Ergodická teória

Verzia z 24. mája 2020

Záznam prednášok

Ľubomír Snoha

Obsah

Predhovor

Toto je učebný text k predmetu Ergodická teória 1 na Katedre matematiky FPV UMB. Vznikol počas autorových prednášok v letnom semestri 2017/18 a v zimnom semestri 2019/20.

Text si kladie za cieľ podrobne vysvetliť niekoľko málo základných pojmov a tvrdení ergodickej teórie, namiesto prebratia čo najväčšieho rozsahu látky. Teda riadime sa heslom "radšej menej, ale poriadne". Kapitoly a podkapitoly označené hviezdičkou presahujú rozsah povinného učiva a sú nepovinné.

Text sa neobmedzuje na ergodickú teóriu na pravdepodobnostných priestoroch. Pripúšťame aj nekonečnú mieru, aj keď to znamená isté komplikácie. Takisto automaticky nepredpokladáme, že v uvažovaných systémoch sa zachováva miera, aj keď to znamená ďalšie komplikácie. Text sa samozrejme dá ľahko prispôsobiť (zjednodušiť), ak si prednášajúci/študent želá pracovať len s mieru zachovávajúcimi systémami na pravdepodobnostných priestoroch, ako je to vo väčšine základných učebníc ergodickej teórie.

Na druhej strane, nezavádzame nesingulárne zobrazenia a v niektorých tvrdeniach predpokladáme, že T zachováva mieru, hoci by stačilo predpokladať, že T zachováva množiny nulovej miery.

Akékoľvek pripomienky, kritické poznámky, objavené chyby alebo návrhy k tomuto textu posielajte na emailovú adresu Lubomir.Snoha@umb.sk.

Banská Bystrica, 2020 Ľubomír Snoha

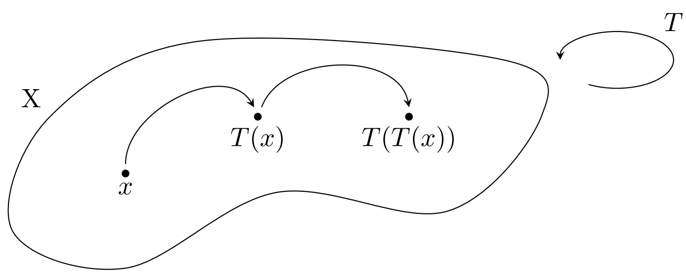
Kapitola 1

Úvodné pojmy

1.1 Dynamický systém, trajektória, orbita

Nech X je množina a $T\colon X \to X$ zobrazenie. Potom dvojicu (X, T) nazývame *dynamický systém*. Obvykle predpokladáme, že $X \neq \emptyset$, bez toho, aby sme to explicitne povedali.[1] Množina X sa niekedy nazýva *fázový priestor* daného dynamického systému.

V dynamickom systéme (X, T) je "dynamika" v tom, že si predstavujeme, že sa body pohybujú, skáču. Bod $x \in X$ môžeme zobraziť zobrazením T, dostaneme bod $T(x)$. Ten môžeme znovu zobraziť a dostaneme bod $T(T(x))$.[2] Postupujúc takto ďalej, dostaneme body $T(T(T(x))), \dots$. Interpretujeme to tak, že bod x za jednotku času preskočí do bodu $T(x)$, za ďalšiu jednotku času do bodu $T(T(x))$ atď, ako na Obrázku 1.1.



Obr. 1.1: V dynamickom systéme (X, T) body "skáču". Vidíme polohu bodu x v časoch $0, 1, 2, \dots$.

Používať označenia ako $T(T(T(T(x))))$ je nepohodlné. Ak pre kompozíciu $T \circ T \circ T \circ T$, tzv. štvrtú iteráciu zobrazenia T, použijeme označenie T^4, môžeme príslušný bod šikovnejšie zapísať ako $T^4(x)$. Pozor, T^4 nie je mocnina, ale výsledok opakovaného skladania zobrazenia T so sebou

[1] Tak je tomu najmä v situácii, keď hovoríme "Nech (X, T) je dynamický systém". Nie je to však rigidné pravidlo. Ak napr. uvažujeme o nejakom konkrétnom dynamickom systéme (X, T), pričom množina X nie je zadaná priamo ale nejakou podmienkou a po dlhých úvahách sa ukáže, že $X = \emptyset$, nezačneme sa ospravedlňovať čitateľovi za to, že sme dvojicu (X, T) nazvali dynamický systém.

[2] Býva zvykom, a aj my tak budeme niekedy robiť, šetriť zátvorky a napr. namiesto $T(T(x))$ písať $T(Tx)$. Veríme, že takéto a podobné úspory zátvoriek čitateľa nepopletú, ba práve naopak, prispejú k prehľadnosti textu.

samým.[3] Zobrazenie

$$T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T \circ T}_{n\text{-krát}}$$

sa nazýva *n-tá iterácia* zobrazenia T. To má zrejmý význam pre $n = 1, 2, \dots$, výhodné je však definovať aj nultú iteráciu T^0 ako identitu na množine X, teda funkciu $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ definovanú tak, že $\mathrm{id}_X(x) = x$ pre každé $x \in X$. Iterácie zobrazenia T definujeme teda rekurentne takto:

$$T^0 = \mathrm{id}_X, \qquad T^n = T \circ T^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Všetko sú to opäť zobrazenia $X \to X$.

Ak (X, T) je dynamický systém a $x \in X$, tak postupnosť

$$\mathrm{Traj}_T(x) := (T^n(x))_{n=0}^{\infty} = x, T(x), T^2(x), \dots . \tag{1.1}$$

sa nazýva *trajektória* bodu $x \in X$. Množina hodnôt tejto postupnosti, teda množina

$$\mathrm{Orb}_T(x) := \{T^n(x)\colon n = 0, 1, 2, \dots\} = \{x, T(x), T^2(x), \dots\} \tag{1.2}$$

sa nazýva *orbita* bodu x.[4]

Ak počiatočný bod trajektórie označíme x_0, je veľmi prehľadné, ak ďalšie body označíme $x_1, x_2, \dots$:

$$\mathrm{Traj}_T(x_0) := x_0, \underbrace{T(x_0)}_{x_1}, \underbrace{T^2(x_0)}_{x_2}, \dots, \underbrace{T^n(x_0)}_{x_n}, \dots . \tag{1.3}$$

Ide tu o rekurentne definovanú postupnosť

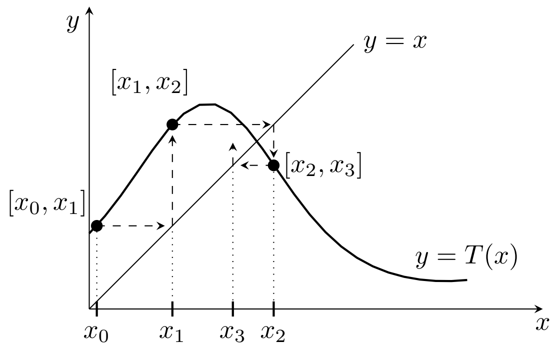
$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

V matematickej analýze sa obvykle nazýva *iteračná postupnosť* prislúchajúca k zobrazeniu T a bodu x_0 alebo iteračná postupnosť bodu x_0 vzhľadom na zobrazenie T alebo iteračná postupnosť zobrazenia T generovaná bodom x_0 (ako sme už ale povedali, v teórii dynamických systémov sa namiesto toho používa názov trajektória bodu x_0 v dynamickom systéme (X, T)).

