_2 sú ľubovoľné reálne konštanty závisiace od počiatočných podmienok.

Príklad 5.19.

Prípad, keď charakteristická rovnica má dva komplexne združené korene.

Predpokladáme, že $\lambda_{1,2} = a \pm bi$. Úplne rovnakým matematickým postupom ako pri dvoch rôznych reálnych koreňoch dostaneme, že riešeniami sú všetky postupnosti

$$a(k) = C_1 \cdot \lambda_1^k + C_2 \cdot \lambda_2^k, \quad k = 0, 1, \ldots \ . \tag{5.19}$$

Konštanty C_1, C_2 sa dajú jednoznačne určiť z počiatočných podmienok. Pretože však čísla λ_1, λ_2 sú komplexné, tak aj v našom 'reálnom' prípade, kedy b_1, b_2 sú reálne a aj počiatočné podmienky sú reálne, vychádzajú vo všeobecnosti C_1, C_2 komplexné.

Často je výhodné prejsť ku goniometrickému tvaru:

$$\lambda_{1,2} = a \pm bi = r \cdot (\cos\varphi \pm i \sin\varphi) \ .$$

Podľa Moivreovej vety je potom

$$\lambda_{1,2}^k = r^k \cdot (\cos k\varphi \pm i \sin k\varphi) \ .$$

Potom

$$a(k) = C_1 \cdot \lambda_1^k + C_2 \cdot \lambda_2^k = \ldots = r^k (C_3 \cos k\varphi + C_4 \sin k\varphi)$$

Získané poznatky zhrnieme do vety:

Veta 5.20. (Prípad komplexne združených koreňov CHR.) *Uvažujme homogénny lineárny rekurentný vzťah 2. rádu s konštantnými koeficientami*

$$a(n+2) + b_1 \cdot a(n+1) + b_2 \cdot a(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_2 \neq 0 \ . \tag{5.20}$$

a jeho charakteristickú rovnicu

$$\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \ . \tag{CHR}$$

Predpokladajme, že (CHR) má komplexne združené korene $\lambda_{1,2} = a \pm bi$. Potom všeobecné riešenie vzťahu (5.20) je

$$a(k) = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

kde C_1, C_2 sú onštanty (vo všeobecnosti komplexné) závisiace od počiatočných podmienok. Po prepise do goniometrického tvaru má všeobecné riešenie tvar

$$a(k) = r^k(C_3 \cos k\varphi + C_4 \sin k\varphi)$$

kde C_3, C_4 sú konštanty závisiace od počiatočných podmienok. (Ak sú b_1, b_2 reálne a aj počiatočné podmienky sú reálne (potom aj každé $a(k)$ je reálne), tak C_3, C_4 sú reálne).

Príklad 5.21.

Príklad 5.22.

Nehomogénny vzťah.

....

Príklad 5.23.

Príklad 5.24.

5.5 *Lineárne rekurentné vzťahy vyšších rádov s konštantnými koeficientami

5.6 *O ďalších rekurentných vzťahoch

5.7 *Cvičenia

Kapitola 6

Konečné sumy

6.1 Sumačný symbol a jeho vlastnosti

Z komutatívnosti a asociatívnosti sčítania vyplýva, že súčet ľubovoľných čísel $a_1, a_2, ..., a_n$ nezáleží ani od ich poradia ani od umiestnenia zátvoriek. Napríklad,

$$\begin{aligned}((a_1 + a_2) + a_3) + a_4 &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) = a_1 + ((a_2 + a_3) + a_4) \\ &= a_3 + (a_2 + (a_4 + a_1)) = \dots\end{aligned}$$

Súčet čísel $a_1, a_2, ..., a_n$ môžeme teda písať bez akýchkoľvek zátvoriek v tvare $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Kvôli skráteniu zápisu sa ujal symbol

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

(čítame "suma a_k, $k = 1$ až n"). Namiesto $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ sa píše aj $\sum_{k=1}^{n} a_k$. [1]

Všimnite si, že $\sum_{k=1}^{n} a_k$ je to isté ako $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sum_{j=1}^{n} a_j$ a pod., lebo každý z týchto symbolov oynačuje súčet $a_1 + a_2 + ... + a_n$. Túto skutočnosť bežne vyjadrujeme slovami, že na označení sumačného indexu nezáleží. Uvedieme niektoré ďalšie vlastnosti sumačného symbolu:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \\ \sum_{k=1}^{n} c a_k &= c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \\ \sum_{k=1}^{n} a &= n \cdot a\end{aligned}$$

[1] Analogicky pre súčin čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sa používa symbol $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$ resp $\prod_{k=1}^{n} a_k$.

Dôkazy týchto tvrdení sú jednoduché. Napríklad:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n) = \\ &= (a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\ .\end{aligned}$$

(Dokážte ďalšie dva vzťahy.)

6.2 O sčitovaní konečných súm. Konečné sumy vznikajúce z postupností

Sumy tvaru $\sum_{k=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$ nazývame konečnými, aby sme ich odlíšili od tzv. nekonečných súm alebo nekonečných radov $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, s ktorými sa stretnete pri štúdiu matematickej analýzy.

Samozrejme, aj súčet $a_1 + a_2 + a_3$, napr. $2 + \sqrt{3} + \pi$ je prirodzené nazvať konečnou sumou a naozaj sa tak často robí. Takýmito konečnými sumami sa však budeme zaoberať len výnimočne. V centre našej pozornosti budú konečné sumy $\sum_{k=1}^{n} a_n$, u ktorých je

(1) n síce konkrétne, ale "veľké" (napr. $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/2000$, alebo $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000^{1000}$, takže sčítať tieto čísla jedno za druhým by trvalo neúnosne dlho alebo by bolo celkom nezvládnuteľné) alebo je

(2) n ľubovoľné prirodzené číslo, bližšie neurčené (napr. $1/(1\cdot 2) + 1/(2\cdot 3) + \cdots + 1/(n\cdot(n+1))$).

V typickom prípade sa ku konečným sumám dostaneme nasledovne.

Predpokladajme, že je daná nejaká postupnosť reálnych čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$. Hodnota konečnej sumy $\sum_{k=1}^{n} a_k$ závisí od n. Teda konečná suma nie je nič iné ako člen novej postupnosti — naozaj, postupnosti čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ priraďujeme novú postupnosť, ktorej n-tým členom je číslo $\sum_{k=1}^{n} a_k$. [2]

Úlohou "sčítať" konečnú sumu $a_1 + a_2 + \ldots a_n$ rozumieme "zbaviť sa troch bodiek", t.j. nájsť tzv. uzavretú formulu pre danú sumu. Príkladom sčítania konečnej sumy je rovnosť

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\ .$$

Úloha sčítať nejakú konečnú sumu je vo všeobecnosti zložitá a je skôr výnimkou ako pravidlom, ak ju dokážeme sčítať.

Naučíme sa niekoľko postupov, ktoré pri takejto úlohe niekedy pomôžu.

[2] Hovoríme o reálnych číslach, ale rovnako možno uvažovať konečné sumy komplexných čísel a dokonca konečné sumy akýchkoľvek objektov, ktoré možno sčitovať a pre toto sčitovanie platí asociatívny a komutatívny zákon. Napr. možno uvažovať konečné sumy reálnych alebo komplexných funkcií.

6.3 Niekoľko trikov

Ukážeme niekoľko trikov, ktoré občas pomôžu pri sčitovaní súm.

Metóda "uhádnem a dokážem matematickou indukciou". Ide o prvý nápad, ktorý obvykle dostaneme, keď máme vypočítať konečnú sumu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ kde n je bližsie neurčené. Aj v prípade, že máme vypočítať napr. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1000}$, môže byť výhodné úlohu si zdanlivo skomplikovať a počítať $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Príklad 6.1. Máme vypočítať $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3.\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{999\cdot 1000}$. Uvažujme o všeobecnejšej sume

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} .$$

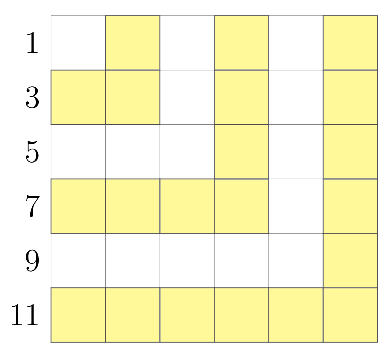
Potom

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ S_4 &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} . \end{aligned}$$

Trúfneme si vysloviť hypotézu, že $S_n = \frac{n-1}{n}$. Jej dôkaz matematickou indukciou (je nevyhnutnou súčasťou riešenia!) prenechávame čitateľovi. Po vykonaní dôkazu už môžeme dať odpoveď, že $S_{1000} = 999/1000$.[3]

Obrázkové sčitovanie. Niekedy (hoci veľmi zriedkavo) z vhodne nakresleného obrázka "vidieť ", čomu sa rovná daná konečná suma. Napríklad Obrázok 6.1 by mal čitateľa (či skôr pozerateľa) presvedčiť, že pre každé prirodzené číslo n je

$$1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2.$$



Obr. 6.1: $1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$

Vtipne sa síce hovorí, že daný obrázok s pripísaným výsledkom predstavujú "dôkaz bez slov" [4], treba však povedať, že obrázok samozrejme nie je dôkaz, a preto by bolo treba získaný vzťah dokázať matematickou indukciou (urobte). Všimnite si tiež, že sme mohli použiť aj nižšie uvedený tzv. Gaussov trik (spolu s dôkazom matematickou indukciou) alebo znalosť už dokázaného vzorca pre súčet za sebou idúcich členov aritmetickej postupnosti, pozri 3.1.

Gaussov trik (metóda "tam a nazad"). S Gaussovým trikom sme sa už stretli pri aritmetických postupnostiach — sčítať za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti (od

[3] Poznamenajme, že uvedenú úlohu možno tiež riešiť metódou teleskopického rozkladu, pozri podkapitolu 6.5.
[4] V katedrovej knižnici máme knihu Nelsen: Proofs without words, v ktorej nájdete množstvo takýchto príkladov.

r-tého po s-tý, $r < s$) možno tak, že túto sumu napíšeme dvakrát, raz ako $S = a_r + a_{r+1} + \dots + a_{s-1} + a_s$, raz ako $S = a_s + a_{s-1} + \dots + a_{r+1} + a_r$ a uvážime, že $a_r + a_s = a_{r+1} + a_{s-1} = \dots = a_s + a_r$. Potom $2 \cdot S = (s - r + 1) \cdot (a_r + a_s)$, odkiaľ vydelením 2 dostaneme S. Názov "Gaussov trik" sme zvolili preto, lebo sa traduje, že malý Gauss[5] v škole takto spočítal čísla od 1 do 100: [6]

$$\begin{aligned} S &= 1 \quad +2 \ + \ldots +100 \\ S &= 100+99+ \ldots +1 \ . \end{aligned}$$

Sčítaním čísel, ktoré sa nachádzajú pod sebou vyjde $2 \cdot S = 100 \cdot 101$, odkiaľ $S = 5050$.

Porovnanie dvoch rôznych vyjadrení tej istej sumy. V istom zmysle sem patrí aj Gaussov trik, ale tam sa dve vyjadrenia sumy líšili od seba len poradím sčítancov. V typickom prípade sa tie dve vyjadrenia líšia od seba podstatnejšie. Ukážeme to na jednoduchom príklade, v ktorom treba sčítať za sebou idúce členy geometrickej postupnosti.

Príklad 6.2. Sčítame $S_n = 1 + 3 + \ldots 3^n$. Všimnime si, že pre S_{n+1} máme dve rôzne vyjadrenia:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 3 + \ldots 3^n + 3^{n+1} = S_n + 3^{n+1} \\ S_{n+1} &= 1 + 3 + \ldots 3^n + 3^{n+1} = 1 + 3 \cdot S_n \ , \end{aligned}$$

odkiaľ

$$S_n + 3^{n+1} = 1 + 3 \cdot S_n \tag{6.1}$$

z čoho už vypočítame, že $S_n = (3^{n+1} - 1)/2$.

Účtovnícky trik. Účtovnícky trik spočíva v tom, že v konečnej obdĺžnikovej tabuľke s číslami sa súčet "stĺpcových" súčtov rovná súčtu "riadkových" súčtov (jedno i druhé sa rovná súčtu všetkých čísel v tabuľke).[7] Nejde tu v podstate o nič iné ako o špeciálny, ale dôležitý, prípad predchádzajúcej metódy

Príklad 6.3. Sčítame $S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + ... + na^n$, $a \neq 1$.

Všimnime si, že uvedenú sumu možno písať v tvare

$$\begin{aligned} S_n = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n &= a \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a} &&= \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} \\ + a^2 + a^3 + \ldots + a^n &= a^2 \cdot \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a} &&= \frac{a^{n+1} - a^2}{a - 1} \\ + a^3 + \ldots + a^n &= a^3 \cdot \frac{1 - a^{n-2}}{1 - a} &&= \frac{a^{n+1} - a^3}{a - 1} \\ &\ldots \\ a^n &= a^n \cdot \frac{1 - a}{1 - a} &&= \frac{a^{n+1} - a^n}{a - 1}, \end{aligned}$$

[5] významný nemecký matematik

[6] Učiteľ vraj chcel mať pokoj od žiakov, preto im dal takúto zĺhavú počtovú úlohu. Bol veľmi prekvapený, keď sa malý Gauss za chvíľu prihlásil so správnym výsledkom.

[7] Účtovníci , hlavne v predkalkulačkovej ére, sčitovali čísla v obdĺžnikovej tabuľke kvôli kontrole vždy dvoma spôsobmi. Najskôr vypočítali súčty v jednotlivých riadkoch a tieto súčty sčítali. Potom vypočítali súčty v jednotlivých stĺpcoch a tieto súčty znovu sčítali. Ak dostali ten istý výsledok ako prvým spôsobom, mali vysokú pravdepodobnosť, že neurobili chybu a výsledok je správny.

takže máme sčítať čísla v obĺžnikovej (trojuholníkovej) tabuľke. Suma S_n je zapísaná ako súčet stĺpcových súčtov. Nahradíme ju súčtom riadkových súčtov (v každom riadku máme za sebou idúce členy geometrickej postupnosti) $S_n^\star$. Dostávame

$$\begin{aligned} S_n = S_n^\star &= \frac{1}{a-1}\left[(a^{n+1}-a)+(a^{n+1}-a^2)+\cdots+(a^{n+1}-a^n)\right] \\ &= \frac{1}{a-1}\left[na^{n+1}-(a+a^2+\cdots+a^n)\right] \\ &= \frac{1}{a-1}\left[na^{n+1}-a\cdot\frac{a^n-1}{a-1}\right] = \frac{na^{n+1}}{a-1}-\frac{a(a^n-1)}{(a-1)^2}\ . \end{aligned}$$

Odčítanie vhodného násobku od sumy. Na sume z predchádzajúceho príkladu ukážeme ďalší trik, ktorý sa niekedy dá použiť — od sumy odčítame jej vhodný násobok. Môže sa stať, že sumu, ktorú tak dostaneme, budeme vedieť sčítať.

Príklad 6.4. Pre $a \neq 1$ sčítame sumu $S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + ... + na^n$ tak, že od nej odčítame $a \cdot S_n$. Dostaneme

$$\begin{aligned} S_n &= a + 2a^2 + 3a^3 + \quad \ldots + (n-1)a^{n-1} + \quad na^n \\ -a\cdot S_n &= \quad -a^2 \ -2a^3 - 3a^4 - \ldots \qquad -(n-1)a^n - na^{n+1} \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} S_n - aS_n &= (a+a^2+a^3+\cdots+a^n) - na^{n+1} \\ &= a\cdot\frac{a^n-1}{a-1} - na^{n+1}\ . \end{aligned}$$

Odtiaľ už máme rovnaký výsledok ako predchádzajúcou metódou:

$$S_n = \frac{1}{a-1}\left[na^{n+1} - a\cdot\frac{a^n-1}{a-1}\right]\ .$$

6.4 Súčty p-tych mocnín prvých n prirodzených čísel

Naučíme sa určovať sumy

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= 1+2+...+n \\ S_n^{(2)} &= 1^2+2^2+\cdots+n^2 \\ &\cdots \\ S_n^{(p)} &= 1^p+2^p+...+n^p \end{aligned}$$

Predovšetkým, už vieme, že $S_n^{(1)} = \frac{1}{2}n(n+1)$. Sumu $S_n^{(2)}$ určíme tak, že do identity

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$$

dosadíme za x postupne čísla $n, n-1, \ldots, 1$. Dostaneme

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= \qquad\qquad n^3+3n^2+3n+1 \\ n^3 &= (n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1 \\ (n-1)^3 &= (n-2)^3+3(n-2)^2+3(n-2)+1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots \\ 3^3 &= \qquad\qquad 2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1 \\ 2^3 &= \qquad\qquad 1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1 \end{aligned}$$

Po sčítaní týchto rovností dostaneme (všimnite si, že každý z členov $n^3, \dots, 3^3, 2^3$ sa nachádza vľavo aj vpravo, teda tieto členy sa vyrušia):

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\cdot(1^2+2^2+...+n^2) + 3\cdot(1+2+...+n) + n \ ,$$

čiže

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_n^{(2)} + 3S_n^{(1)} + n \ .$$

Po dosadení za $S_n^{(1)} = \frac{1}{2}n(n+1)$ dostaneme

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_n^{(2)} + \frac{3}{2}n(n+1) + n \ ,$$

odkiaľ

$$\begin{aligned}
3S_n^{(2)} =& (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) = (n+1)\left((n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n\right) \\
=& (n+1)\left(n^2+2n+1-1-\frac{3}{2}n\right) = (n+1)\left(n^2+\frac{1}{2}n\right) = (n+1)\cdot\frac{2n^2+n}{2} \\
=& \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) \ ,
\end{aligned}$$

a teda

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \ .$$

Sumu $S_n^{(3)}$ vypočítame podobne. Začneme s identitou

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

a využijeme už známe vzťahy pre $S_n^{(1)}$ a $S_n^{(2)}$. Vyjde

$$S_n^{(3)} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(urobte!). Ako kuriozitu si všimnite, že $S_n^{(3)} = (S_n^{(1)})^2$.

Analogicky sa postupuje pri hľadaní $S_n^{(p)}$ aj pre $p > 3$.

6.5 Teleskopické sumy

Nech $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť a nech $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Predpokladajme, že sme našli takú postupnosť $(b_k)_{k=1}^{\infty}$, že

$$a_k = b_{k+1} - b_k, \quad k = 1, 2, \dots \ .$$

Potom

$$\begin{aligned}
S_n =& a_1 + a_2 + ... + a_n \\
=& (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) + (b_{n+1} - b_n) \\
=& b_{n+1} - b_1 \ .
\end{aligned}$$

Všimnite si, že taká postupnosť $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ vždy existuje. Dokonca ich existuje nekonečne veľa, pričom rozdiel ktorýchkoľvek dvoch takých postupností je konštantná postupnosť. Naozaj, b_1 je nejaké, $b_2 = b_1 + a_1$, $b_3 = b_2 + a_2 = b_1 + (a_1 + a_2)$, $\dots$, $b_n = b_1 + (a_1 + a_2 + \dots a_{n-1})$, $\dots$. Problémom však v praxi môže byť, že žiadnu takú postupnosť nevieme udať v uzavretom tvare, t.j. pomocou predpisu, v ktorom by neboli neštastné "tri bodky". (Úloha vyjadriť b_n v takom tvare je ekvivalentná s úlohou sčítať sumu S_n.) V takom prípade opisovaný postup na sčítanie sumy S_n vedie "z dažďa pod odkvap". Opisovaná metóda má teda praktický význam len vtedy, keď vieme nájsť b_n nejako uhádnutím, bez sčitovania sumy S_n.

Uvedieme možné obmeny uvedeného postupu:

- nájdeme $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ tak, že $a_k = b_k - b_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Potom

$$\begin{aligned} S_n =& a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ =& (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_0 \end{aligned}$$

- nájdeme $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ tak, že $a_k = b_k - b_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Potom

$$\begin{aligned} S_n =& a_1 + a_2 + ... + a_n \\ =& (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} \end{aligned}$$

Príklad 6.5. Vypočítajme

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!\ .$$

Ide o sumu $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, kde $a_k = k.k!$. Hľadáme postupnosť $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ tak, aby $a_k = b_{k+1} - b_k$ pre každé $k = 1, 2, \dots$. Všimnime si, že

$$a_k = k \cdot k! = (k+1)! - k! = b_{k+1} - b_k, \quad \text{kde } b_k = k!, \quad k = 1, 2, \dots\ .$$

Potom

$$\begin{aligned} S_n =& 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! \\ =& (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + ... + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1\ . \end{aligned}$$

Myšlienka teleskopického rozkladu sa dá uplatniť aj tak, že sa v sume $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ nesnažíme vyjadriť a_k nutne v tvare rozdielu $b_{k+1} - b_k$, ale v tvare lineárnej kombinácie niekoľkých (nie nutne dvoch) čísel.[8] Postup ukážeme na príklade.