Ak $X \subseteq \mathbb{R}$, teda (1.3) je iteračná postupnosť *reálnych čísel*, možno ju geometricky znázorniť pomocou tzv. *iteračného diagramu*; niekedy sa mu hovorí *pavučinový diagram* (z angl. cobweb diagram). Postup je nasledujúci. Nakreslíme graf funkcie $y = T(x)$ (os x vodorovne, os y zvisle) a do toho istého obrázka nakreslíme aj tzv. *diagonálu*, čo je priamka $y = x$. Sledujte Obrázok 1.2. Vyznačme na osi x číslo x_0. Budeme "cestovať", a to vždy len zvislým alebo vodorovným smerom a budeme pritom zanechávať za sebou stopu v podobe lomenej čiary poskladanej zo zvislých a vodorovných úsekov. Najskôr sa postavme do bodu $[x_0, 0]$ a pohnime sa zvislým smerom, až kým nenarazíme na graf funkcie (to, či treba ísť nahor alebo nadol, závisí od polohy grafu). Sme v bode $[x_0, T(x_0)] = [x_0, x_1]$. Z tohto bodu zase putujme vodorovným smerom (doprava alebo doľava, podľa situácie), až kým nenarazíme na diagonálu. Sme v bode $[x_1, x_1]$ (pamätajte, že bod diagonály má obe súradnice rovnaké). Takže už vieme na osi x vyznačiť číslo x_1, teda druhý člen postupnosti. Putujeme ďalej. Z bodu $[x_1, x_1]$ ideme zvislo, až kým nenarazíme na graf funkcie.

[3] Pri takýchto označeniach v literatúre si vždy treba overiť, čo znamenajú. Napr. v goniometrii $\sin^2(x)$ znamená druhú mocninu $(\sin(x))^2$. Ak by sme chceli byť veľmi precízni, tak namiesto $T(T(T(T(x))))$ by sme nemali písať $T^4(x)$, aby sme nepoplietli goniometrov, ale napr. $T^{\circ 4}(x)$. Veríme však, že ani pri našom menej precíznom označení nedôjde k nedorozumeniu. Treba, aby si čitateľ pamätal, že v dynamických systémoch T^4 nie je štvrtá mocnina, ale štvornásobná kompozícia. To samozrejme znamená aj to, že v dynamických systémoch by sme mocninu $(\sin(x))^2$ nemali písať v tvare $\sin^2(x)$, lebo by to mohlo byť nesprávne interpretované ako $(\sin \circ \sin)(x)$.

[4] Terminológia nie je jednotná. Niektorí autori nerobia rozdiel medzi trajektóriou a orbitou. Pre nás však trajektória je postupnosť a orbita je množina.



Obr. 1.2: Iteračný diagram (funkcia $T(x)$, počiatočný bod x_0)

Sme v bode $[x_1, T(x_1)] = [x_1, x_2]$. Z tohto bodu pokračujeme vodorovne až do bodu $[x_2, x_2]$ na diagonále. Už vieme vyznačiť na osi x číslo x_2. Takto pokračujeme a postupne získavame ďalšie a ďalšie členy našej postupnosti.[5]

Načo je dobré takto kresliť iteračnú postupnosť? Na to, že "uvidíme" našu postupnosť $x_0, x_1, x_2, \ldots$ a jej vlastnosti. Napríklad "uvidíme", či je monotónna. Obrázok síce nie je dôkaz, ale dobre nakreslený iteračný diagram môže byť zdrojom hypotézy, ktorú potom už ľahšie dokážeme.

Poznamenajme ešte, že pri kreslení iteračného diagramu je obyčajne veľmi dôležité znázorniť priesečníky grafu funkcie T s diagonálou. Ich prvé súradnice sú tzv. *pevné body* funkcie T (sú to riešenia rovnice $T(x) = x$). Ak sa pri našom putovaní dostaneme do priesečníka grafu s diagonálou, kreslenie môžeme skončiť, z daného bodu už neunikneme (kreslite!).

Poznámka 1.1. Zobrazenie T je vo všeobecnosti neinvertovateľné (t.j. nemusí existovať inverzné zobrazenie $T^{-1}\colon X \to X$). Práve preto sme trajektóriu bodu x_0 definovali ako tzv. *doprednú trajektóriu* (1.3). Ak zobrazenie T je invertovateľné (tým máme na mysli, že $T\colon X \to X$ je bijekcia), t.j. ak existuje inverzné zobrazenie $T^{-1}\colon X \to X$, môžeme definovať aj záporné iterácie: T^{-1}, $T^{-2} := (T^{-1})^2 = T^{-1} \circ T^{-1} = (T^2)^{-1}, \ldots$. V takom prípade sa dá pre bod x_0 definovať aj jeho tzv. *dozadná (spätná) trajektória* $x_0, x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ kde $x_{-n} = T^{-n}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, prípadne tzv. *úplná trajektória* bodu x_0, čo je dvojnekonečná postupnosť

$$\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots .$$

Analogicky sa definuje *dozadná (spätná) orbita* a *úplná orbita*. Vidíme, že ak sa v teórii dynamických systémov hovorí o trajektórii či orbite, treba si ujasniť, čo sa pod tým myslí; pozri Obrázky 1.3 a 1.4.

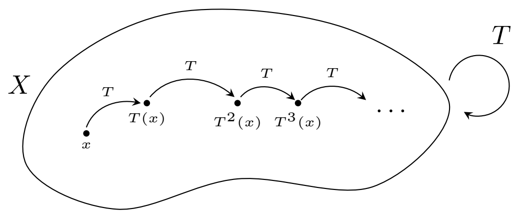
Dohoda. V tomto texte, pokiaľ nepovieme inak, pod trajektóriou a orbitou máme na mysli ich dopredné varianty (dokonca aj vtedy keď T je invertovateľné).