Príklad 6.6. Vypočítame $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2(k^2+3k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$. V sume $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ je a_k racionálna funkcia premennej k. V takých prípadoch je často užitočné rozložiť a_k na súčet zlomkov s jednoduchšími menovateľmi, tzv. *parciálnych zlomkov*. Hľadáme rozklad v tvare

$$\frac{2(k^2+3k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} + \frac{D}{k+3} \tag{6.2}$$

[8] Vo všeobecnosti možno povedať, že teleskopické sumy sú také sumy, ktorých členy a_n sú vyjadrené, alebo ich možno vyjadriť pomocou dvoch alebo viacerých (často susedných) členov nejakej postupnosti (b_n). Typickým príkladom je suma $\sum 1/n(n+1) = \sum (1/n - 1/(n+1))$. Vyjadrenie a_n pomocou členov postupnosti (b_n) sa nazýva *teleskopický rozklad.* Pri výpočte danej sumy sa niekedy (vlastne len vtedy nazveme sumu teleskopickou) ukáže tzv. teleskopická vlastnosť tejto sumy: po vykonaní teleskopického rozkladu členov sumy sa väčšina sčítancov navzájom zruší, čo umožní "zbaviť sa troch bodiek". Možno si to predstaviť tak, že skupiny sčítancov zodpovedajúce jednotlivým členom a_n " zasúvame" do seba a pritom väčšina týchto sčítancov "mizne" podobne, ako sa zsúvajú do seba a miznú jednotlivé diely niektorých ďalekohľadov. Anglicky "telescope" = ďalekohľad, teleskop, čokoľvek zasúvateľné do seba.

Hľadáme také konštanty alebo tzv. *neurčité koeficienty* A, B, C, D, aby táto rovnosť platila pre každé prirodzené k (pri takýchto úlohách nemáme vopred istotu, že také konštanty existujú). Najskôr odstránime zlomky. Dostaneme

$$2k^2 + 6k + 6 = A(k+1)(k+2)(k+3) + Bk(k+2)(k+3) + Ck(k+1)(k+3) + Dk(k+1)(k+2) \tag{6.3}$$

Na určenie štyroch koeficientov A, B, C, D potrebujeme štyri rovnice. Existuje niekoľko postupov ako zostaviť takéto rovnice.

1. *spôsob (roznásobenie a porovnanie koeficientov):* Roznásobíme pravú stranu predchádzajúcej rovnice, upravíme ju na tvar polynómu premennej k a porovnáme koeficienty pri jednotlivých mocninách premennej k na ľavej a na pravej stranej rovnice[9]. Keď to urobíme, dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} \text{koef. pri } k^3\text{: } \ldots \quad & 0 = A + B + C + D \\ \text{koef. pri } k^2\text{: } \ldots \quad & 2 = 6A + 5B + 4C + 3D \\ \text{koef. pri } k\text{ : } \ldots \quad & 6 = 11A + 6B + 3C + 2D \\ \text{koef. pri abs. člene: } \ldots \quad & 6 = 6A \end{aligned}$$

Vyriešením tejto sústavy dostaneme $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = -1$.

2. *spôsob (dosadenie vhodných hodnôt k):* Štyri rovnice pre určenie neurčitých koeficientov získame tak, že do (6.3) dosadíme štyri hodnoty k. Uprednostňujeme také hodnoty k, ktoré dajú čo najjednoduchšie rovnice. V našom prípade je najvýhodnejšie dosadzovať $k = 0, -1, -2, -3$. [10] Keď to urobíme, dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} \text{dos. } k = 0 : \ldots \quad & 6 = 6A \\ \text{dos. } k = -1 : \ldots \quad & 2 = -2B \\ \text{dos. } k = -2 : \ldots \quad & 2 = 2C \\ \text{dos. } k = -3 \ldots \quad & 6 = -6D \end{aligned}$$

Dostali sme jednoduchšiu sústavu ako v predchádzajúcom prípade. Opäť dostaneme $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = -1$.

3. *spôsob (kombinácia porovnávania koeficientov a dosadzovania):* Možno postupovať aj tak, že skombinujeme predchádzajúce dva spôsoby. V rovnici (6.3) porovnáme koeficienty pri k^3 a absolútne členy (čo je ľahko aj bez roznásobovania pravej strany). Ďalšie dve rovnice nezískame porovnaním koeficientov pri k^2 a pri k (čo by už bez roznásobovania pravej strany bolo náročnejšie), ale dosadením napr. $k = -1$ a $k = -2$. (Dosadenie $k = 0$ by dalo tú istú rovnicu ako porovnanie koeficientov pri absolútnych členoch.) Keď to urobíme, dostaneme:

$$\begin{aligned} \text{koef. pri } k^3\text{: } \ldots \quad & 0 = A + B + C + D \\ \text{koef. pri abs. člene: } \ldots \quad & 6 = 6A \\ \text{dos. } k = -1 : \ldots \quad & 2 = -2B \\ \text{dos. } k = -2 : \ldots \quad & 2 = 2C \end{aligned}$$

Odtiaľ znovu $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = -1$.

---

[9] Využívame tu poznatky z algebry. Ak sa dva polynómy premennej k s reálnymi koeficientami rovnajú pre viac hodnôt k ako je väčší zo stupňov oboch polynómov (tu sa rovnajú pre všetky prirodzené k) tak sa potom tieto polynómy rovnajú "fotograficky", t.j. majú rovnaké koeficienty pri jednotlivých mocninách k. Pre zaujímavosť poznamenajme, že v alebre sa skúmajú aj polynómy, ktorých koeficienty nie sú čísla, ale všeobecnejšie objekty — prvky tzv. poľa. Pre takéto polynómy uvedené tvrdenie vo všeobecnosti neplatí.

[10] Zdanlivo ide o nezmysel. Požadujeme, aby (6.3) platilo pre všetky prirodzené k, teraz však navrhujeme dosadzovať za k hodnoty, ktoré nie sú prirodzené čísla, teda hodnoty, v ktorých nám nezáleží na tom, či bude (6.3) platiť alebo nie. Navyše, vzťah (6.2), z ktorého sme vyšli pre tieto hodnoty k nie je ani definovaný. Korektnosť nášho postupu znovu vyplýva z algebraického poznatku, že ak sa dva polynómy premennej k s reálnymi koeficientami majú rovnať pre viac hodnôt k ako je väčší zo stupňov oboch polynómov (tu: polynómy v (6.3) sa majú rovnať pre každé prirodzené k), je to možné len tak, že sa budú rovnať "fotograficky", a teda sa budú rovnať vo všetkých reálnych k.

Každým z uvedených spôsobov teda dostávame (pozri (6.2)):[11]

$$a_k = \frac{2(k^2+3k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\ .$$

Pri výpočte požadovanej sumy $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ bude výhodný prehľadný zápis (sčítance s rovnakými menovateľmi píšeme pod seba):

$$\begin{array}{lllllllll}
a_1 = 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & & & & & \\
a_2 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & & & & \\
a_3 = & & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & & & \\
a_4 = & & & \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & +\frac{1}{6} & -\frac{1}{7} & & \\
a_5 = & & & & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & \\
\quad . & & & & & & & & \\
\quad . & & & & & & & & \\
\quad . & & & & & & & & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
a_{n-3} = \frac{1}{n-3} & -\frac{1}{n-2} & +\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} & & & \\
a_{n-2} = & \frac{1}{n-2} & -\frac{1}{n-1} & +\frac{1}{n} & -\frac{1}{n+1} & & \\
a_{n-1} = & & \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} & +\frac{1}{n+1} & -\frac{1}{n+2} & \\
a_n \ \ = & & & \frac{1}{n} & -\frac{1}{n+1} & +\frac{1}{n+2} & -\frac{1}{n+3}
\end{array}$$

Sčítaním konečne dostaneme výsledok:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\ .$$

Na záver poznamenajme, že príklad sa dal riešiť aj šikovnejšie, a to rozkladom

$$a_k = \frac{2(k^2+3k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k(k+1)} + \frac{B}{(k+1)(k+2)}\ .$$

(Dokončite !)

[11] Druhý resp. tretí spôsob je často rýchlejší, prvý je však spoľahlivejší v tom zmysle, že ak chybne odhadnete tvar rozkladu pre a_k, prvým spôsobom to odhalíte (získaná sústava rovníc nebude mať riešenie), druhým resp. tretím spôsobom to však pri neštastnom výbere dosadzovaných hodnôt k nemusíte odhaliť — získaná sústava rovníc môže mať riešenie, hoci požadovaný rozklad v skutočnosti neexistuje. Napríklad ak si nevšimneme, že $\frac{k^2+k}{k(k+1)} = 1$ a nemáme dosť poznatkov o rozkladaní racionálnych funkcií na súčet parciálnych zlomkov (budete sa to učiť v integrálnom počte), mohli by sme sa snažiť o rozklad

$$\frac{k^2+k}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}\ . \tag{6.4}$$

Roznásobenie a porovnanie koeficientov pri k^2 tu dá $1 = 0$, takže odhalíme, že taký rozklad neexistuje. Avšak roznásobenie a dosadenie napr. $k = 1$ a $k = 2$ dá sústavu $2 = 2A + B$ a $6 = 3A + 2B$ s riešením $A = -2$ a $B = 6$. Rozklad

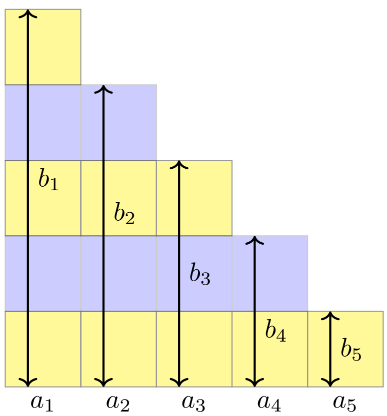
$$\frac{k^2+k}{k(k+1)} = \frac{-2}{k} + \frac{6}{k+1}\ . \tag{6.5}$$

je však nesprávny (neplatí napr. pre $k = 3$). Ak si to nevšimneme, úlohu vyriešime chybne. Ako teda postupovať? Ponúkame tri východiská: buď dôsledne používať len prvý z uvedených troch spôsobov, alebo naštudovať teóriu rozkladov na parciálne zlomky (potom budeme vedieť, že pokus o rozklad (6.5) je chybný, zlomok na ľavej strane (6.4) nemá v čitateli menší stupeň ako v menovateli, preto bolo treba najskôr vykonať čiastočné delenie, čo v našom prípade ukáže, že sa rovná 1, a teda netreba nič rozkladať), alebo vždy po nájdení rozkladu urobiť skúšku správnosti (v našom prípade jednoduché úpravy (6.5) ľahko ukážu, že (6.5) nemôže platiť pre všetky prirodzené k).

6.6 *Abelova transformácia

Tzv. Abelova transformácia[12]sa niekedy hodí na úpravu výrazov, ktoré majú tvar sumy $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Všimnime si, že ak označíme $A_k = a_1 + \dots a_k$, tak pre obsah útvaru na Obrázku 6.2 máme dve rôzne vyjadrenia (raz sčítame obsahy piatich “zvislých” obdĺžnikov, raz piatich “vodorovných”):



$$a_1(b_1 - b_2) = A_1(b_1 - b_2)$$

$$(a_1 + a_2)(b_2 - b_3) = A_2(b_2 - b_3)$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) = A_3(b_3 - b_4)$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_4 - b_5) = A_5(b_4 - b_5)$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)b_5 = A_5 b_5$$

Obr. 6.2: Špeciálny prípad Abelovej transformácie (5 sčítancov)

$$\sum_{k=1}^{5} a_k b_k = \sum_{k=1}^{4} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_5 b_5 \ .$$

Na obrázku bolo $a_i > 0$, $i = 1, \dots, 5$ a $b_1 > b_2 > \dots > b_5$. Tieto predpoklady sú nepodstatné, ako ukazuje nasledujúca veta (zároveň tvrdenie zovšeobecníme na ľubovoľný počet sčítancov).

Veta 6.7. (Abelova transformácia.) *Nech $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ sú ľubovoľné n-tice reálnych čísel. Označme $A_k = a_1 + \dots + a_k$, $B_k = b_1 + \dots + b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Potom platí*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + B_n a_n \end{aligned}$$

Dôkaz. Z dôvodov symetrie dokážeme len prvú rovnosť. Využijeme, že $a_1 = A_1$ a pre

[12]Niels Henrik Abel (1802–1829) bol významný nórsky matematik. Dokázal, že algebraické rovnice piateho stupňa sa vo všeobecnosti nedajú riešiť v radikáloch, teda pomocou ”vzorcov” tak ako sa to dá u rovníc nižšieho stupňa. Jeho meno nesie celý rad viet v algebre, teórii radov a v integrálnom počte. Žil vo veľkej biede. Zomrel neobyčajne mladý na zápal pľúc.

$i = 2, \ldots, n$ je $a_i = A_i - A_{i-1}$. Potom

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \\
&= A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + (A_3 - A_2) b_3 + \ldots \\
&\qquad\qquad \cdots + (A_{n-1} - A_{n-2}) b_{n-1} + (A_n - A_{n-1}) b_n \\
&= A_1 (b_1 - b_2) + A_2 (b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + A_n b_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \ .
\end{aligned}$$

□

Dôsledok 6.8. *Nech $a_1, \ldots, a_{n+p}$, $b_1, \ldots, b_{n+p}$ sú ľubovoľné $(n+p)$-tice reálnych čísel. Označme $A_k = a_1 + \cdots + a_k$, $B_k = b_1 + \cdots + b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n+p$. Potom platí*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k &= \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_n \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{k=n}^{n+p-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + B_{n+p} a_{n+p} - B_n a_n \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + B_{n+p} a_{n+p} - B_n a_{n+1}
\end{aligned}$$

Dôkaz. Stačí pomocou predchádzajúcej vety vyjadriť sumy $\sum_{k=1}^{n+p} a_k b_k$ a $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ a odčítať (dokončite !). □

Ukážeme použitie Abelovej transformácie na odhad sumy $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.

Príklad 6.9. Nech n-tica reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je taká, že $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$. Nech n-tica reálnych čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ je taká, že pre nejaké konštanty $c, d \in \mathbb{R}$ platí

$$c \leq \frac{b_1 + \cdots + b_k}{k} \leq d, \quad k = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Dokážte, že potom

$$c(a_1 + \cdots + a_n) \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq d(a_1 + \cdots + a_n) \ .$$

Tvrdenie dokážeme pomocou Abelovej transformácie. Popri označení $B_k = b_1 + \cdots + b_k$ ako vo vete, zavedieme ešte aritmetické priemery

$$B_k^* = \frac{B_k}{k} = \frac{b_1 + \cdots + b_k}{k} \ .$$

Potom podľa predpokladu je $c \leq B_k^* = \frac{B_k}{k} \leq d$. Podľa vety máme

$$\begin{aligned} a_1b_1 + \dots a_nb_n &= B_1(a_1-a_2) + B_2(a_2-a_3) + \cdots + B_{n-1}(a_{n-1}-a_n) + B_na_n \\ &= B_1^*(a_1-a_2) + 2B_2^*(a_2-a_3) + \cdots + (n-1)B_{n-1}^*(a_{n-1}-a_n) + nB_n^*a_n \\ &\leq d[(a_1-a_2) + 2(a_2-a_3) + \cdots + (n-1)(a_{n-1}-a_n) + na_n] \\ &= d(a_1 - a_2 + 2a_2 - 2a_3 + 3a_3 - \cdots - (n-1)a_n + na_n) \\ &= d(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \ . \end{aligned}$$

Odhad zdola sa dokáže úplne analogicky (urobte!).

****
doplnit dalsie metody na odhad sum $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ (o.i. Čebyševova nerovnosť)
****

6.7 *Harmonické súčty

Sčítajme prvých n členov postupnosti

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \ .$$

Dostaneme číslo

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \ ,$$

ktoré nazývame n-tým harmonickým súčtom. Postupnosť $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, lebo $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} > H_n$. Vypočítajme niekoľko jej členov:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \frac{3}{2} = 1,5, \quad H_3 = \frac{11}{6} = 1,83..., \quad H_4 = 2,08..., \quad H_5 = 2.28... \ .$$

Hodnoty H_n rastú pomaly. Napr. $H_{1000000} < 15$. Ak budeme trpezlivo počítať ďalej, dostaneme hodnoty H_n väčšie ako 100? Väčšie ako 10^{10}?

Nasledujúca veta ukazuje, že odpoveď je kladná.

Veta 6.10. *Postupnosť $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ harmonických súčtov je zhora neohraničená.*

Dôkaz. Všimnime si, že

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} && = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} && = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} &\geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} && = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

a všeobecne

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \frac{1}{2^{n-1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \ .$$

To sa dá využiť na odhad harmonických súčtov:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{H_2\geq 1/2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{H_4\geq 2/2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{H_8\geq 3/2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{H_{16}\geq 4/2}\ .$$

Všeobecne (dokážte matematickou indukciou):

$$H_{2^n} \geq \frac{n}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Pretože $\frac{n}{2} > K$ ak $n > 2K$, vidíme, že pre prirodzené n platí:

$$n > 2K \implies H_{2^n} \geq \frac{n}{2} > K\ .$$

To dokazuje, že $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ je zhora neohraničená. □

Príklad 6.11. (Úloha o červíkovi, diskrétna verzia, [1].) Na jednom konci gumeného lana je červík. Dĺžka lana je 1 km. Červík lezie po lane konštantnou rýchlosťou 1 cm/s. Vždy po uplynutí jednej sekundy lano v okamihu roztiahneme tak, že jeho dĺžka sa zväčší o jeden kilometer. Potom počkáme sekundu (červík zatiaľ lezie), zase roztiahneme lano, počkáme sekundu, zase roztiahneme lano atď. Odhadnite kedy dolezie červík na druhý koniec lana alebo zdôvodnite, prečo tam nikdy nedolezie. (Úloha je idealizovaná, matematická, neargumentujte tým, že sa lano roztrhne alebo červík umrie skôr ako stihne doliezť na jeho koniec.)

Riešenie. Intuícia nám hovorí, že červík na koniec lana nikdy nedolezie. Nie je to však pravda! Dolezie na koniec lana, hoci mu to bude trvať nesmierne dlho. Vtip je v tom, že:

1. *Počas rozťahovania lana sa nemení relatívna poloha* červíka na lane, t.j. nemení sa údaj, akú časť, koľko percent lana už má prelezených a koľko percent mu ešte ostáva preliezť– predlžuje sa totiž časť lana pred červíkom aj za červíkom (presne povedané, relatívna poloha červíka v nejakom okamihu je číslo, ktoré sa získa vydelením dĺžky lana za červíkom a celkovej dĺžky lana v danom okamihu).

2. *Keď červík lezie, zlepšuje si relatívnu polohu* na lane!

Z tejto kvalitatívnej úvahy ešte nevyplýva, že červík skutočne dolezie na koniec lana (možno si svoju relatívnu polohu vylepšuje tak, že sa bude blížiť napr. len k stredu lana, ale nikdy nedosiahne ani tento stred). Potrebný je výpočet.

Na začiatku má lano kilometer, teda 100 000 cm. V okamihu, keď červík začína liezť, má prejdenú nulovú časť lana, jeho relatívna poloha je vyjadrená číslom 0.

Na konci prvej sekundy, v okamihu keď sa ešte len zberáme roztiahnuť lano, má prelezený 1 cm, teda jednu stotisícinu kilometrového lana. Jeho relatívna poloha je vyjadrená číslom 1/100 000.

Na začiatku druhej sekundy, v okamihu keď sme už lano prvýkrát roztiahli (na celkovú dĺžku 2km), je relatívna poloha červíka stále vyjadrená číslom 1/100 000 (už sme povedali, že počas rozťahovania lana sa nemení relatívna poloha).