Pri skúmaní dynamického systému nás zaujíma správanie sa trajektórií.

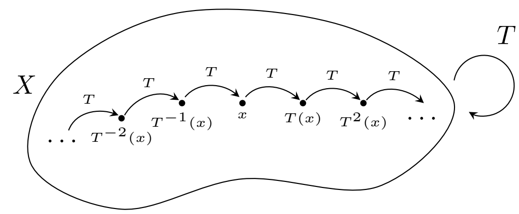
Bod $x \in X$ sa nazýva *periodický bod* zobrazenia T, ak $T^p(x) = x$ pre nejaké $p \geq 1$.[6] Najmenšie také p sa nazýva *perióda* bodu x. Ak x je periodický bod s periódou $p = 1$, teda ak $T(x) = x$, bod x sa nazýva aj *pevný bod* zobrazenia T, pozri Obrázok 1.5. Ak x je periodický s periódou

[5] Stručne: začneme v bode $[x_0, 0]$ na osi x a potom ideme zvisle na graf, vodorovne na diagonálu, zvisle na graf, vodorovne na diagonálu, atď do nekonečna. Čísla z našej postupnosti sú priesečníky osi x s priamkami, na ktorých ležia zvislé úseky našej cesty.

[6] $T^0(x) = x$ platí pre každý bod x.

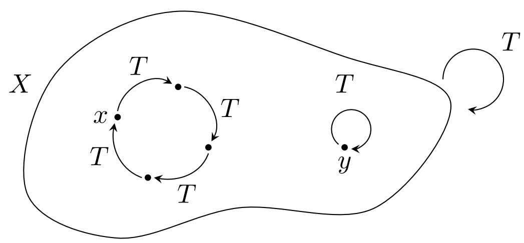


Obr. 1.3: (Dopredná) trajektória zobrazenia T

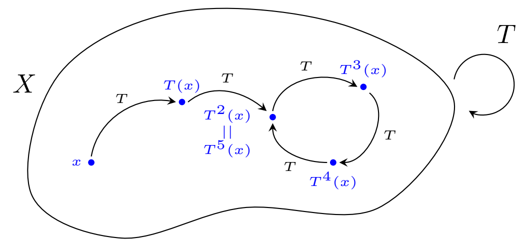


Obr. 1.4: Úplná trajektória invertovateľného zobr. T

p, tak body $x, T(x), \dots, T^{p-1}(x)$ sú navzájom rôzne (prečo?). Všimnite si, že v takom prípade je trajektória bodu x periodická postupnosť s periódou p (lebo zrejme $T^{p+1}(x) = T(x), T^{p+2}(x) = T^2(x), \dots, T^{2p}(x) = T^p(x) = x, \dots$) a orbita bodu x je konečná množina $\{x, T(x), \dots, T^{p-1}(x)\}$. Nazývame ju *periodická orbita s periódou* p alebo tiež p-*cyklus*.



Obr. 1.5: Periodický bod x s periódou 4 a pevný bod y



Obr. 1.6: Eventuálne periodický bod (s periódou 3), ktorý nie je periodický

Ak $T^m(x) = x$, bod x sa niekedy nazýva m-*periodický*. To ešte neznamená, že jeho periódou je m, lebo môže existovať menšie n s vlastnosťou $T^n(x) = x$. Pozrite dôležité Cvičenie 1.2.

Aj bod, ktorý nie je periodický, môže mať konečnú orbitu. Povieme, že bod x je *eventuálne periodický* (s periódou p) ak pre nejaké $m \geq 0$ je $T^m(x)$ periodický bod (s periódou p). Periodický bod je eventuálne periodický, ale obrátene to neplatí, viď Obrázok 1.6. Pozrite tiež Cvičenie 1.3.

Dynamický systém je množina X so zobrazením $T: X \to X$. Môže sa stať, že v dynamickom systéme máme k dispozícii aj dodatočnú štruktúru. Uvedieme dva dôležité prípady:

- Ak navyše X je metrický (alebo všeobecnejšie topologický) priestor a T je spojité, tak (X, T) niekedy presnejšie nazývame *topologický dynamický systém*. Takéto systémy sa skúmajú v tej časti teórie dynamických systémov,ktorá sa nazýva *topologická dynamika*. Niekedy sa upúšťa od predpokladu spojitosti a pripúšťa sa napr. konečne alebo spočítateľne veľa bodov nespojitosti, prípadne sa predpokladá nejaká slabšia forma spojitosti ako napr. kvázispojitosť apod. Avšak predpoklad, že X nie je len množina, ale je to (topologickký) priestor, je pre topologickú dynamiku podstatný.

- Ak $\mathcal{B}$ je nejaká σ-algebra podmnožín množiny X a μ je taká miera definovaná na $\mathcal{B}$, že pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ je $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ (hovoríme, že μ je *invariantná miera* pre T alebo že T zachováva mieru μ), tak $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ sa nazýva *mierovo-teoretický dynamický systém* alebo *dynamický systém zachovávajúci mieru*. Práve takéto systémy sú objektom skúmania *ergodickej teórie*. Všimnime si, že $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je to, čomu sa v teórii miery hovorí priestor s mierou. Vždy, keď budeme hovoriť o systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, budeme predpokladať, že $\mu(X) \neq 0$.

Samozrejme, môže sa stať, že v mierovo-teoretickom dynamickom systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je X aj metrickým priestorom a zobrazenie $T\colon X \to X$ je aj spojité, teda ide zároveň o mieru zachovávajúci aj o topologický dynamický systém.

Orbity môžu byť veľmi rozdielne. V prípade, že X je metrický priestor, sú v istom zmysle dva extrémne prípady:

- orbita bodu x je periodická alebo aspoň eventuálne periodická (t.j. konečná);
- orbita bodu x je hustá, teda pretína každú neprázdnu otvorenú množinu v priestore X (potom tá orbita ja automaticky nekonečná, ale nekonečná orbita nemusí byť hustá – vysvetlite).

Samozrejme, vo všeobecnosti je viac možností.

Ako sme už naznačili vyššie, v dynamickom systéme (X, T) pre bod $x \in X$ interpretujeme $T^n(x)$ ako bod, kam sa bod x dostal za čas n. Ak $U \subseteq X$ a $T^n(x) \in U$ pre nejaké n, povieme, že bod x *navštívil* množinu U (v čase n). Prípadne povieme, že trajektória bodu x navštívila množinu U (všimnime si, že toto nastáva práve vtedy, keď orbita bodu x pretne U). Pripúšťame tu aj $n = 0$, teda ak bod $x \in U$, tak x navštívi U aspoň v čase 0.[7] Pomocou tejto terminológie môžeme skutočnosť, že orbita bodu x je hustá, povedať aj tak, že bod x navštívi každú neprázdnu otvorenú množinu v X.