Počas druhej sekundy červík prelezie 1 cm, teda jednu dvestotisícinu dvojkilometrového lana. Na konci druhej sekundy má teda červík relatívnu polohu $1/100\,000 + 1/200\,000$ (z pôvodnej 1/100 000 si ju zväčšil o 1/200 000). Keď potom lano roztiahneme, relatívna poloha červíka sa nezmení.

Počas tretej sekundy červík prelezie 1 cm, teda jednu tristotisícinu trojkilometrového lana. Na konci tretej sekundy má teda červík relatívnu polohu $1/100\,000+1/200\,000+1/300\,000$. Rovnako je to na začiatku štvrtej sekundy, po roztiahnutí lana.

Pokračujúc takto ďalej, dostávame, že na konci n-tej sekundy (teda tesne predtým, ako ideme lano n-tý krát roztiahnuť) má červík relatívnu polohu

$$\frac{1}{100\,000}+\frac{1}{200\,000}+\frac{1}{300\,000}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 100\,000}=\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{100\,000}\cdot H_n\ .$$

Vezmime teraz *prvé* prirodzené číslo n_0, pre ktoré je $H_{n_0}\geq 100\,000$ (také n_0 existuje, lebo podľa Vety 6.10 je postupnosť harmonických súčtov zhora neohraničená). Potom

$$\frac{1}{100\,000}\cdot H_{n_0}\geq 1\ , \tag{6.6}$$

čo znamená, že počas n_0-tej sekundy lezenia červík doliezol na koniec lana.[13]

Nebudeme hľadať príslušné n_0. Všimnime si však, že ho vieme zhora odhadnúť. V dôkaze Vety 6.10 sme totiž ukázali, že pre každé n je $H_{2^n}\geq\frac{n}{2}$. Teda pre $n=200\,000$ bude

$$H_{2^{200\,000}}\geq\frac{200\,000}{2}=100\,000,\qquad \text{teda}\qquad \frac{1}{100\,000}\cdot H_{2^{200\,000}}\geq 1\ .$$

Vzhľadom na (6.6) to znamená, že $n_0\leq 2^{200\,000}$ sekúnd.[14]

Príklad 6.12. (Šikmá veža z tehál.) ...

Riešenie. ...

6.8 Cvičenia

1. Sčítajte konečné sumy:
   (a) $\sum_{i=1}^{10}(-1)^i$,
   (b) $\sum_{k=0}^{3}(k^2+1)$,
   (c) $\left(\sum_{k=0}^{3}k^2\right)+1$,
   (d) $\sum_{n=-2}^{5}1$.
2. Sčítajte konečné sumy:
   (a) $S_n=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$,
   (b) $S_n=1+7+19+37+\cdots+(3n^2-3n+1)$
3. Sčítajte sumu $S=1+2.2+3.2^2+\cdots+100.2^{99}$ dvomi spôsobmi:
   (a) účtovníckym trikom,
   (b) tak, že od S odčítate vhodný násobok S.

   Zovšeobecnite.
4. Sčítajte $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{3^n}$ dvomi spôsobmi:
   (a) účtovníckym trikom,
   (b) tak, že od S_n odčítate $\frac{1}{3}S_n$.

[13] Ak platí ostrá nerovnosť, červík stihol počas n_0-tej sekundy ešte prepadnúť cez koniec lana (lebo relatívna poloha 1 zodpovedá koncu lana. Ak platí rovnosť, teda ak $H_{n_0}=100\,000$, presne na konci n_0-tej sekundy akurát dolezie na koniec lana. Mimochodom, je známe, že pre žiadne $n>1$ nie je H_n celým číslom. Preto určite nastane prvá možnosť.

[14] To je nepredstaviteľne dlhý čas. Aj dĺžka lana bude vtedy nepredstaviteľne veľká. Teda ide tu len o riešenie úlohy v matematickom, nie v praktickom zmysle slova.

5. Sčítajte konečné sumy:

(a) $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3}}$

(c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{k+2}) - 2\sqrt[3]{k+1} + \sqrt[3]{k}\right)$

(d) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{(k+2)^2}+\sqrt[3]{k(k+2)}+\sqrt[3]{k^2}}$

(e) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log(1+\frac{1}{k})$

(f) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}$

6. Sčítajte konečné sumy:

(a) $S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$

(b) $S_n = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)}$

(c) $S_n = \frac{1}{4.11} + \frac{1}{11.18} + \frac{1}{18.25} + \cdots + \frac{1}{(7n-3).(7n+4)}$

(d) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{7k+7k^2}$

(e) $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$

(f) $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{(k^2-1)^2}$

(g) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+6k^2+11k+6}$

(h) $S_n = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2.(n+1)^2}$

7. Sčítajte konečné sumy:

(a) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!}$. Zovšeobecnite.

(b) $S_n = \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \cdots + \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$

(c) $S_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+3)}$

(d) $S_n = \frac{1}{1.7} + \frac{1}{3.9} + \cdots + \frac{1}{(2n-1).(2n+5)}$

(e) $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{k^2+k-2}$

(f) $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1).(n+2)}$

(g) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2+3k+1}{k^3(k+1)^3}$

(h) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$

Časť II

FUNKCIE

Kapitola 7

Pojem funkcie a základné vlastnosti funkcií

7.1 Pojem funkcie a základné vlastnosti funkcií

Kapitola 8

Elementárne funkcie

8.1 Základné elementárne funkcie

Pozri texty na webovej stránke katedry a Poláka.

8.2 Funkcie elementárne a neelementárne

Každú funkciu, ktorú dostaneme z konečného počtu základných elementárnych funkcií pomocou konečného počtu operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a tvorenia zloženej funkcie, nazývame **elementárna funkcia** (jednej, resp. viac premenných).

Príklad 8.1. (1) Funkcia $y = \sin(x + \sqrt{2^x - 1}) + (x^2 - 5x + 2)\ln(x - 2)$ je elementárna funkcia (jednej premennej).

(2) Funkcia $z = \cos(xy) - x^2 + \sqrt{y+1}$ je elementárna funkcia dvoch premenných.

(3) Funkcia $y = |x|$ je elementárna, lebo pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|x| = \sqrt{x^2}$.

(4) Každá funkcia, ktorú dostaneme z konečného počtu (nie nutne základných) elementárnych funkcií pomocou konečného počtu operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a tvorenia zloženej funkcie je tiež elementárna. Vysvetlite.

(5) Ak funkcie $f(x)$, $g(x)$ sú elementárne, tak funkcia $h(x) = f(x)^{g(x)}$, $x \in D(f) \cap D(g) \cap \{x \in D(f) : f(x) > 0\}$ je tiež elementárna. Vysvetlite. (Použite fakt, že $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.)

V ďalšom sa budeme zaoberať len elementárnymi funkciami jednej premennej. Veľmi dôležité postavenie medzi elementárnymi funkciami majú popri základných elementárnych funkciách najmä tzv. racionálne funkcie, ktorých špeciálnym prípadom sú polynomické funkcie.

Polynomické funkcie sú definované na množine $\mathbb{R}$. Ich najjednoduchšie prípady:

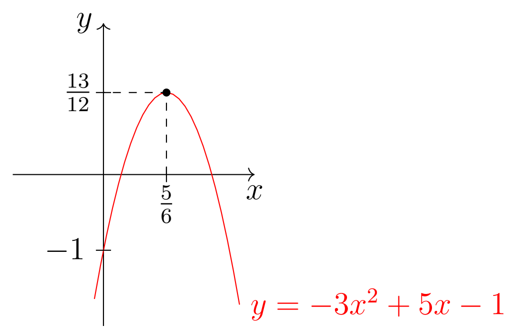
a) **konštantná** funkcia: $f(x) = a_0$ — zaradili sme ju medzi základné elementárne funkcie, jej grafom je priamka rovnobežná s osou x

b) **lineárna** funkcia: $f(x) = a_1x + a_0$. [1] Jej grafom je priamka. Táto nemôže byť rovnobežná s osou y. Obvykle sa aj konštantná funkcia považuje za lineárnu, niekedy sa však požaduje $a_1 \neq 0$.

[1] Ide o tradičnú "školskú" terminológiu. Modernejšia a správnejšia terminológia je tá, podľa ktorej sa funkcie tvaru $f(x) = a_1x + a_0$ nazývajú **afinné** a len funkcie tvaru $f(x) = a_1x$ sa nazývajú **lineárne**.

c) **kvadratická** funkcia: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$ (ak $a_2 = 0$, obvykle sa nepoužíva názov kvadratická funkcia). Jej grafom je parabola, ktorej os súmernosti je rovnobežná s osou y. Pripomeňme, že metóda doplnenia na úplný štvorec umožňuje okrem iného určiť súradnice vrcholu paraboly. Napríklad:

$$\begin{aligned} y &= -\,3x^2 + 5x - 1 \\ &= -\,3\left[x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}\right] \\ &= -\,3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{1}{3}\right] \\ &= -\,3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12} - 1 \\ &= -\,3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{13}{12}\ , \end{aligned}$$



takže vrchol príslušnej paraboly je $[\frac{5}{6}, \frac{13}{12}]$.

d) **kubická** funkcia (polynomická funkcia 3. stupňa): $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$. Jej graf má vždy stred súmernosti (je ním tzv. inflexný bod, podrobnejie neskôr).

Grafy polynomických funkcií 4. a vyššieho stupňa sú vo všeobecnosti nesúmerné, len v špeciálnych prípadoch existuje stred alebo os súmernosti (napr. u párnych či nepárnych funkcií).

Racionálne funkcie sú funkcie tvaru $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$ a $q(x)$ sú polynomické funkcie, q nie je nulový polynóm. Takáto funkcia je definovaná tam, kde $q(x) \neq 0$, t.j. všade okrem konečného počtu bodov (koreňov polynómu q). Voľbou $q(x) = 1$ dostávame polynomické funkcie. Ďalšie špeciálne prípady:

a) **lomená lineárna** funkcia: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$ [2] Obvykle sa ešte požaduje, aby $ad - bc \neq 0$. (Podmienka $ad - bc = 0$ je ekvivalentná konštantnosti funkcie $f(x)$ na $R \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Dokážte!)

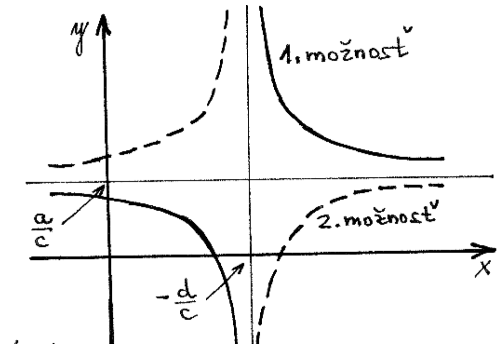
Majme teda

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+b}\ , \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0\ .$$

Grafom takejto funkcie je rovnoosá hyperbola, ktorej asymptoty $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$ sú rovnobežné s osami y, x. Ľahko to vyplýva z vyjadrenia

[2] Pre $c = 0$ by sme mali lineárnu funkciu, ak by navyše bolo aj $d = 0$, tak prázdnu funkciu.

$$\begin{aligned}
f(x) =& \frac{ax+b}{cx+d} \\
=& \frac{\frac{a}{c}(cx+d) - \frac{ad}{c} + b}{cx+d} \\
=& \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad}{c} - b}{cx+d} \\
=& \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}}
\end{aligned}$$



a zo znalosti grafu funkcie $y = \frac{1}{x}$. O ktorú z dvoch možností ide, zistíte dosadením jedného bodu (napr. $x = 0$, ak patrí do definičného oboru f).

b) **lomená kvadratická** funkcia: $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, $d \neq 0$, $a \neq 0$. Jej grafom je hyperbola, ktorej jedna asymptota ($x = -\frac{e}{d}$) je rovnobežná s osou y, druhá je "šikmá".[3]

V oboch uvedených špeciálnych prípadoch racionálnych funkcií je graf súmerný podľa stredu – priesečníka asymptot. Grafy iných racionálnych funkcií sú vo všeobecnosti nesúmerné.

Často používanými elementárnymi funkciami v matematickej analýze sú tzv. hyperbolické funkcie.

Hyperbolické funkcie. Budeme sa zaoberať len hyperbolickými funkciami so základom $e = 2,71828\ldots$ (iracionálne číslo, ktoré je základom prirodzených logaritmov). [4] Ide o tieto funkcie:

a) hyperbolický sínus

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R} ,$$

b) hyperbolický kosínus

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R} ,$$

c) hyperbolický tangens

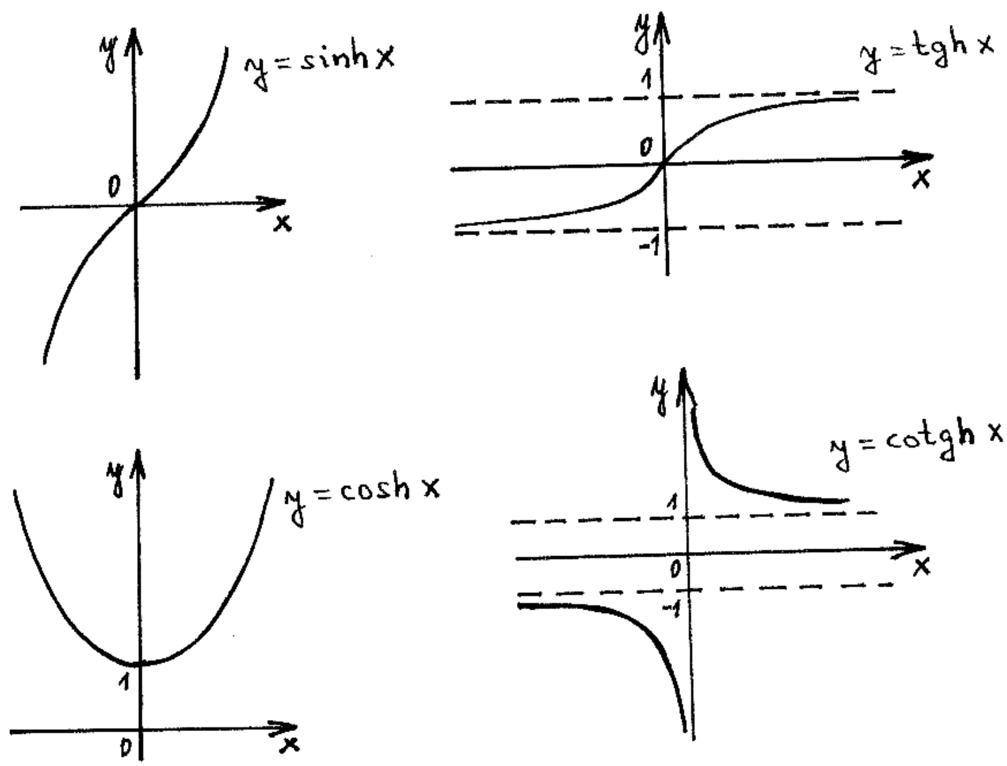
$$\mathrm{tgh}(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} ,$$

d) hyperbolický kotangens

$$\mathrm{cotgh}(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

[3] Dá sa ukázať, že táto asymptota má rovnicu $y = \frac{a}{d}x + \frac{bd-ae}{d^2}$.

[4] Hyperbolické funkcie sa dajú definovať s ubovoným základom $a > 0$, $a \neq 1$ namiesto e. Ich grafy sa podstatne zmenia, ak vezmeme $0 < a < 1$ namiesto čísla e, ktoré je väčšie ako 1.



Obr. 8.1: Grafy hyperbolických funkcií

Hyperbolické funkcie majú celý rad vlastností, ktoré sú analogické vlastnostiam goniometrických funkcií. Samostatne odvoďte aspoň to, že pre každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y), \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y), \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1, \\
\sinh(2x) &= 2\sinh(x)\cosh(x)\ .
\end{aligned}$$

Dôvod, prečo sa tieto funkcie volajú hyperbolické, je v tom, že podobne ako $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ je parametrické vyjadrenie kružnice (množina bodov $[a\cos t, a\sin t]$, $t \in \mathbb{R}$ je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$), je $x = a\cosh t$, $y = a\sinh t$ parametrické vyjadrenie hyperboly $x^2 - y^2 = a^2$ (odvoďte !).

Poznamenajme ešte, že inverzné funkcie k hyperbolickým sa volajú **hyperbolometrické**.

Množina vetkých elementárnych funkcií sa delí na dve podmnožiny - na **elementárne algebraické** funkcie a **elementárne transcendentné** funkcie. Definície sú nasledujúce.

Elementárna funkcia $y = f(x)$ sa volá **algebraická** na (intervale alebo celom svojom definičnom obore) J, ak na J spĺňa nejakú algebraickú rovnicu $P(x, y) = 0$, teda ak existuje polynomická funkcia $P(x, y)$ dvoch premenných [5] taká, že funkcia $y = f(x)$ spĺňa vzťah

[5] príklad: $P(x, y) = x^2y^5 - 3xy^2 + 2xy - 5y^2 + 2$

$P(x,y)=0$, t.j.

$$P(x,f(x))\equiv 0, \quad x\in J\ .$$

Funkcia $y=f(x)$ sa nazýva **transcendentná**, ak nie je algebraická.

Príklad 8.2. (1) Každá polynomická funkcia $p(x)$ je algebraická, lebo je riešením rovnice (s neznámou y)

$$y-p(x)=0$$

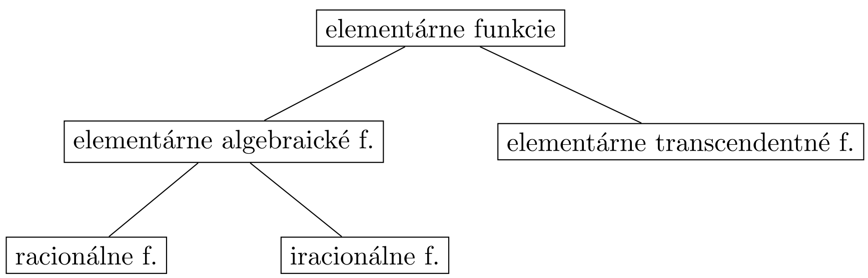
a $P(x,y)=y-p(x)$ je polynomická funkcia dvoch premenných.

(2) Všeobecnejšie, každá **racionálna** funkcia $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ je algebraická, lebo je riešením rovnice

$$q(x)y-p(x)=0\ .$$ [6]

(Pritom $P(x,y)=q(x)y-p(x)$ je polynomická funkcia dvoch premenných.)

Algebraické funkcie, ktoré nie sú racionálne, sa nazývajú **iracionálne**. Máme teda takéto rozdelenie elementárnych funkcií:



Príklad 8.3. Funkcia $y=\sqrt{x}$, $x\in\langle 0,+\infty)$ je zrejme elementárna. Je to algebraická funkcia, pretože spĺňa rovnicu

$$y^2-x=0, \quad x\in\langle 0,+\infty\rangle$$

(kde y^2-x je polynóm dvoch premenných). Tvrdíme, že je to iracionálna funkcia. Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že

$$\sqrt{x}=\frac{p(x)}{q(x)}, \quad x\in\langle 0,+\infty), \quad \operatorname{st} p(x)=n\geq 0, \quad \operatorname{st} q(x)=m\geq 0\ .$$

(Spor, ktorý dostaneme, bude trochu pripomínať spor zo známeho dôkazu iracionality čísla $\sqrt{2}$.) Môžeme predpokladať, že $p(x)$ a $q(x)$ nemajú spoločného činiteľa tvaru x^k, $k>0$, v opačnom prípade by sme ním vykrátili. Máme

$$q^2(x)\cdot x=p^2(x), \quad x\in\langle 0,+\infty),$$

takže $x|p^2(x)$ (x delí $p^2(x)$). Z toho vyplýva, že $x|p(x)$ (t.j. $p(x)$ má nulový absolútny člen), teda (nenulový) polynóm $p(x)$ je stupňa aspoň 1 a

$$p(x)=x\cdot s(x), \quad \operatorname{st} s(x)=n-1, n\geq 1\ .$$

Ak dosadíme do predchádzajúcej rovnosti, dostaneme

$$q^2(x)=x\cdot s^2(x)\ .$$

Odtiaľ $x|q^2(x)$, takže $x|q(x)$. Podobne ako vyššie,

$$q(x)=x\cdot r(x), \quad \operatorname{st} r(x)=m-1, m\geq 1\ .$$

Dostali sme, že $p(x)$ a $q(x)$ majú spoločného činiteľa x. To je spor s predpokladom.