Ak v dynamickom systéme zvolíme bod $x \in X$ a množinu $A \subseteq X$, môžeme sa pýtať, či bod x navštívi množinu A, prípadne dokonca ako často ju navštevuje.

1.2 Frekvencia návštev bodu x do množiny A a pojem ergodičnosti

Majme dynamický systém (X, T), množinu $A \subseteq X$ a bod $x \in X$. Zaujíma nás *frekvencia návštev bodu x do množiny A*, teda limita (ak existuje)

$$\mathrm{frekv}_A(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \colon T^k(x) \in A\}}{n} \,. \tag{1.4}$$

Zlomok za znakom limity má v čitateli číslo udávajúce, *koľko* spomedzi bodov $x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)$ leží v A, a teda celý zlomok je číslo (z intervalu $[0, 1]$), ktoré udáva *podiel* tých bodov spomedzi prvých n bodov trajektórie bodu x, ktoré ležia v A. Formulu pre frekvenciu návštev možno elegantne prepísať pomocou charakteristickej funkcie množiny A:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{ak } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Naaozaj, $T^k(x)$ patrí, resp. nepatrí do A práve vtedy, keď $\chi_A(T^k(x))$ sa rovná 1, resp. 0. Potom

$$\#\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \colon T^k(x) \in A\} = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k(x)),$$

a teda pre frekvenciu, s akou bod x navštevuje množinu A máme

$$\mathrm{frekv}_A(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k(x)). \tag{1.5}$$

[7] U invertovateľných systémov pripúšťame aj záporné časy, bod mohol navštíviť množinu aj v "minulosti".

V ergodickej teórii, kde pracujeme s mieru zachovávajúcim dynamickým systémom $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, sa obmedzujeme len na množiny $A \in \mathcal{B}$ (teda tzv. merateľné množiny, čiže množiny, pre ktoré existuje miera $\mu(A)$). Zaujíma nás odpoveď na otázku: Je pravda, že pre frekvenciu návštev bodu $x \in X$ do množiny A platí

$$\mathrm{frekv}_A(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \quad ? \tag{1.6}$$

(Predpokladajme že $\mu(X) < \infty$, aby bolo vpravo dobre definované číslo.) To je celkom prirodzená otázka, lebo:

- Ak pre bod x platí (1.6), znamená to, že x navštevuje danú množinu A so "správnou" frekvenciou, zodpovedajúcou miere množiny A. Ak napr. $\mu(A) = (1/2)\mu(X)$, navštevuje množinu A s frekvenciou $0,5$ (50% času strávi v A) a ak $\mu(A) = (1/100)\mu(X)$, navštevuje množinu A s frekvenciou $0,01$ (len jedno percento času strávi v A).[8]

Nasledujúca terminológia je neštandardná.

Definícia 1.2. Ak pre bod $x \in X$ platí (1.6), budeme hovoriť, že x je *férový bod pre množinu* A. Ak sa stane, že bod x je férový pre každú merateľnú množinu A, budeme hovoriť, že je to *férový bod.*

Teda bod x je férový pre množinu A, ak túto množinu navštevuje so správnou frekvenciou. Bod x je férový, ak sa pohybuje absolútne spravodlivo, férovo, žiadnu merateľnú množinu neuprednostňuje, každú jednu z nich navštevuje so správnou frekvenciou.

Napodiv existujú systémy, v ktorých každý bod je férový.

Príklad 1.3. Nech $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B} = 2^X$, μ je miera definovaná na $\mathcal{B}$, pre ktorú $\mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = 1/3$. Nech $T(1) = 2$, $T(2) = 3$, $T(3) = 1$. Potom zrejme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém a pre každý bod $x \in X$ a každú množinu $A \in \mathcal{B}$ platí (1.6) (vysvetlite), teda v tomto systéme je každý bod férový.

To, aby bol každý bod férový, je veľmi zriedkavá situácia, pretože v dôležitých prípadoch mieru zachovávajúcich systémov bývajú splnené predpoklady nasledujúcej propozície.

Propozícia 1.4. *Predpokladajme, že v mieru zachovávajúcom systéme* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *je* $0 < \mu(X) < \infty$ *a každá jednobodová množina je merateľná (t.j. patrí do* $\mathcal{B}$*) a má nulovú mieru. Potom neexistuje ani jeden férový bod* $x \in X$.

Dôkaz. Predpokladajme, že existuje férový bod $x \in X$. Potom (1.6) platí pre úplne každú množinu $A \in \mathcal{B}$. Zvoľme $A = \mathrm{Orb}_T(x) = \{x, T(x), T^2(x), \dots\}$. Z predpokladov vyplýva, že $A \in \mathcal{B}$ a $\mu(A) = 0$ (prečo?). Je zrejmé, že bod x navštevuje množinu A s frekvenciou 1. Lenže podľa predpokladu ju navštevuje s frekvenciou $\mu(A)/\mu(X)$. Odtiaľ $\mu(A) = \mu(X)$. To je spor, lebo $\mu(A) = 0$ a $\mu(X) > 0$. $\square$

Pre mieru zachovávajúci dynamický systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, $0 < \mu(X) < \infty$, môžu nastať nasledujúce možnosti:

(1) Len pre máloktorý bod $x \in X$ a máloktorú množinu $A \in \mathcal{B}$ platí, že x je férový pre množinu A. (Všimnite si však, že každý bod je férový prinajmenšom pre $A = \emptyset$ a $A = X$.)

[8] Terminologická poznámka: Ak platí (1.6), v angličtine sa niekedy hovorí, že "trajectory of x equidistributes in A".

(2) Môže nastat' druhý extrém, že totiž každý bod $x \in X$ je férový (teda férový pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$). Teda úplne všetky body sa pohybujú absolútne "férovo". Ako ukazuje Príklad 1.3, to sa naozaj môže stat', ale ako naznačuje Propozícia 1.4, takéto systémy sú mimoriadne zriedkavé. Preto takéto systémy nemôžu byt' jadrom záujmu ergodickej teórie.

(3) Konečne, môže nastat' zaujímavý prípad medzi (1) a (2), ktorý je vel'mi blízky ku (2). Totiž môže sa stat', že pre každú meratel'nú množinu A platí, že μ-skoro každý bod $x \in X$ je férový pre A:

$$(\forall A \in \mathcal{B})(\text{pre } \mu\text{-skoro každý bod } x \in X)(x \text{ je férový pre } A). \tag{ERG}$$

Takéto systémy, v ktorých každá množina $A \in \mathcal{B}$ je skoro všetkými bodmi navštevovaná so "správnou" frekvenciou (1.6), sa nazývajú *ergodické*. Ergodičnost' teda definujeme podmienkou (ERG). V ergodickom systéme nemusí (hoci výnimočne môže ako napr. v (2)) existovat' jedna *univerzálna* množina plnej miery tak, že každý bod z tejto množiny navštevuje každú množinu $A \in \mathcal{B}$ so "správnou" frekvenciou. Ako sme už povedali, pod ergodičnost'ou sa myslí niečo menej, totiž, že pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ existuje *svoja* (t.j. závislá od A) množina X_A plnej miery tak, že každý bod $x \in X_A$ navštevuje tú jednu množinu A so "správnou" frekvenciou ako v (1.6). Poznamenajme, že existujú aj iné, *ekvivalentné* definície ergodičnosti a tak ako v drvivej väčšine kníh o ergodickej teórii, aj my budeme neskôr definovat' ergodičnost' inak (jednoduchšie) a až neskôr, v súvislosti s Birkhoffovou ergodickou vetou, ukážeme ekvivalentnost' týchto definícií (na priestoroch s konečnou mierou). Skutočnost', že existujú jednoduchšie ekvivalentné definície ergodičnosti je dobrá správa, lebo priame overovanie podmienky (ERG) by bolo vel'mi t'ažké.

Ukazuje sa, že existuje nemálo ergodických systémov $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$. Ergodické systémy predstavujú hlavný objekt záujmu v *ergodickej teórii*.

1.3 Fyzikálna motivácia ergodickej teórie

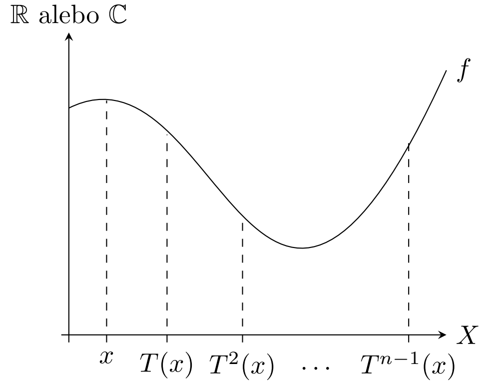
Všimnime si, že (1.6) možno prepísat' takto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \chi_A \, d\mu \ . \tag{1.7}$$

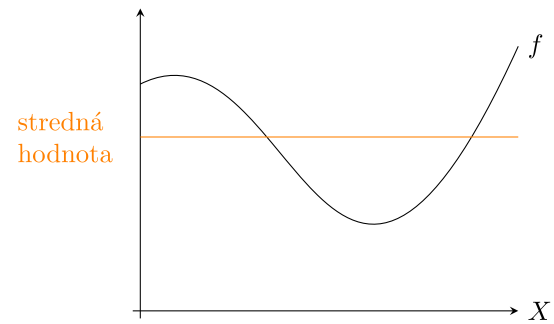
Je prirodzené chciet' nahradit' charakteristickú funkciu inou (integrovatel'nou) funkciou $f\colon X \to \mathbb{R}$ (alebo dokonca $f\colon X \to \mathbb{C}$) a pýtat' sa, kedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu \ . \tag{TASA}$$

Veličina na l'avej strane je tzv. *časový priemer funkcie* f pozdĺž trajektórie bodu x, vpravo je *priestorový priemer funkcie* f, alebo tzv. stredná hodnota funkcie f tak, ako je obvykle definovaná v integrálnom počte.[9] Podmienku sme nazvali TASA, podľa anglických výrazov *time average* = časový priemer, *space average* = priestorový priemer.



Obr. 1.7: Časový priemer



Obr. 1.8: Priestorový priemer

Historicky viedla cesta k ergodickej teórii cez štatistickú fyziku, v ktorej sa prirodzene objavuje podmienka (TASA). Naozaj, nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ predstavuje nejaký fyzikálny systém, teda:

- X je množina všetkých možných stavov daného fyzikálneho systému,
- $T\colon X \to X$ je zákon časového vývoja (ak $x \in X$ je stav fyzikálneho systému v nejakom čase, tak $T(x)$ je jeho stav v nasledujúcom čase, v čase o jednotku väčšom),
- $\mathcal{B}$ je nejaká σ-algebra na X,
- μ je nejaká fyzikálne zmysluplná miera definovaná na X,
- miera μ je invariantná pre T.

Majme ďalej

- funkciu $f\colon X \to \mathbb{R}$ (alebo $f\colon X \to \mathbb{C}$), lebesguovsky integrovateľnú vzhľadom na μ.

Ak je fyzikálny systém v stave $z \in X$, je $f(z)$ hodnota funkcie f v tomto stave. Ak je možné hodnoty funkcie f fyzikálne približne zmerať, tak sa funkcia f označuje aj jedným slovom *pozorovateľná*, angl. *observable* (prídavné meno je tu použité vo funkcii podstatného mena).[10]

Fyzikov zaujíma stredná hodnota pozorovateľnej f cez všetky možné stavy systému, t.j. veličina na pravej strane (TASA). Tá sa však často fyzikálne nedá zmerať, napr. typicky je to tak v štatistickej fyzike. Naproti tomu časový priemer funkcie f pozdĺž trajektórie bodu x, teda veličinu na ľavej strane (TASA), možno pomocou meraní niekedy dosť dobre odhadnúť. Ak totiž meraním postupne zisťujeme hodnoty

- $f(x)$ (= hodnota pozorovateľnej v čase $k = 0$, teda v čase kedy spustíme experiment, pričom príslušný stav systému sme označili x), potom

[9] Spomeňte si, že už v kalkule ste definovali strednú hodnotu integrovateľnej funkcie f na intervala $[a, b]$ ako $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

[10] Vo fyzike, *pozorovateľná (observable)* je fyzikálna veličina, ktorá sa dá merať, napr. poloha, rýchlosť, teplota apod.

- $f(T(x))$ (= hodnota pozorovateľnej v nasledujúcom čase $k = 1$, kedy je systém v stave $T(x)$),
- $f(T^2(x))$ (= hodnota pozorovateľnej v čase $k = 2$),

  ...,
- $f(T^{n-1}(x))$

  ...

a postupne pre stále väčšie a väčšie n počítame aritmetický priemer $(1/n)\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$, môže sa stať, že sa tieto priemery stabilizujú, blížia k nejakej hodnote. Takto môžeme usúdiť, že pre dané x limita na ľavej strane (TASA) existuje a odhadnúť jej hodnotu. Ak by sme vedeli, že rovnosť (TASA) pre *nami zvolené* x (pre náš počiatočný stav) platí, získali by sme tak odhad strednej hodnoty pozorovateľnej. Ak by sme vedeli, že rovnosť (TASA) platí aspoň pre *typické* x (tým sa myslí pre μ-skoro každé x, teda pre skoro každý počiatočný stav $x \in X$), mohli by sme sa spoľahnúť na to, že náš počiatočný stav x patril medzi tieto typické počiatočné stavy a teda sme naozaj odhadli strednú hodnotu pozorovateľnej.