[6] Všimnite si, že takých rovníc sa dá vymyslieť veľa, a to aj vyššieho stupňa vzhľadom na y, napr. $q^2(x)y^2-p^2(x)=0$.

Je známe, že exponenciálne, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkcie sú transcendentné. K dôkazu tohto tvrdenia sú však potrebné znalosti, ktoré zatiaľ nemáme (napr. poznatky o limitách).

Na záver tejto časti poznamenajme, že nie všetky funkcie sú elementárne. Uvedieme niektoré dôležité **neelementárne funkcie.**

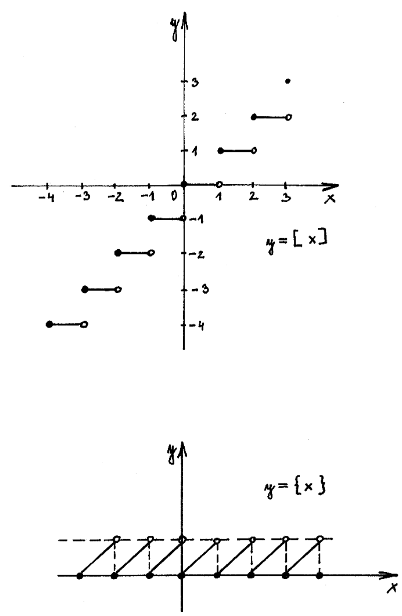
Funkcia celá časť'. Celá časť' reálneho čísla x sa obvykle označuje $[x]$ alebo novšie $\lfloor x \rfloor$ a definuje sa ako najväčšie celé číslo neprevyšujúce x. Teda

$$[x] = n \Leftrightarrow (n \in Z \wedge n \leq x < n+1) \; .$$

Napríklad $[3] = [\pi] = 3$, $[-3] = -3$, $[-\pi] = -4$. Niektoré kalkulačky majú túto funkciu označenú "INT", býva však zabudovaná inak (pre záporné hodnoty), napr. $[-\pi]$ dostaneme na display ako -3 miesto správneho -4, lebo kalkulačka miesto čísla $[-\pi]$ počíta $-[\pi] = -3$

Funkcia necelá časť'. Necelá časť' x sa značí $\{x\}$ a definuje vzťahom

$$\{x\} = x - [x] \; .$$



Obr. 8.2: Grafy celej a necelej časti

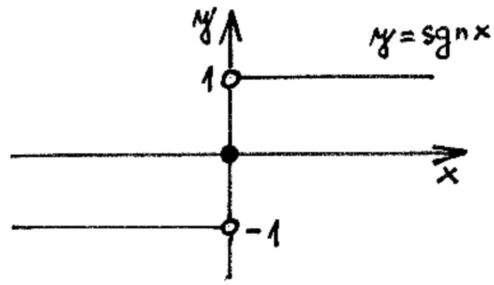
Funkcia signum je definovaná predpisom

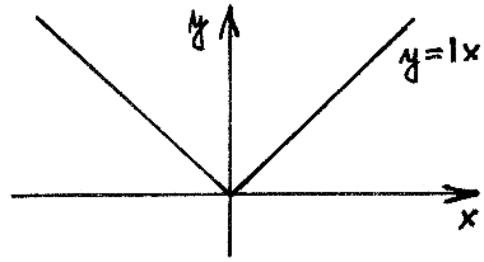
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ak } x < 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \\ 1, & \text{ak } x > 0 \; . \end{cases}$$

Všimnite si, že

$$\begin{aligned} |x| &= \begin{cases} x, & \text{ak } x \geq 0 \\ -x, & \text{ak } x < 0 \end{cases} \\ &= \max(x, -x) \\ &= x \cdot \operatorname{sgn}(x) \end{aligned}$$

a tiež





$x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$.

Pozor, nie je pravda, že $\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$ (je to pravda len pre $x \neq 0$). [7]

Charakteristická funkcia množiny $A \subseteq R$ je definovaná predpisom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in A \\ 0, & \text{ak } x \notin A \ . \end{cases}$$

Dirichletova funkcia je definovaná predpisom

$$D(x) = \chi_Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ . \end{cases}$$

Riemannova funkcia je definovaná predpisom

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ak } x = \frac{p}{q}, \text{ kde zlomok } \frac{p}{q} \text{ je v základnom tvare} \\ 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ . \end{cases}$$

Napríklad $R(\sqrt{2}) = 0$, $R\left(\frac{10}{6}\right) = R\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $R\left(-\frac{10}{6}\right) = R\left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

8.3 Transformácie grafov funkcií

Bude odprednášané. Je to aj v Polákovi, aspoň čiastočne.

[7] Ostatne, keby to bola pravda na $\mathbb{R}$, bola by funkcia $\operatorname{sgn}(x)$ elementárnou.

Kapitola 9

Reálne funkcie reálnej premennej a ich vlastnosti

9.1 Ohraničenosť funkcií

Definícia 9.1. Nech $f : A \to \mathbb{R}$ (A je hocijaká množina, nie nevyhnutne podmnožina $\mathbb{R}$). Povieme, že daná funkcia je

a) zdola ohraničená (zhora ohraničená, ohraničená), ak množina jej hodnôt $\{f(x) : x \in A\}$ je zdola ohraničená (zhora ohraničená, ohraničená),

b) neohraničená (zdola neohraničená, zhora neohraničená), ak nie je ohraničená (ak nie je zdola ohraničená, ak nie je zhora ohraničená).

Teda f je zdola ohraničená, ak $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(D \leq f(x))$ a je zhora ohraničená, ak $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(f(x) \leq H)$. Funkcia f je ohraničená, ak

$$(\exists D \in \mathbb{R})(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(D \leq f(x) \leq H) .$$

alebo, čo je to isté,

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{A})(|f(x)| \leq K) .$$

Podobne ako u postupností, čísla D, resp. H s horeuvedenými vlastnosťami sa volajú *dolné*, resp. *horné* ohraničenie funkcie f.

Poznámky:

– Všimnite si, že funkcia je ohraničená vtedy a len vtedy, keď je ohraničená zdola aj zhora.

– Ak D je dolné ohraničenie funkcie f, tak aj každé číslo $\leq D$ je jej dolné ohraničenie. Ako je to s hornými ohraničeniami?

– Ak $f, g : A \to \mathbb{R}$ sú ohraničené, tak aj $f + g$ je ohraničená. To vyplýva z toho, že

$$|f(x)| \leq K_1 \wedge |g(x)| \leq K_2 \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq K_1 + K_2$$

– Ak $f, g : A \to \mathbb{R}$ sú ohraničené, tak aj $-g$, $f \cdot g$, $f - g$ sú ohraničené. Zdôvodnite.

– Pozor, podiel ohraničených funkcií nemusí byť ohraničená funkcia. Napr. na intervale $(1, +\infty)$ funkcia $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ nie je ohraničená, hoci funkcia v čitateli aj funkcia v menovateli na tom intervale ohraničené sú.

Definícia 9.2. Nech $f : A \to \mathbb{R}$ a nech $B \subseteq A$. Povieme, že funkcia f je zdola ohraničená *na množine* B, ak zúžená funkcia $g = f|_B$ je zdola ohraničená, t.j. ak $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in B)(D \leq f(x))$.

Podobne pre ohraničenosť zhora a pre ohraničenosť.

Ak porovnáme obe definície, vidíme, že povedať o funkcii $f : A \to \mathbb{R}$, že je ohraničená, je to isté ako povedať, že je ohraničená na svojom definičnom obore A. Podobne pre ohraničenosť zdola a ohraničenosť zhora.

Príklad 9.3. Funkcia $f(x) = e^x$ nie je ohraničená (lebo nie je zhora ohraničená) ale je ohraničená na intervale $(-\infty, 1\rangle$, dokonca na každom intervale $(-\infty, c\rangle$, $c \in \mathbb{R}$.

Príklad 9.4. Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ nie je ohraničená ani zhora ani zdola, ale pre každé $\varepsilon > 0$ je ohraničená na množine $(-\infty, -\varepsilon\rangle \cup \langle\varepsilon, +\infty)$.

Príklad 9.5. Vyšetrite ohraničenosť funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + x + 1} \ .$$

Riešenie.

Upravíme predpis pre funkciu:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1 + 5}{x^2 + x + 1} = 1 + \frac{5}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \ .$$

Pretože pre každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \ ,$$

pričom rovnosť sa nadobúda (v čísle $x = -1/2$), vidíme, že $D(f) = \mathbb{R}$, funkcia f je ohraničená zdola (pre každé $x \in \mathbb{R}$ je totiž $f(x) > 1$) a je ohraničená aj zhora, lebo

$$f(x) = 1 + \frac{5}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 1 + \frac{5}{0 + \frac{3}{4}} = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3} \ .$$

Príklad 9.6. Vyšetrite, či je funkcia $f(x) = x \sin x$ ohraničená zhora.

Riešenie.

Zrejme $D(f) = \mathbb{R}$. Funkcia x je zhora neohraničená a v bodoch, v ktorých je $\sin x = 1$, platí $f(x) = x$. To nás vedie k nasledujúcemu riešeniu.

Označme $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Potom

$$f(x_k) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ .$$

Pre každé $H \in \mathbb{R}$ existuje také $k \in \mathbb{Z}$, že $f(x_k) > H$ (lebo $\frac{\pi}{2} + 2k\pi > H$ platí pre každé reálne $k > \frac{1}{2\pi}(H - \frac{\pi}{2})$ a medzi takými číslami sa nájdu aj celé čísla). To znamená, že f je zhora neohraničená.

9.2 Monotónnosť funkcií

Definícia 9.7. Nech $A \subseteq \mathbb{R}$. Povieme, že funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je

a) rastúca, ak $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$,

b) klesajúca, ak $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$,

c) nerastúca, ak $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$,

d) neklesajúca, ak $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.

e) rýdzomonotónna, ak je rastúca alebo klesajúca,

f) monotónna, ak je rastúca, klesajúca, nerastúca alebo neklesajúca.

Všimnite si, že ak je funkcia rastúca, tak je aj neklesajúca a ak je klesajúca tak je aj nerastúca. Obrátené implikácie vo všeobecnosti neplatia (uveďte príklady). Existujú funkcie, ktoré sú súčasne nerastúce aj neklesajúce. Takými sú konštantné funkcie a pretože nerovnosti $f(x_1) \geq f(x_2)$ a $f(x_1) \leq f(x_2)$ dávajú $f(x_1) = f(x_2)$, žiadne iné. Funkcia nemôže byť súčasne rastúca aj klesajúca, ak jej definičný obor obsahuje aspoň dve čísla (vysvetlite). Ak však $f : A \to \mathbb{R}$ a množina A (definičný obor funkcie f) obsahuje jediné číslo, tak f je zároveň rastúca aj klesajúca. V definičnom obore f sa totiž nedajú nájsť dve čísla $x_1 < x_2$ a preto každý výrok $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow ...)$ je pravdivý. Rovnakú úvahu možno urobiť, ak $D(f) = \emptyset$, teda ak f je tzv. *prázdna funkcia.*

Veta 9.8. *Nech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ a nech $g : A \to B$, $f : B \to \mathbb{R}$. Potom pre zloženú funkciu $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ platí:*

a) g rastúca, f rastúca $\Rightarrow f \circ g$ rastúca,

b) g klesajúca, f klesajúca $\Rightarrow f \circ g$ rastúca,

c) g rastúca, f klesajúca $\Rightarrow f \circ g$ klesajúca,

d) g klesajúca, f rastúca $\Rightarrow f \circ g$ klesajúca.

Dôkaz. Dôkazy všetkých štyroch tvrdení sú podobné, dokážeme preto len b). Nech $x_1, x_2 \in A$ sú také, že $x_1 < x_2$. Potom $g(x_1), g(x_2) \in B$ a z klesajúcosti g máme $g(x_1) > g(x_2)$. Pretože f je klesajúca, dostávame $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, čo dokazuje rastúcosť kompozície $f \circ g$. □

Podobné tvrdenia možno dokazovať aj ak priberieme do úvah neklesajúce a nerastúce funkcie. Napr. kompozícia klesajúcej a nerastúcej funkcie je neklesajúca funkcia (premyslite si to!).

Všimnite si ďalej, že napr. ak f je napr. rastúca, tak $-f$ je klesajúca. V zásade však nič nemožno tvrdiť o monotónnosti funkcie $\frac{1}{f}$. Napr. $f(x) = x$ je rastúca ale $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{x}$ definovaná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nie je monotónna. Platí totiž $-1 < 1 < 2$ a $f(-1) < f(1) > f(2)$.

Definícia 9.9. Nech $A \subseteq \mathbb{R}$. Povieme, že funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je rastúca na množine $B \subseteq A$, ak zúžená funkcia $g = f|_B$ je rastúca, t.j. ak $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.

Podobne pre ďalšie druhy monotónnosti.

Príklad 9.10. Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ je klesajúca na $(-\infty, 0)$ aj na $(0, +\infty)$. Ako sme však videli vyššie, napriek tomu nie je klesajúca!

Príklad 9.11. Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ má každú "vetvu" rastúcu, ale nie je rastúca na celom definičnom obore! To je typická študentská chyba – študenti často tvrdia, že tangens je rastúca funkcia.

Príklad 9.12. Funkcia $f(x) = \sin x$ je na niektorých intervaloch rastúca a na niektorých klesajúca. Tvrdiť však, že funkcia sínus je "aj rastúca aj klesajúca" (ako to niekedy študenti tvrdia) je však nezmysel! Vyššie sme už hovorili, že jedine funkcie s najviac jednoprvkovými definičnými obormi sú rastúca a zároveň klesajúce.

Príklad 9.13. Funkcia $f(x) = \sin x$ je na niektorých intervaloch rastúca a na niektorých klesajúca. Tvrdiť však, že funkcia sínus je "aj rastúca aj klesajúca" (ako to niekedy študenti tvrdia) je však nezmysel! Vyššie sme už hovorili, že jedine funkcie s najviac jednoprvkovými definičnými obormi sú rastúca a zároveň klesajúce.

Príklad 9.14. Funkcia (pozor, to nie je Dirichletova funkcia!)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie je monotónna, je však rastúca na množine $\mathbb{Q}$ a konštantná (teda neklesajúca a zároveň nerastúca) na množine $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Vyšetriť monotónnosť funkcie obyčajne neznamená len zistiť, či je alebo nie je monotónna (a určiť druh monotónnosti), ale aj nájsť maximálne *intervaly* monotónnosti.

Príklad 9.15. Vyšetrite monotónnosť funkcie $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

9.3 Extrémy funkcií

9.4 Symetrie grafov funkcií

Bude odprednášané. Párnosť a nepárnosť sa nájde aj v Polákovi.

9.5 Periodické funkcie

V tejto kapitole sa silne pridržiavame [2]. Pod pojmom funkcia tu budeme rozumieme reálnu funkciu s definičným oborom $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Číslo znamená reálne číslo.

Definícia 9.16. Číslo T sa nazýva *periódou* funkcie f s definičným oborom $D(f)$, ak pre každé $x \in D(f)$ platí:

(1) $x + T \in D(f)$,

(2) $x - T \in D(f)$,

(3) $f(x + T) = f(x)$.

Funkcia f sa nazýva *periodická*, ak má aspoň jednu *nenulovú* periódu T.

Všimnite si, že $T = 0$ je automaticky periódou *každej* funkcie. Bez požiadavky nenulovosti periódy v definícii periodickej funkcie by sme teda dostali veľmi nerozumnú definíciu – každá funkcia by bola periodická.[1]

Pozorného čitateľa by malo zaraziť, že v definícii sa nepožaduje, aby platilo aj

(4) $f(x - T) = f(x)$.

Dôvod spočíva v tom, že táto podmienka je splnená automaticky. Mohli by sme ju teda do definície zaradiť, ale je to zbytočné (ak overíte (1), (2), (3), nie je už potrebné overovať (4)). Platí totiž nasledujúca veta.

Veta 9.17. *Nech T je perióda funkcie f. Potom pre každé $x \in D(f)$ platí $f(x - T) = f(x)$.*

[1] Všimnite si tiež, že pre funkciu s prázdnym definičným oborom je *každé* číslo periódou, teda je to periodická funkcia.

Dôkaz. Nech $x \in D(f)$. Keďže T je perióda, podľa podmienky (2) aj $x - t \in D(f)$. Potom, vďaka tomu, že T je perióda a číslo $x - t$ patrí do $D(f)$, podľa podmienky (3) (aplikovanej na $x - T$ namiesto x) platí $f((x-T)+T) = f(x-T)$. Teraz už stačí uvážiť, že $(x-T)+T = x$, aby sme dostali $f(x) = f(x-T)$.[2] □

Príklad 9.18. Asi najznámejším príkladom periodickej funkcie je funkcia sínus definovaná na $\mathbb{R}$. Každý stredoškolák by si mal zo školy pamätať, že funkcia sínus je periodická s periódou 2π (pre každé $x \in \mathbb{R}$ je aj $x \pm T \in \mathbb{R}$ a $\sin(x + 2\pi) = \sin x$).[3]

Všimnite si, že zúžená funkcia $\sin|_{\langle 0,+\infty)}$ nemá periódu $T = 2\pi$ (pre $x = 0$ nie je splnená podmienka (2) z Definície 9.16).[4]

Varovanie. Upozorňujeme čitateľa, že niekedy sa v odbornej literatúre uvádza iná definícia periódy: "Číslo T sa nazýva periódou funkcie f, ak pre každé $x \in D(f)$ platí, že $x+T \in D(f)$ a $f(x+T) = f(x)$ (a funkcia sa nazýva periodická, ak má aspoň jednu nenulovú periódu)." Táto definícia však nie je ekvivalentná s našou. Naozaj, podľa tejto definície by napríklad funkcia $\sin|_{\langle 0,+\infty)}$ mala periódu 2π. Nepovažujeme túto definíciu za vhodnú a preto budeme používať pôvodnú Definíciu 9.16.

Veta 9.19. *Nech f má periódu T a nech $x \in D(f)$. Potom $x + nT \in D(f)$ pre každé $n \in \mathbb{Z}$.*

Veta samozrejme nehovorí nič netriviálne ak $T = 0$. Ak si uvedomíme, čo hovorí pre $T \neq 0$, hneď ako dôsledok dostávame nasledujúce tvrdenie.

Dôsledok 9.20. *Definičný obor periodickej funkcie je zhora aj zdola neohraničený.*

Veta 9.21. *Ak f je periodická funkcia, tak pre každé číslo $a \in \mathbb{R}$ platí, že rovnica $f(x) = a$ buď nemá korene alebo má nekonečne veľa koreňov.*

Dôkaz. Podľa predpokladu má f periódu $T \neq 0$. Ak a nepatrí do oboru hodnôt funkcie f, uvedená rovnica nemá riešenie. Ak a patrí do oboru hodnôt, teda ak existuje také $x \in D(f)$, že $f(x) = a$, tak potom aj $f(x + nT) = a$ pre každé $n \in \mathbb{Z}$. □

Dôsledok 9.22. *Periodická funkcia nemôže byť prostá, teda nemôže byť ani rýdzomonotónna (na celom svojom definičnom obore).*

Veta 9.23. *Nech f je periodická funkcia s periódou T a nech $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval tvaru $J = \langle \alpha, \alpha + T)$ alebo $J = (\alpha, \alpha + T\rangle$.*

(a) Ak f je ohraničená zdola (ohraničená zhora, ohraničená) na množine $J \cap D(f)$, tak potom f je ohraničená zdola (ohraničená zhora, ohraničená) na celom $D(f)$.

(b) Ak f je konštantná na množine $J \cap D(f)$, tak potom f je konštantná na celom $D(f)$.

Dôkaz. (a) Nech napr. nerovnosť $f(x) \geq M$ platí pre $x \in \langle \alpha, \alpha+T) \cap D(f)$ (ostatné prípady prenecháme na čitateľa). Potom vďaka rovnosti $f(x + n.T) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$ táto nerovnosť platí aj pre všetky $x \in \langle \alpha + n.T, \alpha + (n+1).T) \cap D(f)$, $n \in \mathbb{Z}$. Keďže každé číslo $x \in D(f)$ patrí do niektorej z týchto množín,[5] je nerovnosť $f(x) \geq M$ splnená pre všetky $x \in D(f)$. (b) Dôkaz prenecháme na čitateľa. □

---

[2] Stručne: Ak $x \in D(f)$ tak aj $x - T \in D(f)$ a potom $f(x) = f((x-T)+T) = f(x-T)$.