Najmä v štatistickej fyzike je teda dôležitá otázka, či v danom fyzikálnom mieru zachovávajúcom systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ platí pre pozorovateľné f rovnosť (TASA) pre μ-skoro každý počiatočný stav $x \in X$, teda s "pravdepodobnosťou" 1.

Tzv. *Boltzmannova ergodická hypotéza*[11] vo fyzike hovorí práve to, že ak X je množina všetkých možných stavov systému a $f : X \to \mathbb{R}$ je pozorovateľná, tak pre skoro každý východzí stav $x \in X$ platí (TASA), t.j. časové priemery ľubovoľnej konečnej série pozorovaní veličiny f konvergujú (pre čas idúci do nekonečna) k priestorovému priemeru veličiny f. Ukázalo sa, že Boltzmannova ergodická hypotéza tak ako bola Boltzmannom sformulovaná, neplatí bez dodatočných predpokladov o systéme. Hľadanie podmienok, za ktorých pre typické $x \in X$ sa časový priemer pozorovateľnej naozaj rovná jej priestorovému priemeru, viedlo ku vzniku ergodickej teórie.

Najdôležitejšou vetou ergodickej teórie je tzv. *Birkhoffova ergodická veta*[12], ktorá hovorí, že práve ergodičnosť je postačujúcou (a ako sa ukáže, aj nutnou) podmienkou pre to, aby v systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ pre každú lebesguovsky μ-integrovateľnú funkciu $f : X \to \mathbb{R}$ platila rovnosť (TASA) pre μ-skoro každý bod $x \in X$ (za predpokladu, že μ je konečná).

Pripomeňme, že naša definícia ergodičnosti (pomocou frekvencie návštev) je ekvivalentná so štandardnou, ktorú sa budeme učiť neskôr. Ak zhrnieme, čo sme povedali, dostávame, že nasledujúce tvrdenia pre mieru zachovávajúci dynamický systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ s konečnou mierou sú ekvivalentné:

(1) systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je ergodický (v zmysle tej jednoduchšej definície, ktorú sme si sľúbili uviesť neskôr),

(2) platí podmienka (ERG), teda pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ platí, že μ-skoro každý bod $x \in X$ navštevuje množinu A so "správnou" frekvenciou,

(3) pre každú lebesguovsky μ-integrovateľnú funkciu $f : X \to \mathbb{R}$ platí (TASA) pre μ-skoro každé $x \in X$.

[11] Ludwig Boltzmann (1844 – 1906) bol rakúsky fyzik, zakladateľ štatistickej fyziky. Pôsobil najmä vo Viedni. Slovo ergodický pochádza z gréckych slov *ergon* = práca, energia a *odos* = cesta.

[12] George David Birkhoff (1884 – 1944) bol americký matematik, profesor na Harvardovej univerzite, otec matematika Garretta Birkhoffa.

Jedným z hlavných cieľov tohto kurzu bude ukázať ekvivalentnosť rôznych definícií ergodičnosti a porozumieť Birkhoffovej ergodickej vete a jej aplikáciám. Poznamenajme, že ergodická teória sa dnes používa nielen vo fyzike, ale má predovšetkým početné aplikácie v rôznych oblastiach matematiky.

Štúdium ergodickej teórie začneme rovnomerne rozdelenými postupnosťami reálnych čísel.

1.4 Cvičenia a projekty

Cvičenie 1.1. Nech $T\colon [0,1) \to [0,1)$ je zobrazenie definované vzťahom $T(x) = 2x \bmod 1$ (tzv. *doubling map*).

(1) Nakreslite graf funkcie T.

(2) Ukážte, že bod $2/5$ je periodický a určte jeho periódu.

(3) Nájdite racionálne číslo, ktoré nie je periodickým bodom.

(4) Ukážte, že každé racionálne číslo x je eventuálne periodický bod.

Cvičenie 1.2. Ak v dynamickom systéme bod x je 8-periodický, teda $T^8(x) = x$, tak perióda bodu x je $8, 4, 2$ alebo 1. Všeobecne, ak x je m-periodický, tak perióda bodu x delí m. Dokážte.

Cvičenie 1.3. Ukážte, že v každom dynamickom systéme sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

(1) x je eventuálne periodický,

(2) orbita bodu x je konečná,

(3) $T^m(x) = T^n(x)$ pe nejaké $0 \le m < n$.

Cvičenie 1.4. Nech T je zobrazenie z Cvičenia 1.1 a nech $x \in [0,1)$. Dokážte, že

$$x \text{ je periodický} \Longrightarrow x \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow x \text{ je eventuálne periodický}.$$

Cvičenie 1.5. Nech v dynamickom systéme (X, T) je bod x periodický s periódou p. Nech $B \subseteq X$. Určte frekvenciu návštev bodu x do množiny B (pozor, odpoveď závisí od voľby B).

Projekt 1.6. Naštudujte si podrobnejšie o Boltzmannovej ergodickej hypotéze a vzniku ergodickej teórie a napíšte lepšiu verziu Sekcie 1.3. Rozsah max. 5 strán.

Kapitola 2

Rovnomerne rozdelené postupnosti

2.1 Frekvencia návštev postupnosti bodov do množiny

Keď pracujeme s dynamickým systémom (X, T), zaujíma nás rozmiestnenie bodov trajektórie $x, T(x), T^2(x), \dots$ v množine X. Napr. v Sekcii 1.2 sme skúmali frekvenciu $\operatorname{frekv}_A(x)$, s akou v mieru zachovávajúcom dynamickom systéme $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ bod $x \in X$ navštevuje množinu $A \in \mathcal{B}$. Zaujímalo nás najmä, kedy išlo o "správnu" frekvenciu $\mu(A)/\mu(X)$.

"Frekvenčnú" terminológiu môžeme zovšeobecniť.