[3] Presvedčte sa, že aj čísla $T_1 = -2\pi$ a $T_2 = 4\pi$ sú periódy tejto funkcie.

[4] Iste ľahko ukážete, že ani $T = -2\pi$ a dokonca žiadne nenulové číslo nie je periódou funkcie $\sin|_{\langle 0,+\infty)}$.

[5] Reálna os je zjednotením intervalov $\langle \alpha + n.T, \alpha + (n+1).T)$, $n \in \mathbb{Z}$, preto $D(f)$ je zjednotením množín $\langle \alpha + n.T, \alpha + (n+1).T) \cap D(f)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Už sme hovorili, že 2π je periódou funkcie sínus. Ale zrejme aj -2π, 4π, -4π, ... sú periódy funkcie sínus. Pre konštantnú funkciu definovanú na $\mathbb{R}$ sú dokonca všetky čísla periódami. Pre funkciu $f(x) = x^3$ je len číslo 0 periódou. Nasledujúca veta opisuje vlastnosti množiny $\operatorname{Per}(f)$ všetkých periód funkcie f.

Veta 9.24. *Nech f je funkcia. Potom*

(1) $0 \in \operatorname{Per}(f)$,

(2) $T \in \operatorname{Per}(f) \implies -T \in \operatorname{Per}(f)$,

(3) $T_1, T_2 \in \operatorname{Per}(f) \implies T_1 + T_2 \in \operatorname{Per}(f)$.

Z toho matematickou indukciou vyplýva

(4) $T \in \operatorname{Per}(f) \implies \{nT : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \operatorname{Per}(f)$.

Dôkaz. (1) O tom sme už hovorili (ak $x \in D(f)$ tak $x \pm 0 \in D(f)$ a $f(x+0) = f(x)$).

(2) Nech $T \in \operatorname{Per}(f)$. Dokážeme, že aj $-T$ je perióda f. Nech $x \in D(f)$. Potom aj $x + (-T) = x - T$ a $x - (-T) = x + T$ patria do $D(f)$ (lebo T je perióda). Ďalej, $f(x + (-T)) = f(x - T) = f(x)$ (lebo T je perióda a platí Veta 9.17).

(3) Nech $T_1, T_2 \in \operatorname{Per}(f)$. Aby sme dokázali, že $T_1 + T_2 \in \operatorname{Per}(f)$, zvoľme ľubovoľne $x \in D(f)$ a dokazujme, že číslo $T_1 + T + 2$ má tri vlastnosti z Definície 9.16.

Pretože $T_1 \in \operatorname{Per}(f)$, je $x + T_1 \in \operatorname{Per}(f)$. Potom však aj $x + (T_1 + T_2) = (x + T_1) + T_2 \in D(f)$, lebo T_2 je perióda. Podobne sa dokáže, že aj $x - (T_1 + T_2) \in D(f)$. Konečne, $f(x + (T_1 + T_2)) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x)$, lebo T_1 je perióda aj T_2 je perióda.

(4) Dôkaz necháme na čitateľa. □

Veta 9.24 ukazuje, že množina $\operatorname{Per}(f)$ má pekné algebraické vlastnosti.[6] Špeciálne, z vlastnosti (2) vyplýva, že ak f má nenulovú periódu (teda ak f je periodická), tak má aj kladnú periódu. Medzi kladnými prvkami množiny $\operatorname{Per}(f)$ môže ale nemusí existovať najmenší.

Definícia 9.25. *Najmenšiu* kladnú periódu funkcie f (ak existuje) budeme nazývať *základná perióda* funkcie $f(x)$. Označovať ju budeme $\omega(f)$.

Príklad 9.26. Nech $c \in \mathbb{R}$. Pre konštantnú funkciu $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ je $\operatorname{Per}(f) = \mathbb{R}$ a základná perióda $\omega(f)$ neexistuje.

Príklad 9.27. Nech f je funkcia necelá časť, teda $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$ (nakreslite si graf funkcie f). Potom f je periodická napr. s periódou 1. Zrejme $\operatorname{Per}(f) = \mathbb{Z}$, základnou periódou je $\omega(f) = 1$.

Všimnime si, že v tomto príklade je množina $\operatorname{Per}(f)$ tvorená práve všetkými celočíselnými násobkami základnej periódy. Nasledujúca veta ukazuje, že to nie je náhoda.

Veta 9.28. *Nech $f(x)$ je periodická funkcia so základnou periódou $\omega(f)$. Potom*

$$\operatorname{Per}(f) = \{z \cdot \omega(f), z \in \mathbb{Z}\} = \omega(f) \cdot \mathbb{Z} \, .$$

[6] Keď sa v algebre naučíte pojem grupy, zistíte, že Vetu 9.24 možno stručne preformulovať takto: *Množina* $\operatorname{Per}(f)$ *je podgrupou grupy* $(\mathbb{R}, +)$*, teda je to komutatívna grupa vzhľadom na sčitovanie.* Podgrupy grupy $(\mathbb{R}, +)$ sú rôzne, uvedieme len niektoré jednoduché: $\{0\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $c \cdot \mathbb{Z} := \{c.z : z \in \mathbb{Z}\}$, kde c je ľubovoľné pevne zvolené reálne číslo, $\{i \cdot \sqrt{2} + j\pi : i, j \in \mathbb{Z}\}$ ai. Je známe, že aj obrátene, pre každú podgrupu G grupy $\mathbb{R}$ existuje funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktorú $\operatorname{Per}(f) = G$.

Dôkaz. Nech $f(x)$ má základnú periódu $\omega(f)$. Podľa Vety 9.24(4) vieme, že $\omega(f)\cdot\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Per}(f)$. Ešte treba dokázať, že ak $T \in \mathrm{Per}(f)$, tak $T = z \cdot \omega(f)$ pre nejaké $z \in \mathbb{Z}$.

Nepriamo. Nech nejaká perióda T funkcie $f(x)$ nie je celočíselným násobkom základnej periódy $\omega(f)$. Môžeme predpokladať, že $T > 0$ (ak totiž $T \in \Omega(f)$, $T < 0$ a T nie je celočíselným násobkom $\omega(f)$, tak potom $-T \in \Omega(f)$, $-T > 0$ a $-T$ nie je celočíselným násobkom $\omega(f)$; teda ak T by bolo záporné, nahradili by sme ho kladným $T^* = -T$).

Keďže $T > 0$ nie je celočíselným násobkom $\omega(f)$, existuje nezáporné číslo $a \in Z$ také, že T patrí do intervalu $(a \cdot \omega(f), (a+1) \cdot \omega(f))$. Pretože $T \in \mathrm{Per}(f)$ a aj $\omega(f) \in \mathrm{Per}(f)$, podľa Vety 9.24 je aj $p = T - a.\omega(f) \in \mathrm{Per}(f)$. Ale $p \in (0, \omega(f))$, čo je spor s tým, že $\omega(f)$ je základná perióda funkcie f. □

Ak periodická funkcia f *nemá* základnú periódu, tak $\mathrm{Per}(f)$ je *hustá v* $\mathbb{R}$, tj. každý (nedegenerovaný) interval v $\mathbb{R}$ obsahuje prvok z $\mathrm{Per}(f)$.[7] Nebudeme to dokazovať. Upozorňujeme však, že s takou situáciou sme sa už stretli v Príklade 9.26. Uvedieme menej triviálny príklad.

Príklad 9.29. Pre Dirichletovu funkciu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in Q \\ 0, & \text{ak } x \in R \setminus Q \end{cases}$$

sú periódami práve všetky racionálne čísla.

Najskôr dokážeme, že ak $r \in \mathbb{Q}$, tak r je perióda. Nech $x \in \mathbb{R}$. Chceme dokázať, že

$$f(x+r) = f(x) \ . \tag{9.1}$$

Rozlíšime dva prípady. Ak $x \in \mathbb{Q}$ tak aj $x + r \in \mathbb{Q}$ (súčet racionálnych čísel je racionálne číslo) a teda na oboch stranách dokazovanej rovnosti (9.1) sú jednotky. Ak $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak aj $x + r \in \mathbb{R} \setminus Q$ (súčet iracionálneho a racionálneho čísla je iracionálne číslo) a teda na oboch stranách dokazovanej rovnosti sú v tomto prípade nuly.

Teraz ešte dokážeme, že ak $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tak i nie je perióda. To je zrejmé z toho, že $1 = f(0) \neq f(0+i) = 0$.

Dokázali sme, že $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{Q}$. Pretože medzi kladnými racionálnymi číslami neexistuje najmenšie, $\omega(f)$ neexistuje. Dirichletova funkcia teda nemá základnú periódu. (Všimnite si, že množina $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, lebo medzi každými dvomi reálnymi číslami existuje racionálne číslo.)

Príklad 9.30. Neexistuje funkcia $f(x)$, pre ktorú $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Vyplýva to z faktu, že množina iracionálnych čísel nemá vlastnosti z Vety 9.24.[8] Stačí si všimnúť, že $0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, takže nie je splnená už vlastnosť (1).

Zopakujme:

Pre ľubovoľnú funkciu f sú dve možnosti:

(1) Funkcia f nie je periodická, tj. len číslo 0 je jej periódou. Príklad: $f(x) = x^3$.

[7] To špeciálne znamená, že funkcia $f(x)$ má ľubovoľne malé kladné periódy. To má dva zaujímavé dôsledky. Po prvé, $D(f)$ je množina hustá v $\mathbb{R}$. Po druhé, v každom (nedegenerovanom) intervale J na reálnej osi nadobúda funkcia $f(x)$ všetky svoje funkčné hodnoty, tj. $f(J) = f(D(f))$.

[8] $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie je grupa.

(2) Funkcia f je periodická, tj. má nejakú periódu T rôznu od nuly. V takom prípade podľa Vety 9.24 aj všetky celočíselné násobky periódy T sú periódami funkcie f (netvrdíme však, že len čísla nT, $n \in \mathbb{Z}$ sú periódy). Sú dva podprípady:

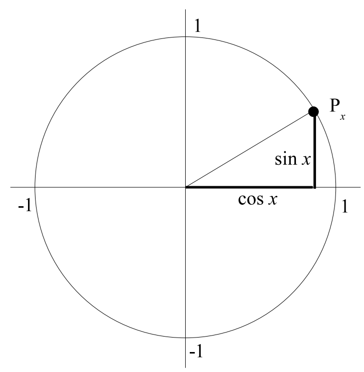
(2a) Existuje základná perióda $\omega(f)$, potom $\mathrm{Per}(f) = \omega(f) \cdot \mathbb{Z}$. Príklad: $f(x) = x - [x]$.

(2b) Neexistuje základná perióda (potom $\mathrm{Per}(f)$ je hustá v $\mathbb{R}$). Príklad: Dirichletova funkcia.

Už vieme dosť na to, aby sme presne opísali množiny periód základných goniometrických funkcií. Skôr než budete čítať ďalej, znovu si pozrite Vetu 9.28.

Veta 9.31. *Funkcie* $f(x) = \sin x$ *a* $g(x) = \cos x$ *sú periodické so základnou periódou* 2π *(a teda* $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Per}(g) = 2\pi \cdot \mathbb{Z}$*).*

Dôkaz. Využijeme znázornenie funkcií $\sin x$ a $\cos x$ pomocou jednotkovej kružnice:



Reálnym číslam x, $x+2\pi$ a $x-2\pi$ prislúcha jeden a ten istý bod P_x na jednotkovej kružnici. Preto pre sínus a kosínus čísel x, $x+2\pi$, $x-2\pi$ platí:

$$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x-2\pi) \ ,$$

$$\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x-2\pi) \ .$$

Ukážeme ešte, že žiadne kladné číslo, ktoré je menšie ako 2π, nemôže byť periódou funkcií $\sin x$ a $\cos x$.

Ak T je kladná perióda funkcie $g(x) = \cos x$, tak

$$\cos T = \cos(0+T) = \cos 0 = 1 \ .$$

To znamená, že číslu T prislúcha bod P_T so súradnicami $[1,0]$, preto má číslo T tvar $T = 2n\pi$ $(n \in Z)$, a pretože je kladné, $T \geq 2\pi$.

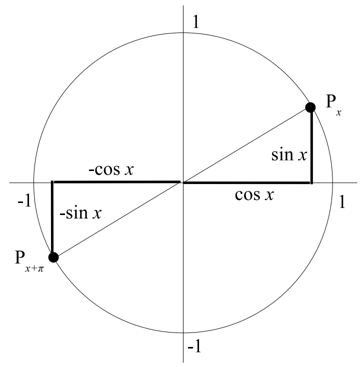
Analogicky, ak T je kladná perióda funkcie $f(x)$, tak

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

a číslu $\left(\frac{\pi}{2} + T\right)$ prislúcha bod $P_{\frac{\pi}{2}+T}$ so súradnicami $[0,1]$. To znamená, že $\frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in Z)$, alebo $T = 2n\pi$, tj. $T \geq 2\pi$. $\square$

Veta 9.32. *Funkcie* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *a* $g(x) = \operatorname{cotg}\, x$ *sú periodické so základnou periódou* π *(a teda* $\operatorname{Per}(f) = \operatorname{Per}(g) = \pi \cdot \mathbb{Z}$*).*

Dôkaz. Využijeme znázornenie funkcií $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg}\, x$ pomocou jednotkovej kružnice:



Ak x patrí do definičného oboru niektorej z funkcií $f(x), g(x)$, patria do neho aj body $x + \pi,\ x - \pi$.

Z obrázku vidíme, že body P_x a $P_{x+\pi}$ sú symetrické podľa začiatku súradnicovej sústavy pre ľubovoľné x, preto sa súradnice bodov P_x a $P_{x+\pi}$ v absolútnej hodnote rovnajú, ale majú opačné znamienka, tj.

$$\sin x = -\sin(x + \pi)\ ,$$

$$\cos x = -\cos(x + \pi)\ .$$

Potom

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\sin(x + \pi)}{-\cos(x + \pi)} = \operatorname{tg}(x + \pi)$$

a podobne

$$\operatorname{cotg}\, x = \operatorname{cotg}\,(x + \pi)\ .$$

Preto π je perióda funkcií $f(x) = \operatorname{tg} x$ a $g(x) = \operatorname{cotg} x$. π je základná perióda, lebo $\operatorname{tg} 0 = 0$ a najmenšia kladná hodnota x, pri ktorej $\operatorname{tg} x = 0$ je π. Podobne je to pre $\operatorname{cotg} x$. □

Pri vyšetrovaní periodičnosti funkcií sú často užitočné nasledujúce tri vety.

Veta 9.33. *Nech* $c \in \mathbb{R}$. *Funkcie* f *a* g *kde* $g(x) = f(x) + c$, $x \in D(f)$ *majú (rovnaké definičné obory a) rovnaké množiny periód. Špeciálne, ak jedna z nich je periodická so základnou periódou* T*, tak aj druhá z nich je periodická so základnou periódou* T*.*

Dôkaz. Tvrdenie je z názoru úplne zrejmé, ak si uvedomíme, že graf funkcie g sa získa z grafu funkcie f posunom vo "zvislom" smere o hodnotu c. Presný dôkaz vety necháme na čitateľa. □

Veta 9.34. *Ak funkcia* $f(x)$ *má periódu* T*, tak funkcia* $g(x) = f(ax+b)$, $a \neq 0$*, má periódu* $\frac{T}{|a|}$. *Ak* T *je základná perióda funkcie* $f(x)$*, tak* $\frac{T}{|a|}$ *je základná perióda funkcie* $g(x)$*.*

Dôkaz. Nech $x \in D(f)$, tj. $(ax + b) \in D(f)$. Keďže funkcia $f(x)$ je periodická s periódou T, tak aj $(ax+b+T), (ax+b-T)$ patria do $D(f)$. Teda $\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right), \left(a\left(x - \frac{T}{a}\right) + b\right) \in D(f)$, čiže $\left(x + \frac{T}{a}\right), \left(x - \frac{T}{a}\right) \in D(g)$, takže aj $\left(x + \frac{T}{|a|}\right), \left(x - \frac{T}{|a|}\right) \in D(g)$.

Ešte treba dokázať, že ak $x \in D(g)$, tak $g\left(x + \frac{T}{|a|}\right) = g(x)$. Počítajme:

$$g\left(x + \frac{T}{|a|}\right) = f\left(a + \left(x + \frac{T}{|a|}\right) + b\right) = f(ax + b + \varepsilon T),$$

kde číslo $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Ale $f(x)$ je periodická s periódou T. Preto

$$f(ax + b + \varepsilon T) = f(ax + b) = g(x)\ .$$

Tým sme dokázali, že $\frac{T}{|a|}$ je perióda funkcie $g(x)$.

Nech navyše T je *základná* perióda funkcie $f(x)$. Dokážeme, že $\frac{T}{|a|}$ je *základná* perióda funkcie $g(x)$. Nepriamo. Nech existuje t, $0 < t < \frac{T}{|a|}$, t je perióda funkcie $g(x)$. Potom pre každé $x \in D(g)$ je $g(x + t) = g(x)$, čiže $f(a(x + t) + b) = f(ax + b)$. Po úprave $f(ax + b + at) = f(ax + b)$ pre každé $x \in D(g)$. Keď x prebieha $D(g)$, tak $(ax + b)$ prebieha $D(f)$. Teda pre každé $z \in D(f)$ je $f(z + at) = f(z)$, čiže $at \in \Omega(f)$. Potom aj $|a|t \in \Omega(f)$. Ale $0 < |a|t < T$, čo je spor s tým, že funkcia $f(x)$ má základnú periódu T. □

Veta 9.35. *Nech funkcie $f(x), g(x)$ sú periodické s* tou istou *periódou T. Potom sú aj funkcie $(f + g)(x)$, $(f.g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ periodické na svojich definičných oboroch s periódou T.*

Dôkaz. Nech funkcie $f(x), g(x)$ sú periodické s periódou T a nech $h(x)$ je niektorá z funkcií $(f + g)(x)$, $(f.g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$. Môže sa stať, že $D(h) = \emptyset$, potom $h(x)$ je v zmysle definície periodická funkcia s ľubovoľnou periódou.

Nech teraz $x \in D(h)$. Potom $x \in D(f), x \in D(g)$ a v prípade, že $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$, je $g(x) \neq 0$. Keďže $f(x), g(x)$ sú periodické funkcie, je aj $(x - T), (x + T) \in D(f) \cap D(g)$ a v prípade, že $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$, je aj $g(x + T) = g(x - T) \neq 0$. Preto $(x - T), (x + T) \in D(h)$ v každom prípade.

Ešte treba dokázať, že pre každé $x \in D(h)$ je $h(x + T) = h(x)$. Pre $h(x) = f(x) + g(x)$ máme

$$h(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x) = h(x)\ .$$

V ostatných prípadoch je dôkaz podobný. □

V predchádzajúcej vete by sa mohlo stať, že $D(f) \cap D(g) = \emptyset$, teda funkcie $f + g$, $f \cdot g$ a $\frac{f}{g}$ sú tzv. prázdne funkcie (všimnite si, že aj v takom prípade veta platí).

Všimnite si, že vo Vete 9.35 vete sme neskúmali otázku, čo sa stane ak T je *základná* perióda daných funkcií f a g. Uvedieme dva príklady.

Príklad 9.36. Funkcie $f(x) = \sin x$ a $g(x) = -\sin x$ majú tú istú základnú periódu 2π, ale funkcia $h(x) = f(x) + g(x)$ (ktorá je podľa predchádzajúcej vety periodická s periódou 2π) je nulová a teda vôbec nemá základnú periódu.

Príklad 9.37. Funkcie $f(x) = a.\sin x$, $g(x) = b.\cos x$, $a, b \neq 0$ majú základnú periódu 2π. Teda 2π je aj perióda funkcie $f(x) + g(x) = a.\sin x + b.\cos x$. Ukážeme, že v tomto prípade je to dokonca základná perióda funkcie $f(x) + g(x)$.

Vezmime φ také, že $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (nie je ťažké ukázať, že také φ existuje). Potom

$$f(x) + g(x) = a.\sin x + b.\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}.\sin(x+\varphi)\ .$$

Z tohto vyjadrenia už vidieť, že funkcia $f(x) + g(x)$ má základnú periódu 2π.