Po prvé, $\operatorname{frekv}_A(x)$ je definovaná tak, že si všímame, ktoré body trajektórie bodu x ležia v A. Namiesto trajektórií v dynamickom systéme možno skúmať ľubovoľné postupnosti bodov v ľubovoľnej množine.[1] Ak $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť bodov v množine X, môžeme hovoriť o *frekvencii, s akou táto postupnosť navštevuje množinu $A \subseteq X$*. Túto frekvenciu budeme označovať $\operatorname{frekv}_A((x_n)_{n=1}^{\infty})$ alebo stručnejšie, hoci menej presne, $\operatorname{frekv}_A(x_n)$, $\operatorname{frekv}_A(x_k)$ apod.[2] Prirodzená definícia, aj s ohľadom na (1.5), je:

$$\operatorname{frekv}_A(x_n) := \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in A\}}{N} . \tag{2.1}$$

Po druhé, limita v definícii frekvencie nemusí existovať, preto je niekedy užitočné skúmať *dolnú, resp. hornú frekvenciu, s akou postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ navštevuje množinu $A \subseteq X$*:

$$\begin{aligned} \operatorname{frekv}_A^-(x_n) &:= \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in A\}, \\ \operatorname{frekv}_A^+(x_n) &:= \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in A\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pomocou frekvenčnej terminológie možno zaviesť pojem rovnomerne rozdelenej postupnosti ako takej postupnosti, ktorá navštevuje vybrané podmnožiny X so "správnymi" frekvenciami. Tu však nemožno očakávať príliš veľa. Nie je napr. možné, aby nejaká postupnosť reálnych čísel ležiaca v intervale $[A, B]$ navštevovala všetky lebesguovsky merateľné podmnožiny intervalu $[A, B]$ so "správnymi" frekvenciami zodpovedajúcimi ich mieram. To ľahko vyplýva z podobných úvah ako sme použili v dôkaze Propozície 1.4. Problém je v tom, že lebesguovsky merateľných podmnožín intervalu $[A, B]$ je príliš veľa. Možno však postupovať nasledovne.

[1] Postupnosť $0, 1, 0, 0, \dots$ nie je trajektóriou, lebo by sme zároveň mali $T(0) = 1$ aj $T(0) = 0$.

[2] Dúfame, že nejaké veľké nedorozumenie asi nehrozí, snáď aj preto, že $\operatorname{frekv}_A((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \operatorname{frekv}_A((x_n)_{n=2}^{\infty}) = \operatorname{frekv}_A((x_n)_{n=3}^{\infty}) = \dots$.

Predpokladajme, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov v množine X (pričom tu nemusíme mať definované žiadne zobrazenie T). Ďalej predpokladajme, že máme zvolený nejaký súbor "pekných" podmnožín množiny X, u ktorých vieme merať ich "objem". Ak A je taká množina, nech $\operatorname{vol}(A)$ je jej objem. Predpokladajme tiež, že medzi také množiny patrí aj X a že $0 < \operatorname{vol}(X) < \infty$. V takom prípade môže byť zmysluplné prehlásiť postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ za *rovnomerne rozdelenú,*[3] ak navštevuje každú "peknú" množinu A so "správnou" frekvenciou $\operatorname{vol}(A)/\operatorname{vol}(X)$.

V nasledujúcej sekcii budeme takúto terminológiu rovnomernej rozdelenosti používať pre postupnosti reálnych čísel ležiace v intervale $[A, B]$, pričom za "pekné" množiny budeme považovať (uzavreté) podintervaly intervalu $[A, B]$ a pod ich "objemom" budeme rozumieť ich dĺžku.

2.2 Rovnomerne rozdelené postupnosti a Jordanova miera

V tejto časti sa obmedzíme na ohraničené postupnosti reálnych čísel. Ak tu hovoríme o intervale $[A, B]$, predpokladáme, že $A < B$.

Definícia 2.1. Nech postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ reálnych čísel leží v intervale $[A, B]$. Povieme, že je *rovnomerne rozdelená* v intervale $[A, B]$, ak každý podinterval $[a, b]$ intervalu $[A, B]$ navštevuje so "správnou" frekvenciou zodpovedajúcou jeho dĺžke, teda

$$\boxed{\operatorname{frekv}_{[a,b]}(x_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : x_n \in [a, b]\}}{N} = \frac{b-a}{B-A}.} \tag{2.3}$$

Ak nemôže dôjsť k nedorozumeniu, budeme krátko vravieť, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r.

Pre $[a, b] = [A, B]$ triviálne dostávame správnu rovnosť $1 = 1$. Požaduje sa tu však rovnosť pre každý podinterval. Napr. ak $[a, b]$ zaberá tretinu intervalu $[A, B]$, požaduje sa, aby ho postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ navštevovala s frekvenciou $1/3$.

Príklad 2.2. Postupnosť

$$\underbrace{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1}, \underbrace{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1}, \dots$$

leží v intervale $[0, 1]$, ale nie je v ňom r.r. Naozaj, táto postupnosť vôbec nenavštívi interval $[1/100, 2/100]$. Keby bola r.r., musela by ho navštevovať s frekvenciou $(2/100 - 1/100)/(1 - 0) = 1/100$.

Príklad 2.3. Nech $r_1, r_2, \dots$ je postupnosť ležiaca v intervale $[0, 1]$ a $s_1, s_2, \dots$ je postupnosť ležiaca v intervale $[1, 2]$. Potom postupnosť

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \underbrace{r_1, r_2}, s_1, \underbrace{r_3, r_4}, s_2, \underbrace{r_5, r_6}, s_3, \dots$$

(vždy za dvomi členmi z prvej postupnosti nasleduje jeden člen druhej postupnosti) leží v intervale $[0, 2]$, ale nie je v ňom r.r., pretože "uprednostňuje" ľavú polovicu intervalu. Naozaj, každé

[3] žiadalo by sa dodať, že vzhľadom na zvolený súbor "pekných" množín a zvolený pojem "objemu"

r_i patrí do $[0,1]$ a ešte možno aj niektoré s_j patria do $[0,1]$ (ak $s_j = 1$). Preto postupnosť $\frac{1}{N}\#\{n \in \{1,2,\dots,N\}\colon x_n \in [0,1]\}$, $N = 1,2,\dots$ vyzerá takto:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{\geq 2}{3}, \frac{\geq 3}{4}, \frac{\geq 4}{5}, \frac{\geq 4}{6}, \frac{\geq 5}{7}, \frac{\geq 6}{8}, \frac{\geq 6}{9}, \dots.$$

Odtiaľ

$$\operatorname{frekv}_{[0,1]}(x_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in \{1,2,\dots,N\}\colon x_n \in [0,1]\}}{N} \geq \frac{2}{3},$$

pričom v prípade rovnomernej rozdelenosti by sa táto frekvencia musela rovnať $1/2$.

Na prvý pohľad ani nie je jasné, či rovnomerne rozdelené postupnosti vôbec existujú. Skonštruujeme teraz takú postupnosť.