Vo Vete 9.35 bolo dôležité, že perióda T bola tá istá pre f aj g. Ak f je periodická s periódou T_1 a g je periodická s periódou $T_2 \neq T_1$, funkcia $f + g$ môže ale nemusí byť periodická. Uvedieme dôležitý prípad, kedy $f + g$ určite je periodická. Potrebujeme k tomu nasledujúci pojem.

Definícia 9.38. Nenulové reálne čísla α a β sa nazývajú *súmerateľné*, ak ich podiel je racionálne číslo (tj. ak existujú nenulové celé čísla i, j také, že $i\alpha + j\beta = 0$) a nazývajú sa *nesúmerateľné*, ak ich podiel je iracionálne číslo (tj. ak pre všetky celé čísla i, j rovnosť $i\alpha + j\beta = 0$ implikuje $i = j = 0$).

Pripomeňme, že v teórii čísel *najmenší spoločný násobok* $\mathrm{nsn}(a, b)$ dvoch celých čísel a a b je definovaný ako najmenšie kladné celé číslo, ktoré je násobkom a aj b. Napr. $\mathrm{nsn}(8, 12) = 24$. Táto definícia sa dá rozšíriť na súmerateľné reálne čísla. Ak a, b sú súmerateľné, tak $\mathrm{nsn}(a, b)$ je najmenšie kladné *reálne* číslo, ktoré je celoč'ıselným násobkom a aj b.

Príklad 9.39. Čísla $\frac{1}{6}\pi$ a $\frac{3}{4}\pi$ sú súmerateľné. Určíme ich najmenší spoločný násobok. Celočíselné násobky $\frac{1}{6}\pi$ sú

$$\frac{1}{6}\pi,\ \ \frac{2}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi,\ \ \frac{3}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi,\ \ \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi,\ \ \frac{5}{6}\pi,\ \ \frac{6}{6}\pi = \pi,\ \ \frac{7}{6}\pi,\ \ \frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi,\ \ \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi, \dots$$

a celočíselné násobky $\frac{3}{4}\pi$ sú

$$\frac{3}{4}\pi,\ \ \frac{6}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi,\ \ \frac{9}{4}\pi,\ \ \frac{12}{4}\pi = 3\pi, \dots$$

Preto $\mathrm{nsn}(\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi) = \frac{3}{2}\pi \quad \left(= 2\cdot\frac{3}{4}\pi = 9\cdot\frac{1}{6}\pi\right)$.

Tak ako v tomto príklade, *vždy* je $\mathrm{nsn}(a, b) = m\cdot a = n\cdot b$ s nejakými nesúdeliteľnými m a n (keby m, n v rovnosti $m\cdot a = n\cdot b$ boli súdeliteľné, mohli by sme rovnosť vydeliť ich spoločným deliteľom a dostali by sme $m_1\cdot a = n_1\cdot b$ s menšími m_1, n_1. Dostali by sme tak menší spoločný násobok čísel a a b, spor).

Mohli sme teda pri hľadaní $\mathrm{nsn}(a, b)$ kde $a = \frac{1}{6}\pi$, $b = \frac{3}{4}\pi$, postupovať aj nasledovne. Všimneme si, že $6a = \pi$, $4b = 3\pi$. Teda $18a = 4b$ a po vykrátení $9a = 2b$. Teda $\mathrm{nsn}(a, b) = 9a = 2b = \frac{3}{2}\pi$.

V nasledujúcej vete sa kvôli jednoduchosti obmedzíme na funkcie definované na celej reálnej osi.

Veta 9.40. *Nech funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodická s periódou T_1, funkcia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodická s periódou T_2. Ak T_1, T_2 sú súmerateľné, tak funkcia $s(x) = f(x) + g(x)$ je periodická. Jednou z jej periód je najmenší spoločný násobok čísel T_1, T_2 (teda periódou funkcie $s(x) = f(x) + g(x)$ je aj ľubovoľný spoločný násobok čísel T_1, T_2).*

Dôkaz. Čísla T_1, T_2 sú súmerateľné, takže pre nejaké nenulové celé čísla i, j platí $iT_1 + jT_2 = 0$. Môžeme predpokladať, že čísla i, j sú nesúdeliteľné, v opačnom prípade danú rovnosť najskôr vydelíme najväčším spoločným deliteľom čísel i, j.

Označme $\gamma = iT_1 = -jT_2$. Ak $\gamma > 0$, je γ najmenší spoločný násobok čísel T_1, T_2. Ak $\gamma < 0$, je číslo $-\gamma = -iT_1 = jT_2$ najmenší spoločný násobok čísel T_1, T_2.

Nech $\gamma > 0$. Potom pre funkciu $s(x) = f(x) + g(x)$, pre každé $x \in R$, platí:

$$s(x+\gamma) = f(x+\gamma) + g(x+\gamma) = f(x+iT_1) + g(x-jT_2) = f(x) + g(x) = s(x) ,$$

teda γ je perióda funkcie $s(x)$. Pre $\gamma < 0$ je dôkaz podobný. $\square$

Poznámka 9.41. V našom úvodnom texte sa nebudeme problematikou periodičnosti súčtu dvoch periodických funkcií podrobnejšie zaoberať, upozorníme však na dve veci.

Vo vete 9.40 najmenší spoločný násobok čísel T_1, T_2 (ktorý je periódou funkcie $s(x) = f(x) + g(x)$) môže, ale nemusí byť základnou periódou funkcie $s(x) = f(x) + g(x)$ a to aj vtedy, ak T_1, T_2 sú základné periódy funkcií $f(x)$ a $g(x)$.

Ak funkcia $f(x)$ má základnú periódu T_1, funkcia $g(x)$ má základnú periódu T_2 a T_1, T_2 sú *nesúmerateľné*, tak často funkcia $s(x) = f(x) + g(x)$ nie je periodická.[9] Môže sa však stať, že funkcia $s(x) = f(x) + g(x)$ predsa len je periodická.

[9] To platí napríklad vtedy, keď aspoň jedna z funkcií f, g je *spojitá*. O spojitých funkciách sa budete učiť v kurze matematickej analýzy.

9.6 *Periodické funkcie – riešené príklady

Príklady v tejto kapitole sú vybrané z [2].

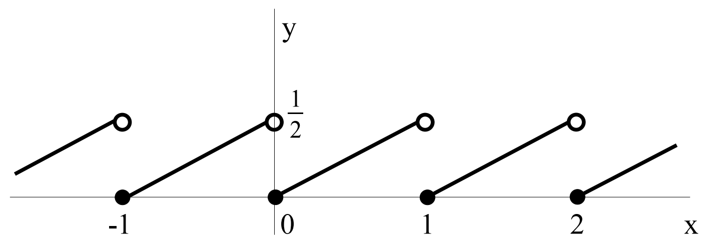
Príklad 9.42. Nakreslite graf periodickej funkcie s periódou $T = 1$, ktorá je na intervale $\langle 0, 1)$ daná rovnicou:

a) $y = \frac{x}{2}$,

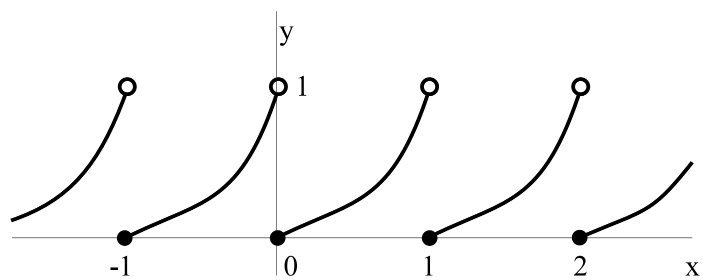
b) $y = x^2$.

Riešenie:

a)



b)



Príklad 9.43. Nájdite základnú periódu funkcie $f(x) = \cos^4 x + \sin x$.
Riešenie:
Definičný obor funkcie $f(x)$ je množina všetkých reálnych čísel. Ukážeme, že funkcia $f(x)$ je periodická s periódou 2π.

Platí

$$f(x + 2\pi) = \cos^4(x + 2\pi) + \sin(x + 2\pi) = \cos^4 x + \sin x = f(x) .$$

Žiadne kladné číslo T menšie ako 2π nie je periódou funkcie $f(x)$, lebo pre také T je

$$f\left(-\frac{T}{2}\right) \neq f\left(-\frac{T}{2} + T\right) = f\left(\frac{T}{2}\right) .$$

Naozaj, čísla $\sin\left(-\frac{T}{2}\right)$ a $\sin\left(\frac{T}{2}\right)$ sú rôzne od nuly a majú opačné znamienka. Čísla $\cos\left(-\frac{T}{2}\right)$ a $\cos\left(\frac{T}{2}\right)$ sa rovnajú, preto

$$\cos^4\left(-\frac{T}{2}\right) + \sin\left(-\frac{T}{2}\right) \neq \cos^4\left(\frac{T}{2}\right) + \sin\left(\frac{T}{2}\right) .$$

To znamená, že 2π je základná perióda funkcie $f(x)$.

Príklad 9.44. Nájdite základnú periódu funkcie $f(\sqrt{5}x)$, ak T je základná perióda funkcie $f(x)$.
Riešenie:
Použitím vety 9.34 dostaneme hneď odpoveď: Základná perióda funkcie $f(\sqrt{5}x)$ je číslo $\frac{T}{\sqrt{5}}$.

Príklad sa však dá vyriešiť aj bez použitia tejto vety. Napríklad takto:

Body $(x-t), x, (x+t)$ patria do definičného oboru funkcie $g(x) = f(\sqrt{5}x)$ vtedy a len vtedy, ak body $(x\sqrt{5} - t\sqrt{5}), x\sqrt{5}, (x\sqrt{5} + t\sqrt{5})$ patria do definičného oboru funkcie $f(x)$. Z definície funkcie $g(x)$ vyplýva ekvivalencia rovností

$$g(x-t) = g(x) = g(x+t)$$

a

$$f(x\sqrt{5} - t\sqrt{5}) = f(x\sqrt{5}) = f(x\sqrt{5} + t\sqrt{5}) \ .$$

Preto, keďže T je perióda funkcie $f(x)$, číslo $\frac{T}{\sqrt{5}}$ bude periódou funkcie $g(x)$, pričom bude základnou periódou funkcie $g(x)$, lebo v opačnom prípade by existovala perióda $0 < t < \frac{T}{\sqrt{5}}$ funkcie $g(x)$, to znamená, že by funkcia $f(x)$ mala periódu $t\sqrt{5} < T$.

Príklad 9.45. Funkcia $y = f(x)$ je definovaná na celej množine reálnych čísel, pre nejaké číslo $k \neq 0$ vyhovuje vzťahu $f(x+k).(1-f(x)) = 1 + f(x)$. Dokážte, že $f(x)$ je periodická funkcia.
Riešenie:
Vzťah $f(x+k).(1-f(x)) = 1 + f(x)$ upravíme na tvar $f(x+k) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Je zrejmé, že $f(x) \neq 1$ (ak by totiž pre nejaké x bolo $f(x) = 1$, mali by sme $0 = 1 + f(x)$, odtiaľ $f(x) = -1$, čo je spor).

Hľadáme také $z \in Z$, aby $f(x + z.k) = f(x)$. Ak $f(x+k) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, potom

$$f(x+2k) = f(x+k+k) = \frac{1+f(x+k)}{1-f(x+k)} = \frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = \frac{2}{-2f(x)} = -\frac{1}{f(x)} \ .$$

Nech teraz $z = 4$. Počítame

$$f(x+4k) = f(x+2k+2k) = -\frac{1}{f(x+2k)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}} = f(x) \ .$$

Ukázali sme, že pre každé x je $f(x+4k) = f(x)$, teda $4k$ je perióda funkcie $y = f(x)$, čiže funkcia $y = f(x)$ je periodická.

Príklad 9.46. Nech $a \neq 0$ a nech pre každé $x \in R$ je $f(x) \neq 0,\ f(x) = f(x-a).f(x+a)$. Dokážte, že funkcia $f(x)$ je periodická a nájdite jej periódu.
Riešenie:
Hľadáme také $k \in Z$, aby $f(x + k.a) = f(x)$. Zo zadania vyjadríme:

$$f(x+a) = \frac{f(x)}{f(x-a)}$$

(ak by pre nejaké x bolo $f(x-a)=0$, bolo by $f(x)=0$, spor). Ďalej počítame:

$$f(x+2a)=f(x+a+a)=\frac{f(x+a)}{f((x+a)-a)}=\frac{\frac{f(x)}{f(x-a)}}{f(x)}=\frac{1}{f(x-a)}\ .$$

Teraz vyjadríme:

$$f(x+3a)=f(x+a+2a)=\frac{1}{f((x+a)-a)}=\frac{1}{f(x)}\ .$$

Potom

$$f(x+6a)=f(x+3a+3a)=\frac{1}{f(x+3a)}=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=f(x)\ .$$

Teda číslo $6a$ je perióda funkcie $f(x)$.

Príklad 9.47. Zistite, či funkcia $f(x)$ je periodická, ak

a) $f(x)=\{x\}+\sin x$,

b) $f(x)=\{x\}+\cos(2x)$.

Riešenie:

a) Predpokladajme, že funkcia $f(x)$ je periodická s periódou T. Potom pre každé $x\in R$ platí rovnosť $\{x+T\}+\sin(x+T)=\{x\}+\sin x$.

Ak $x=0$, tak

$$\{T\}+\sin T=0\ .$$

Ak $x=-T$, tak

$$\{-T\}-\sin T=0$$

(lebo $\sin(-t)=-\sin t$ pre každé $t\in R$).

Sčítame:

$$\{T\}+\{-T\}=0\ .$$

Zlomková časť $\{x\}$ ľubovoľného čísla x je vždy nezáporná. Preto rovnosť $\{T\}+\{-T\}=0$ platí len ak $\{T\}=\{-T\}=0$, tj. ak T je celé číslo. Pretože $\{T\}=0$, z rovnosti $\{T\}+\sin T=0$ vyplýva, že $\sin T=0$, tj. $T=k.\pi, k\in Z$. Pretože T je celé číslo a π je iracionálne, je $k=0$, takže $T=0$. To znamená, že funkcia $f(x)$ nemá nenulovú periódu, teda nie je periodická.

b) Ak T je perióda funkcie $f(x)$, tak pre každé $x\in R$ je

$$\{x+T\}+\cos(2(x+T))=\{x\}+\cos(2x)\ .$$

Ak $x=0$, tak

$$\{T\}+\cos(2T)=1\ .$$

Ak $x=-T$, tak $\{-T\}+\cos(-2T)=1$, čiže

$$\{-T\}+\cos(2T)=1\ .$$

Teraz máme sústavu dvoch rovníc:

$$\{T\} + \cos(2T) = 1 \ ,$$
$$\{-T\} + \cos(2T) = 1 \ .$$

Odtiaľ $\{T\} = \{-T\}$, takže T je celé číslo alebo číslo tvaru $k + \frac{1}{2},\ k \in Z$.

Ak $T = k + \frac{1}{2}, k \in Z$, tak zo sústavy rovníc je $\cos(2T) = \frac{1}{2}$, čo je vďaka tomu, že $2T$ je celé číslo, nemožné. Preto musí byť T celé číslo. Potom podľa sústavy rovníc je $\cos(2T) = 1$, čo vďaka tomu, že $2T$ je celé číslo, dáva $2T = 0$, odkiaľ $T = 0$.

Dokázali sme, že ak T je perióda funkcie $f(x)$, tak $T = 0$. Teda funkcia $f(x)$ nie je periodická.

Príklad 9.48. Dokážte, že funkcia $y = \cos x^2$ nie je periodická.
Riešenie:
Definičný obor funkcie y je množina všetkých reálnych čísel. Máme dokázať, že neexistuje číslo $T \neq 0$, ktoré je periódou funkcie y.

Nepriamo. Nech funkcia $y = \cos x^2$je periodická s periódou $T \neq 0$. Potom podľa definície platí: $\cos(x+T)^2 = \cos x^2$.
Ak $x = 0$, tak $\cos T^2 = 1$, tj. $T^2 = 2k\pi,\ k \in Z$.
Ak $x = \sqrt{2}T$, tak $\cos\left(\sqrt{2}T + T\right)^2 = \cos\left(\sqrt{2}T\right)^2$, po úprave: $\cos\left(T^2(\sqrt{2}+1)^2\right) = \cos(2T^2)$.
Z toho dostaneme:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2 T^2 - 2T^2 = 2n\pi,\ n \in Z \ , \qquad (1)$$

alebo

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2 T^2 + 2T^2 = 2n\pi,\ n \in Z \ . \qquad (2)$$

Riešme prvú rovnicu. Po umocnení zátvorky a jednoduchej úprave dostaneme

$$T^2\left(2 + 2\sqrt{2} + 1 - 2\right) = 2n\pi,\ n \in Z \ .$$

Ďalej upravujeme

$$T^2\left(2\sqrt{2}+1\right) = 2n\pi \ ,$$
$$2\sqrt{2}+1 = \frac{2n\pi}{T^2} \ .$$

(Využili sme, že $T \neq 0$.)

Lenže $T^2 = 2k\pi, k \in Z$, takže môžeme dosadiť za T^2, dostaneme

$$2\sqrt{2}+1 = \frac{2n\pi}{2k\pi}$$

a z toho

$$2\sqrt{2}+1 = \frac{n}{k} \ .$$

Táto rovnosť vedie k sporu, lebo $\left(2\sqrt{2}+1\right)$ je iracionálne číslo. Rovnica (2) podobne vedie k sporu, čiže funkcia y nie je periodická.[10]

[10]Iné riešenie, využívajúce techniky matematickej analýzy: Množina tých $x \geq 0$, v ktorých je $y = 1$, je $\left\{0, \sqrt{2\pi}, \sqrt{4\pi}, \sqrt{6\pi}, \dots\right\}$. V intervale $\left(0, \sqrt{2\pi}\right)$ dĺžky $\sqrt{2\pi}$ niet bodov, v ktorých $y = 1$. Keby bola funkcia y periodická, mala by aj ľubovoľne veľké kladné periódy, teda pre každé $n \in N$ by existoval interval dĺžky $\sqrt{2\pi}$ ležiaci vpravo od n, v ktorom niet bodov, v ktorých $y = 1$. Ale $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2(n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi}\right) = 0$, takže pre dosť veľké $n \in N$ je $\sqrt{2(n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi} < \sqrt{2\pi}$, spor.

Príklad 9.49. Dokážte, že funkcia $f(x) = \sin\sqrt{|x|}$ nie je periodická.
Riešenie:
Predpokladáme, že $T \neq 0$ je perióda funkcie $f(x)$. Ak T je perióda funkcie $f(x)$, aj $-T$ je perióda funkcie $f(x)$, teda môžeme uvažovať prípad $T > 0$. Nech $x > 0$ vyhovuje rovnici $\sin\sqrt{x} = 1$. Potom $f(x+T) = f(x)$, čiže

$$\sin\sqrt{x+T} = \sin\sqrt{x} = 1 \ ,$$

to znamená, že

$$\sqrt{x+T} - \sqrt{x} = 2n\pi,\ n \in Z \ .$$

Ale $\sqrt{x+T} > \sqrt{x}$, preto platí

$$\sqrt{x+T} \geq 2\pi + \sqrt{x} \ .$$

Obidve strany nerovnosti sú kladné čísla, teda po umocnení dostaneme ekvivalentnú nerovnosť:

$$x + T \geq 4\pi^2 + 4\pi\sqrt{x} + x \ .$$

Po úprave

$$T \geq 4\pi^2 + 4\pi\sqrt{x} \ .$$

Táto nerovnosť vedie k sporu, pretože ľahko vidieť, že číslo $\sqrt{x}$ možno zobrať ľubovoľne veľké, a teda tak, aby táto nerovnosť neplatila pre dané pevné číslo T. Dokázali sme, že funkcia $f(x)$ nie je periodická.

Príklad 9.50. Dokážte, že funkcia $f(x) = \cos\sqrt[3]{|x|^2}$ nie je periodická.
Riešenie:
Dá sa takmer bez zmeny použiť postup z príkladu 9.49. Ukážeme však radšej istú jeho obmenu.

Uvažujme $x > 0$, pre ktoré $f(x) = 1$, teda $\sqrt[3]{x^2} = 2k\pi, k \in N$. Odtiaľ $x = \sqrt{8\pi^3}.\sqrt{k^3}$. Pre $k \in N$ interval $\left(\sqrt{8\pi^3}.\sqrt{k^3}, \sqrt{8\pi^3}.\sqrt{(k+1)^3}\right)$ neobsahuje bod, v ktorom $f(x) = 1$. Ale $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt{8\pi^3}.\sqrt{(k+1)^3} - \sqrt{8\pi^3}.\sqrt{k^3}\right) = +\infty$. Teda jednak existujú body, v ktorých $f(x) = 1$, jednak existujú intervaly ľubovoľne veľkej dĺžky, neobsahujúce body, v ktorých $f(x) = 1$. Teda funkcia $f(x)$ nemôže byť periodická.

Príklad 9.51. Dokážte, že funkcia $f(x) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{2}x\right) + \operatorname{cotg}\left(\sqrt{3}x\right)$ nie je periodická.
Riešenie:
Funkcia $f(x)$ nie je definovaná v bodoch, v ktorých $\sqrt{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ alebo $\sqrt{3}x = k\pi, k \in Z$. Označme $a_k = \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}}, b_k = \frac{k\pi}{\sqrt{3}}, M = \bigcup\limits_{k\in Z}\{a_k, b_k\}$. Potom $D(f) = R \setminus M$. Pre dokázanie toho, že funkcia $f(x)$ nie je periodická, stačí ukázať, že ak akokoľvek zvolíme $T > 0$, nájde sa bod $m \in M$ taký, že $(m+T) \notin M$, tj. $(m+T) \in D(f)$ (potom totiž $(m+T) \in D(f)$ a $((m+T) - T) \notin D(f)$, čiže T nie je perióda funkcie $f(x)$.)

Nepriamo. Nech $T > 0$ má tú vlastnosť, že

$$\text{pre každé } m \in M \text{ je } (m+T) \in M. \qquad (*)$$

Potom voľbou $m = b_0 = 0$ dostávame, že $T \in M$. Keďže $T > 0$, je

$$T \in \left\{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{5\pi}{2\sqrt{2}}, \dots\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \frac{3\pi}{\sqrt{3}}, \dots\right\} \ .$$

Sú dve možnosti:

1. Ak $T = \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}}, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, tak podľa $(*)$ voľbou $m = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ dostávame
$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{(2r+1)\pi}{2\sqrt{2}} \qquad \text{alebo} \qquad \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{r\pi}{\sqrt{3}}\ ,\ r \in Z\ .$$
To by však po úprave dávalo, že $\sqrt{\frac{3}{2}}$ je racionálne číslo, spor.

2. Ak $T = \frac{k\pi}{\sqrt{3}}, k \in \{1, 2, \dots\}$, tak podľa $(*)$ voľbou $m = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ dostávame
$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{3}} = \frac{(2r+1)\pi}{2\sqrt{2}} \qquad \text{alebo} \qquad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{3}} = \frac{r\pi}{\sqrt{3}}\ ,\ r \in Z\ ,$$
čo vedie k rovnakému sporu ako v prípade 1.[11]

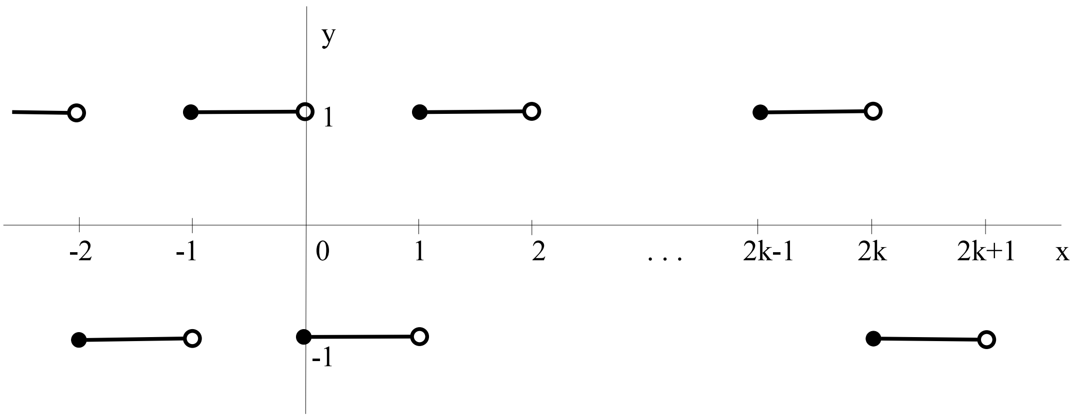
Príklad 9.52. Dokážte, že ak $f(x) = \sin x + \cos(ax)$ je periodická funkcia, tak a je racionálne číslo.
Riešenie:
Ak $f(x)$ je periodická funkcia s periódou T, tak pre všetky x musí byť splnená rovnosť:
$$\sin(x+T) + \cos(a(x+T)) = \sin x + \cos(ax)\ .$$
Položiac v tejto rovnosti $x = 0, x = -T$ a $x = T$ dostaneme
$$\sin T + \cos(aT) = 1\ ,$$
$$-\sin T + \cos(aT) = 1\ ,$$
$$\sin(2T) + \cos(2aT) = \sin T + \cos(aT)\ .$$
Z prvej a druhej rovnosti máme $\cos(aT) = 1$ a $T = \frac{2n\pi}{a}, n \in Z$. Dosadíme nájdenú periódu T do poslednej rovnice:
$$\sin\left(\frac{4n\pi}{a}\right) + \cos(4n\pi) = \sin\left(\frac{2n\pi}{a}\right) + \cos(2n\pi)\ .$$
Po úprave
$$\sin\left(\frac{4n\pi}{a}\right) = \sin\left(\frac{2n\pi}{a}\right)\ ,$$
odkiaľ
$$\frac{4n\pi}{a} - \frac{2n\pi}{a} = 2k\pi \qquad \text{alebo} \qquad \frac{4n\pi}{a} + \frac{2n\pi}{a} = (2k+1)\pi\ ,\ k \in Z\ ,$$
tj. buď $a = \frac{4}{k}$ alebo $a = \frac{6n}{2k+1}$. V obidvoch prípadoch je a racionálne číslo.

[11] Iné riešenie, využívajúce limity: Všimnime si, že pre každé k je
$$\lim_{x \to \left(\frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}}\right)^-} f(x) = +\infty$$
a v žiadnom inom bode nie je limita zľava rovná $+\infty$.

Vzdialenosť dvoch susedných bodov, v ktorých je limita zľava rovná $+\infty$, je $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Teda ak $T > 0$ je perióda funkcie $f(x)$, tak $T = n\frac{\pi}{\sqrt{2}}, n \in N$. Podobne body $\frac{k\pi}{\sqrt{3}}, k \in Z$ sú jediné body, v ktorých je limita zľava rovná $-\infty$. Vzdialenosť dvoch takých susedných bodov je $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Teda ak $T > 0$ je perióda funkcie $f(x)$, tak $T = m\frac{\pi}{\sqrt{3}}, m \in N$.

Ukázali sme, že ak $T > 0$ je perióda funkcie $f(x)$, existujú prirodzené čísla m, n také, že $T = n\frac{\pi}{\sqrt{2}} = m\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Odtiaľ máme $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{m}{n}$. Dostali sme rovnosť iracionálneho a racionálneho čísla, spor. Funkcia $f(x)$ teda nemá kladnú periódu, čiže nie je periodická.

Príklad 9.53. Zistite, či funkcia $f(x) = (-1)^{[x-1]}$ je periodická a nájdite jej periódu.
Riešenie:
Pre definičný obor funkcie $f(x)$ platí: $D(f) = R$.
Ak $[x-1]$ je párne, teda $x \in \langle 2k-1, 2k), k \in Z$, tak $f(x) = 1$.
Ak $[x-1]$ je nepárne, teda $x \in \langle 2k, 2k+1), k \in Z$, tak $f(x) = -1$.
Môžeme zostrojiť graf funkcie $f(x)$:



Teraz je už zrejmé, že funkcia $f(x)$ má základnú periódu 2. Ak by sme sa neuspokojili s týmto názorom, môžeme postupovať takto:

1. Dokážeme, že 2 je perióda funkcie $f(x)$:
$$f(x+2) = (-1)^{[(x+2)-1]} = (-1)^{[(x-1)+2]} = (-1)^{[(x-1)]+2} = (-1)^{[(x-1)]}.(-1)^2 = f(x)\ .$$
2. Dokážeme, že ak $0 < T < 2$, tak T nie je perióda funkcie $f(x)$. Naozaj, ak $T \in \langle 1, 2)$, tak $f(0) \neq f(0+T)$, lebo $f(0) = -1,\ f(T) = 1$. Ak $T \in (0, 1)$, tak pre nejaké n je $nT \in \langle 1, 2)$, čo podľa predošlého nie je perióda funkcie $f(x)$.

Príklad 9.54. Zistite, či daná funkcia je periodická a nájdite jej základnú periódu.

a) $f(x) = 2 + (-1)^{[x]}$

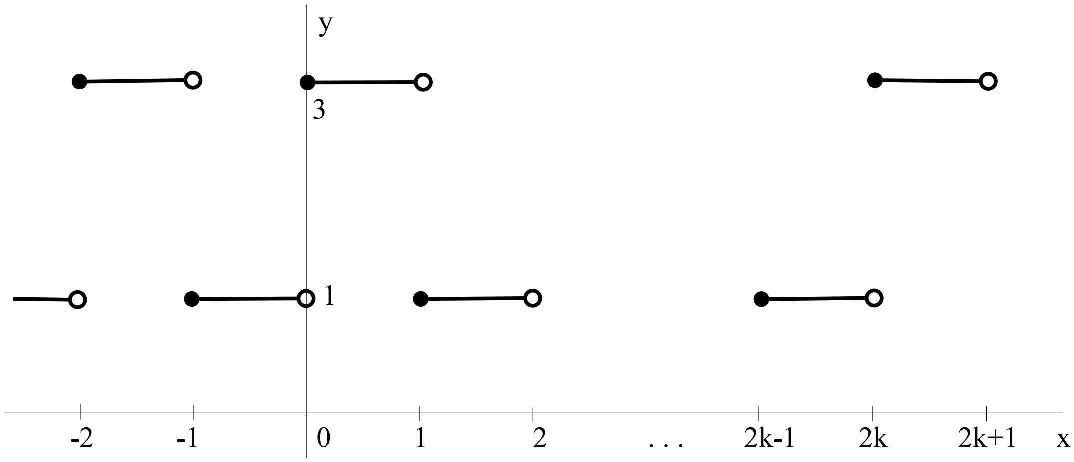
b) $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|}\right)^{[x]}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)$

d) $f(x) = (-1)^{\left[x\sqrt{2}\right]}$

Riešenie:
Definičný obor každej funkcie $f(x)$ v tomto príklade je množina všetkých reálnych čísel.

a) Vieme, že $(-1)^{[x]} = 1$, ak $[x]$ je párne číslo, teda $x \in \langle 2k, 2k+1), k \in Z$ a $(-1)^{[x]} = -1$, ak $[x]$ je nepárne číslo, teda $x \in \langle 2k-1, 2k), k \in Z$. Funkciu $f(x)$ môžeme zapísať aj v tvare
$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ak } x \in \langle 2k, 2k+1), k \in Z \\ 1, & \text{ak } x \in \langle 2k-1, 2k), k \in Z\ . \end{cases}$$
Teraz už vieme nakresliť graf funkcie $f(x)$:



Je zrejmé, že funkcia $f(x)$ je periodická a jej základná perióda je 2. Dôkaz je podobný ako v príklade 9.53, preto ho nebudeme uvádzať.

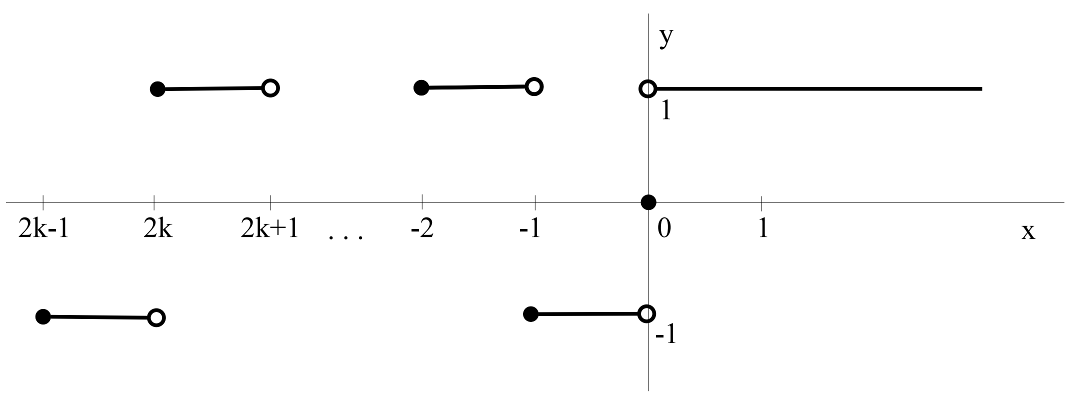
b) Ak $x > 0$, potom $\frac{x}{|x|} = 1$ a $\left(\frac{x}{|x|}\right)^{[x]} = 1^{[x]} = 1$. Ak $x < 0$, potom $\frac{x}{|x|} = -1$ a

$$\left(\frac{x}{|x|}\right)^{[x]} = (-1)^{[x]} = \begin{cases} 1, & \text{ak } [x] \text{ je párne} \\ -1, & \text{ak } [x] \text{ je nepárne} . \end{cases}$$

$[x]$ je párne číslo, ak $x \in \langle 2k, 2k+1), k \in Z^-$ a $[x]$ je nepárne číslo, ak $x \in \langle 2k-1, 2k), k \in Z_0^-$. Funkciu $f(x)$ môžeme vyjadriť v tvare

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x > 0 \text{ a } x \in \langle 2k, 2k+1), k \in Z^- \\ -1, & \text{ak } x < 0 \text{ a } x \in \langle 2k-1, 2k), k \in Z_0^- \\ 0, & \text{ak } x = 0 . \end{cases}$$

Graf funkcie $f(x)$:

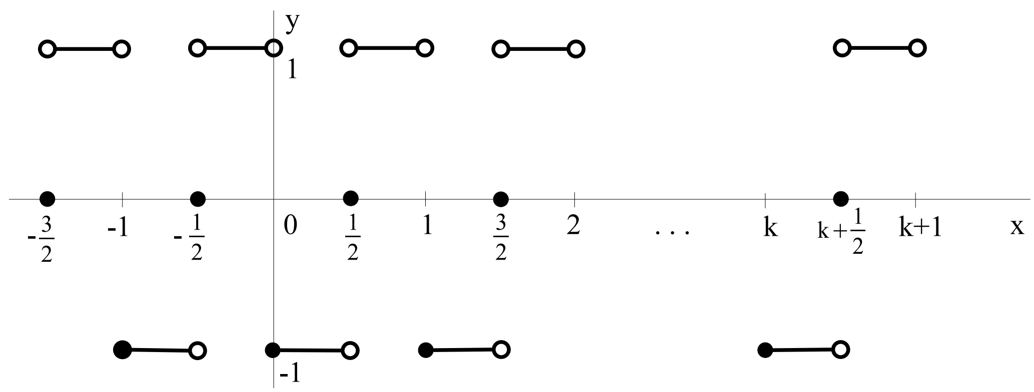


Je zrejmé, že funkcia $f(x)$ nie je periodická, lebo ak $x = 0$, $f(0) = 0$ a neexistuje žiadne číslo $T \neq 0$, aby $f(0 + T) = f(0)$, čiže neexistuje perióda funkcie $f(x)$.

c) Ak $\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)>0$, tak $f(x)=1$.
Ak $\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)=0$, tak $f(x)=0$.
Ak $\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)<0$, tak $f(x)=-1$.
Z prvej nerovnice máme $x-[x]>\frac{1}{2}$, potom $x\in\left(k+\frac{1}{2},k+1\right),k\in Z$. Podobne pre $f(x)=0$ máme $x=k+\frac{1}{2},k\in Z$ a pre $f(x)=-1$ $x\in\left\langle k,k+\frac{1}{2}\right),k\in Z$. Zhrnieme poznatky a funkciu $f(x)$ zapíšeme v tvare

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ak } x\in\left(k+\frac{1}{2},k+1\right),k\in Z\\ 0, & \text{ak } x=k+\frac{1}{2},k\in Z\\ -1, & \text{ak } x\in\left\langle k,k+\frac{1}{2}\right),k\in Z\ .\end{cases}$$

Graf funkcie $f(x)$:

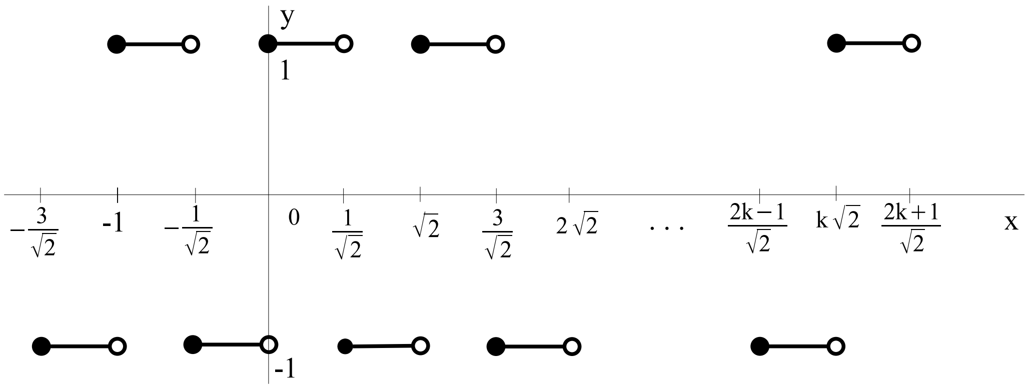


Je zrejmé, že čílo 1 je základná perióda funkcie $f(x)$. Ľahko to vidieť aj z toho, že $f(x)=0$ len pre $x=\frac{1}{2}+k.1,k\in Z$. Dôkaz je podobný ako v príklade 9.53, preto ho nebudeme uvádzať.

d) Ak $\left[x\sqrt{2}\right]$ je párne, teda $x\sqrt{2}\in\langle 2k,2k+1),k\in Z$, z toho $x\in\left\langle\frac{2k}{\sqrt{2}},\frac{2k+1}{\sqrt{2}}\right),k\in Z$, tak $f(x)=1$. Ak $\left[x\sqrt{2}\right]$ je nepárne, teda $x\in\left\langle\frac{2k-1}{\sqrt{2}},\frac{2k}{\sqrt{2}}\right),k\in Z$, tak $f(x)=-1$. Vyjadríme

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ak } x\in\left\langle\frac{2k}{\sqrt{2}},\frac{2k+1}{\sqrt{2}}\right),k\in Z\\ -1, & \text{ak } x\in\left\langle\frac{2k-1}{\sqrt{2}},\frac{2k}{\sqrt{2}}\right),k\in Z\ .\end{cases}$$

Graf funkcie $f(x)$:

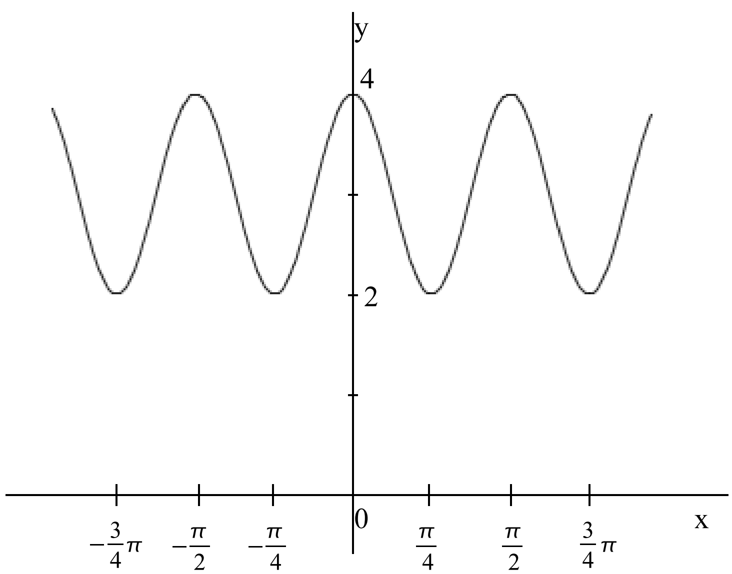


Funkcia $f(x)$ je periodická a jej základná perióda je 2 (vidieť to aj z grafu). Dôkaz je podobný ako v príklade 9.53.

Príklad 9.55. Zistite, či funkcia $f(x) = 4\sin^4 x + 4\cos^4 x$ je periodická a nájdite jej základnú periódu.
Riešenie:
Funkcia $f(x)$ je definovaná na celej množine reálnych čísel. Dokážeme, že funkcia $f(x)$ je periodická so základnou periódou $\frac{\pi}{2}$.

Funkciu $f(x)$ upravíme. Využijeme, že $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, teda aj $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$, odkiaľ $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$. Teda $f(x) = 4(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) = 2(2 - \sin^2(2x))$.

Graf funkcie $f(x)$:



Pretože funkcia $\sin^2 x$ má základnú periódu π, má funkcia $\sin^2(2x)$ podľa vety 9.34 základnú periódu $\frac{\pi}{2}$. Potom zrejme aj funkcia $f(x)$ má základnú periódu $\frac{\pi}{2}$.

Príklad 9.56. Nájdite základnú periódu funkcie $f(x) = 15\sin^2(12x) + 12\sin^2(15x)$.
Riešenie:
Všimnime si, že $f(0) = 0$, a že $f(x) = 0$ platí vtedy a len vtedy, keď $\sin(12x) = 0$ aj

$\sin(15x) = 0$. To platí práve vtedy, keď $12x = k\pi$ a zároveň $15x = n\pi,\ k, n \in Z$, čiže práve vtedy, keď existujú celé čísla k, n také, že $x = k\frac{\pi}{12} = n\frac{\pi}{15}$. Z toho $n = \frac{5}{4}k$ a keďže n má byť celé číslo, musí byť $k = 4r, r \in Z$. Teda $k = 4r, n = 5r$. Nulové body funkcie $f(x)$ sú teda body tvaru $r\frac{\pi}{3}, r \in Z$. Z toho vidieť, že ak $T > 0$ je perióda funkcie $f(x)$, je $T = \frac{\pi}{3}$. Pretože, ako ľahko vidieť, je $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$, je číslo $\frac{\pi}{3}$ základnou periódou funkcie $f(x)$.

Príklad 9.57. Nájdite základnú periódu funkcie $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
Riešenie:
Perióda funkcie $\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ je $\frac{4\pi}{3}$, perióda funkcie $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ je 6π. Najmenší spoločný násobok týchto periód bude 12π. Je zrejmé, že 12π je perióda danej funkcie.[12] Dokážeme, že je základná.

Nepriamo. Nech existuje perióda t taká, že $0 < t < 12\pi$. Potom máme rovnosť

$$\cos\left(\frac{3(x+t)}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+t}{3}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \ ,$$

alebo

$$\sin\left(\frac{3}{4}t\right)\sin\left(\frac{3}{4}(2x+t)\right) + \sin\left(\frac{t}{6}\right)\cos\left(\frac{1}{6}(2x+t)\right) = 0 \ .$$

Ak $t < 12\pi$ a $\frac{3}{4}t = \frac{3t}{4\pi}\pi$ a $\frac{t}{6} = \frac{t}{6\pi}\pi$, tak jedno z čísel $\frac{3t}{4\pi}$ alebo $\frac{t}{6\pi}$ nie je celé, tj. jedno z čísel $\sin\left(\frac{3}{4}t\right)$ a $\sin\left(\frac{t}{6}\right)$ je rôzne od nuly.

Nech napr. $\sin\left(\frac{3}{4}t\right) \neq 0$. Potom máme rovnosť

$$\frac{\sin\left(\frac{3}{4}(2x+t)\right)}{\cos\left(\frac{1}{6}(2x+t)\right)} = -\frac{\sin\left(\frac{t}{6}\right)}{\sin\left(\frac{3}{4}t\right)} \ .$$

Ľahko sa môžeme predvedčiť, že táto rovnosť je nepravdivá, ak vyberieme napr. $x = 0$ a $x = 6\pi$ a dosadíme tieto x do ľavej časti. Dostaneme $\sin\left(\frac{3}{4}t\right) = 0$, čo je spor s predpokladom.

Príklad 9.58. Dokážte, že funkcia $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{11}{34}x\right) + \mathrm{cotg}\left(\frac{13}{54}x\right)$ je periodická a nájdite jej periódu.
Riešenie:
Z vety 9.34 vyplýva, že číslo $\frac{34}{11}\pi$ je perióda funkcie $\mathrm{tg}\left(\frac{11}{34}x\right)$ a číslo $\frac{54}{13}\pi$ je perióda funkcie $\mathrm{cotg}\left(\frac{13}{54}x\right)$. Najmenší spoločný násobok čísel $\frac{34}{11}\pi$ a $\frac{54}{13}\pi$ je 918π. (Naozaj, ak hľadáme nesúdeliteľné čísla x, y s vlastnosťou $\frac{34}{11}x = \frac{54}{13}y$, dostaneme po úprave $17.13x = 27.11y$, takže $x = 27.11,\ y = 17.13$ a potom $\frac{34}{11}\pi x = \frac{54}{13}\pi y = 918\pi$.) Ak $x \in D(f)$, aj $x + 918\pi,\ x - 918\pi \in D(f)$. Počítajme:

$$f(x+918\pi) = \mathrm{tg}\left(\frac{11}{34}(x+918\pi)\right) + \mathrm{cotg}\left(\frac{13}{54}(x+918\pi)\right) =$$

$$= \mathrm{tg}\left(\frac{11}{34}x + 297\pi\right) + \mathrm{cotg}\left(\frac{13}{54}x + 221\pi\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{11}{34}x\right) + \mathrm{cotg}\left(\frac{13}{54}x\right) = f(x) \ ,$$

[12] Pozri aj Vetu 9.40.

teda 918π je perióda funkcie $f(x)$. (To bolo jasné aj bez výpočtu, lebo násobok periódy je perióda a ak $g(x), h(x)$ majú periódu T, aj $g(x) + h(x)$ ju má.)[13]

Príklad 9.59. Zistite, či daná funkcia je periodická a nájdite jej základnú periódu.

a) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

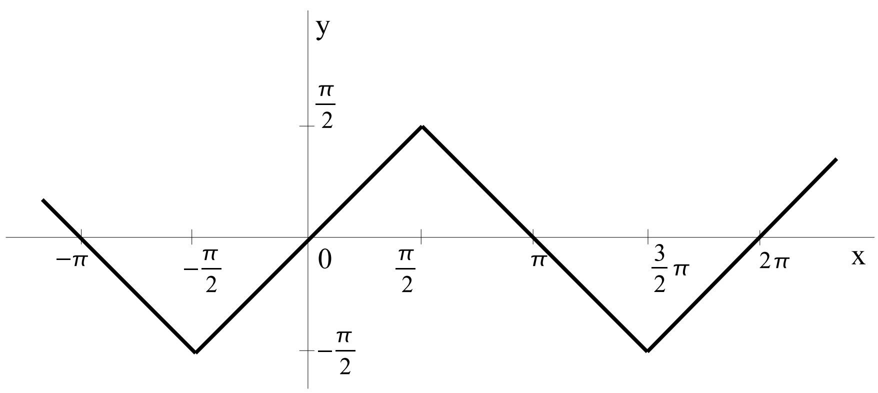
b) $f(x) = \arcsin(\cos x)$

c) $f(x) = \arccos(\cos x)$.

Riešenie:
Definičný obor všetkých funkcií $f(x)$ v tomto príklade je množina všetkých reálnych čísel.

a) Funkcia $f(x)$ je rastúca na všetkých intervaloch $\left\langle \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{5}{2}\pi + 2k\pi \right\rangle, k \in Z$ a klesajúca na všetkých intervaloch $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\rangle$.

   Graf funkcie $f(x)$:



   Dokážeme, že číslo 2π je perióda funkcie $f(x)$. Naozaj,

$$f(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x) = f(x) \ ,$$

   je 2π perióda funkcie $f(x)$.

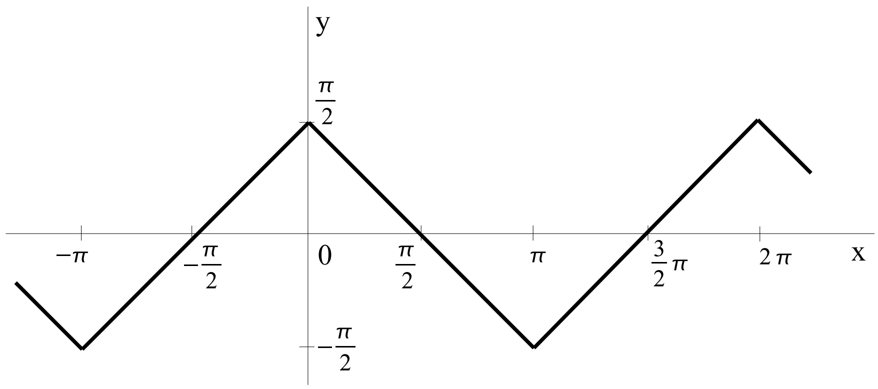
   Je jasné, že 2π je aj základná perióda funkcie $f(x)$, lebo napr. $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pre každé $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$. V intervale $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right)$ neexistuje žiadne x, pre ktoré $f(x) = \frac{\pi}{2}$, čiže neexistuje ani perióda funkcie $f(x)$ menšia ako 2π.

b) Funkcia $f(x)$ je klesajúca na intervaloch $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle, k \in Z$ a rastúca na intervaloch $\langle (2k + 1)\pi, (k + 1)2\pi, \rangle, k \in Z$.

   Graf funkcie $f(x)$:

[13] Dokážeme, že 918π je základná perióda funkcie $f(x)$. Funkcia $\operatorname{tg}\left(\frac{11}{34}x\right)$ nie je definovaná v bodoch x, pre ktoré $\frac{11}{34}x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, teda $x = \frac{17}{11}(2k+1)\pi, k \in Z$. Funkcia $\operatorname{cotg}\left(\frac{13}{54}x\right)$ nie je definovaná v bodoch x, pre ktoré $\frac{13}{54}x = r\pi$, teda $x = \frac{54}{13}r\pi, r \in Z$.

Označme $A = \left\{\frac{17}{11}(2k + 1)\pi, k \in Z\right\}$, $B = \left\{\frac{54}{13}r\pi, r \in Z\right\}$. Všimnime si, že $A \cap B = \emptyset$, lebo rovnosť $\frac{17}{11}(2k+1)\pi = \frac{54}{13}r\pi$ dáva $17.13.(2k+1) = 54.11.r$, čo je spor (vľavo nepárne, vpravo párne číslo). Ďalej, $D(f) = R \setminus (A \cup B)$. Pretože A, B sú disjunktné a funkcie $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ sú v bodoch, kde sú definované, spojité, je zrejmé, že funkcia $f(x)$ má limitu zľava rovnú $+\infty$ práve v bodoch množiny A a limitu zľava rovnú $-\infty$ práve v bodoch množiny B. Uvážme ešte, že ľubovoľné dva susedné body množiny A, resp. B, majú vzdialenosť $\frac{34}{11}\pi$, resp. $\frac{54}{13}\pi$. Teda ak $T > 0$ je perióda funkcie $f(x)$, musí byť T prirodzeným násobkom $\frac{34}{11}\pi$ aj prirodzeným násobkom $\frac{54}{13}\pi$. Teda musí byť prirodzeným násobkom 918π (čo je najmenší spoločný násobok čísel $\frac{34}{11}\pi, \frac{54}{13}\pi$). Teda 918π je naozaj základná perióda funkcie $f(x)$.

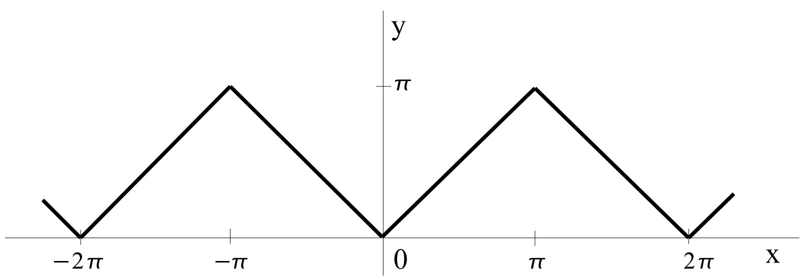


Dokážeme, že funkcia $f(x)$ je periodická a periódou 2π:

$$f(x+2\pi) = \arcsin(\cos(x+2\pi)) = \arcsin(\cos x) = f(x) \ .$$

Ešte treba dokázat', že 2π je základná perióda funkcie $f(x)$. L'ahko vidiet', že pre každé $x \in (0, 2\pi)$ platí $f(x) < \frac{\pi}{2}$. Pre $x = 0$, resp. $x = 2\pi$, je $f(0) = \frac{\pi}{2}$, resp. $f(2\pi) = \frac{\pi}{2}$, to znamená, že základná perióda funkcie $\arcsin(\cos x)$ je 2π.

c) Na intervaloch $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle, k \in Z$ je funkcia $f(x)$ rastúca a na intervaloch $\langle (2k+1)\pi, (k+1)2\pi, \rangle, k \in Z$ je funkcia klesajúca. Ked'že $f(x)$ je spojitá, vieme l'ahko nakreslit' jej graf:



Dokážeme, že funkcia $f(x)$ je periodická s periódou 2π. Teda

$$f(x+2\pi) = \arccos(\cos(x+2\pi)) = \arccos(\cos x) = f(x) \ .$$

Je jasné, že pre každé $x = 2k\pi, k \in Z$ je $f(x) = 0$. Pre žiadne iné číslo $x \in (0, 2\pi)$ neplatí, že jeho funkčná hodnota je rovná 0. To znamená, že 2π je základná perióda funkcie $f(x) = 0$.

Príklad 9.60. Dokážte, že funkcia $f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2}) + \cos(x\sqrt{3})$ nie je periodická.
Riešenie:
Ak $x = 0$, je $f(0) = 3$. K dôkazu neperiodičnosti funkcie $f(x)$ stačí ukázat', že neexistuje $x \neq 0$ s vlastnost'ou $f(x) = 3$.

Nepriamo. Nech $\cos x + \cos(x\sqrt{2}) + \cos(x\sqrt{3}) = 3$. To je možné len tak, že

$$\cos x = 1, \ \ \cos(x\sqrt{2}) = 1, \ \ \cos(x\sqrt{3}) = 1 \ .$$

Prvá rovnosť platí, ak $x = 2k\pi, k \in Z$. Druhá rovnosť platí, ak $x = \sqrt{2}n\pi, n \in Z$. Sústava rovníc

$$x = 2k\pi,\ k \in Z$$
$$x = \sqrt{2}n\pi,\ n \in Z$$

má len jedno riešenie $x = 0$. Teda pre $x \neq 0$ je $f(x) \neq 3$, čo bolo treba dokázať.

Príklad 9.61. Nájdite základnú periódu funkcií:

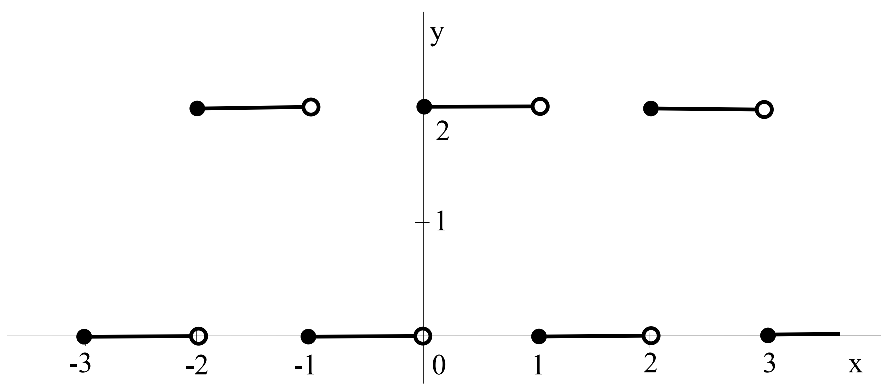
a) $f(x) = \frac{3^{[x]}+(-3)^{[x]}}{3^{[x]}}$,

b) $f(x) = x - \frac{[3x]}{3}$,

c) $f(x) = \frac{3x}{4} - [\frac{3x}{4}]$.

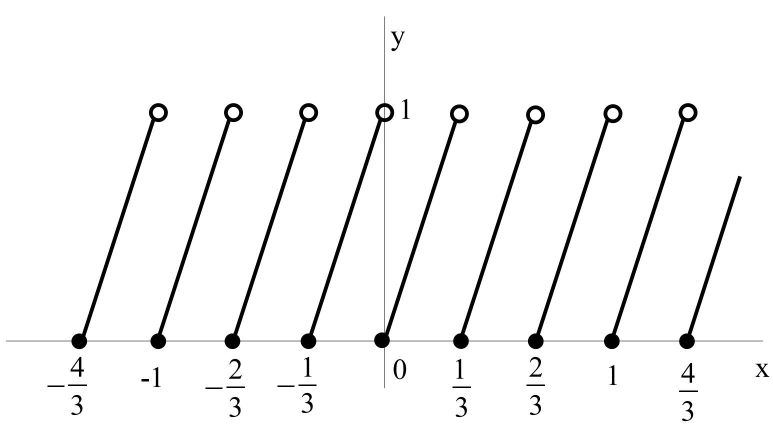
Riešenie:

a) Funkcia $f(x)$ sa dá upraviť: $f(x) = 1 + (-1)^{[x]}$.
Graf funkcie $f(x)$:



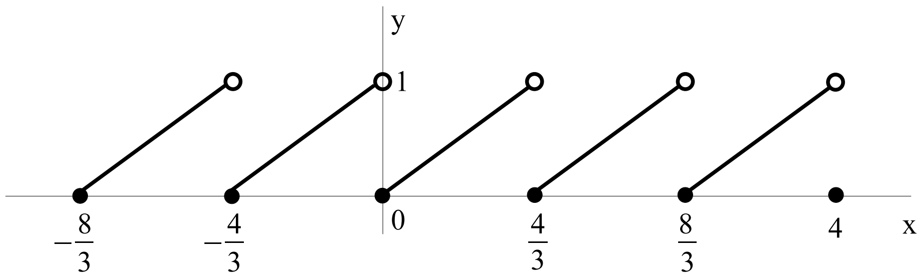
Keďže $f(x+2) = 1 + (-1)^{[x+2]} = 1 + (-1)^{[x]} = f(x)$, je číslo 2 perióda funkcie $f(x)$. Je veľmi jednoduché ukázať (podobne ako v príklade 9.53), že 2 je aj základná perióda $f(x)$.

b) Graf funkcie $f(x)$:



Pre každé $x \in R$ platí $f\left(x + \frac{1}{3}\right) = f(x)$. Teda $\frac{1}{3}$ je perióda funkcie $f(x)$. Ľahko vidieť, že $\frac{1}{3}$ je zároveň základná perióda funkcie $f(x)$.

c) Graf funkcie $f(x)$:



Perióda funkcie $f(x)$ je $\frac{4}{3}$. Je zrejmé, že je to aj základná perióda funkcie $f(x)$.

Príklad 9.62. Zistite, či daná funkcia je periodická a nájdite jej základnú periódu:

a) $f(x) = \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$,

b) $f(x) = 5\cos(2\pi x)$,

c) $f(x) = 2^{3+2\sin x}$.

Riešenie:
Definičný obor všetkých funkcií v tomto príklade je množina všetkých reálnych čísel.

a) Podľa vety 9.34 je základná perióda funkcie $f(x)$ číslo $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$.

b) Využitím vety 9.34 máme výsledok: základná perióda funkcie $f(x)$ je číslo 1.

c) Funkcia $f(x)$ má základnú periódu 2π. To vyplýva z toho, že funkcia 2^x je rastúca a $3 + 2\sin x$ má základnú periódu 2π.

9.7 *O funkcionálnych rovniciach

Literatúra

[1] M. Gardner, *Aha! Gotcha: Paradoxes to Puzzle and Delight*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1982

[2] M. Horanová, *Periodické funkcie*, diplomová práca, Pedagogická fakulta, Banská Bystrica, 1990 (vedúci práce Ľ. Snoha)

[3] A. Janesová, *Symetrie grafov funkcií*, diplomová práca, Fakulta humanitných a prírodných vied, Univerzita Mateja Bela, Banská Bystrica, 1993 (vedúci práce Ľ. Snoha)

[4] J. Polák, *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha 1991

[5] J. Polák, *Středoškolská matematika v úlohách I*, Prometheus, Praha, 1996

[6] J. Polák, *Středoškolská matematika v úlohách II*, Prometheus, Praha, 1999

[7] James T. Sandefur, *Discrete Dynamical Modeling*, Oxford University Press, 1993