Príklad 2.4. Zoraďme diadické racionálne čísla z intervalu $[0,1]$ do postupnosti

$$(x_n)_{n=1}^\infty = \underbrace{0,1}, \underbrace{0, \frac{1}{2}, 1}, \underbrace{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1}, \underbrace{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1}, \dots\ .$$

Táto postupnosť je r.r. v intervale $[0,1]$. Naozaj, ... **DOKONČIŤ**

V definícii rovnomernej rozdelenosti sme namiesto uzavretých intervalov $[a,b]$ mohli uvažovať polouzavreté intervaly $[a,b)$.

Propozícia 2.5 (R.r. postupností pomocou polouzavretých intervalov). *Nech postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ reálnych čísel leží v intervale $[A,B]$. Potom je r.r. v intervale $[A,B]$ vtedy a len vtedy, keď každý* polouzavretý *podinterval $[a,b)$ intervalu $[A,B]$ navštevuje so "správnou" frekvenciou zodpovedajúcou jeho dĺžke, teda*

$$\boxed{\operatorname{frekv}_{[a,b)}(x_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in \{1,2,\dots,N\}\colon x_n \in [a,b)\}}{N} = \frac{b-a}{B-A}.} \tag{2.4}$$

Dôkaz. **DOKONČIŤ**

□

Propozícia ukazuje, že hoci v našej definícii rovnomernej rozdelenosti postupnosti vystupujú uzavreté podintervaly, možno ich nahradiť polouzavretými podintervalmi. Teda ak postupnosť navštevuje so správnymi frekvenciami uzavreté podintervaly, tak navštevuje so správnymi frekvenciami aj poolouzavreté podintervaly. Napadá nás, že možno navštevuje so správnymi frekvenciami aj iné podmnožiny. Naozaj je to tak. Nebudeme to teraz dokazovať, ale aspoň uvedieme príslušné tvrdenie. Začneme pripomenutím niektorých faktov o Jordanovej miere v $\mathbb{R}$.

Jordanovu mieru množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ budeme označovať $\mathrm{Jord}(M)$. Jordanova miera intervalu je jeho dĺžka. Jordanova miera, napriek svojmu menu, nespĺňa obvyklú definíciu miery. Je to síce nezáporná σ-aditívna množinová funkcia, ale je definovaná len na *algebre* tzv. jordanovsky merateľných množín. Tieto množiny netvoria σ-algebru, ako sa pre mieru obvykle požaduje. Preto niektorí autori hovoria Jordanov objem a nie Jordanova miera.

Ak je množina jordanovsky merateľná, tak je aj lebesguovsky merateľná, a to s tou istou mierou. Existujú lebesguovsky merateľné množiny, ktoré nie sú jordanovsky merateľné, napr. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Pre podmnožinu $M \subseteq [A, B]$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

(1) množina M je jordanovsky merateľná,

(2) hranica množiny M má Jordanovu mieru nula,

(3) hranica množiny M má vonkajšiu Jordanovu mieru nula,

(4) hranica množiny M má Lebesguovu mieru nula (Lebesguovu mieru budeme označovať λ),

(5) charakteristická funkcia χ_M je riemannovsky integrovateľná na $[A, B]$.

(Pre podmienky (2), (3) pozrite [SS99, Veta V.34, str. 175]. Keďže tá hranica je kompaktná množina v $\mathbb{R}$, má nulovú Jordanovu mieru vtedy a len vtedy, keď má nulovú Lebesguovu mieru [SS99, Veta V.49(7), str. 185], odtiaľ podmienka (4). Pre podmienku (5) pozrite [SS99, Veta V.46, str. 183].)

Porovnajme borelovské množiny a jordanovsky merateľné množiny. Predovšetkým, existujú borelovské množiny, ktoré nie sú jordanovsky merateľné, napr. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Existujú však aj jordanovsky merateľné množiny, ktoré nie sú borelovské (lebo vďaka ekvivalencii (1)$\Leftrightarrow$(4) je každá spomedzi 2^c podmnožín stredno-tretinovej Cantorovej množiny jordanovsky merateľná, ale všetkých borelovských množín je menej, len c).

Uvedieme sľúbenú vetu ukazujúcu súvis rovnomernej rozdelenosti so Jordanovou mierou. Kvôli úplnosti do nej zahrnieme aj Propozíciu 2.5.

Veta 2.6 (R.r. postupností a Jordanova miera). *Nech postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ reálnych čísel leží v intervale $[A, B]$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(1) Postupnosť je rovnomerne rozdelená v intervale $[A, B]$, teda navštevuje každý uzavretý podinterval $[a, b]$ intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{b-a}{B-A} = \frac{\mathrm{Jord}([a,b])}{\mathrm{Jord}([A,B])}$.

(2) Postupnosť navštevuje každý polouzavretý podinterval $[a, b)$ intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{b-a}{B-A} = \frac{\mathrm{Jord}([a,b))}{\mathrm{Jord}([A,B])}$.

(3) Postupnosť navštevuje každú jordanovsky merateľnú podmnožinu M intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{\mathrm{Jord}(M)}{\mathrm{Jord}([A,B])}$.

(4) Postupnosť navštevuje každú borelovskú jordanovsky merateľnú podmnožinu M intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{\mathrm{Jord}(M)}{\mathrm{Jord}([A,B])}$.

Vetu nebudeme dokazovať. Ekvivalenciu (1)$\Leftrightarrow$(2) vieme už z Propozície 2.5. Implikácia (2)$\Rightarrow$(3) si vyžaduje dosť práce. Implikácie (3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(1) sú triviálne.

Veta 2.6 ukazuje, že rovnomerná rozdelenosť postupností súvisí so Jordanovou mierou. Samozrejme, ak v tej vete hovoríme o jordanovsky merateľnej množine M a píšeme $\mathrm{Jord}(M)$, mohli by sme namiesto toho písať $\mathrm{Leb}(M)$, lebo ak je množina M jordanovsky merateľná, tak je aj lebesguovsky merateľná a $\mathrm{Leb}(M) = \mathrm{Jord}(M)$. To je však veľmi nepriamy 'súvis' rovnomernej rozdelenosti postupností s Lebesguovou mierou. Ak porovnáme Vetu 2.6 s nasledujúcou propozíciou, vidíme, že rovnomerná rozdelenosť postupností naozaj súvisí 'iba' so Jordanovou mierou a nie s Lebesguovou mierou.

Propozícia 2.7. *Neexistuje postupnosť v intervale $[A, B]$, ktorá by navštevovala každú borelovskú (teda ani každú lebesguovsky merateľnú) podmnožinu M intervalu $[A, B]$ s frekvenciou $\frac{\mathrm{Leb}(M)}{\mathrm{Leb}([A,B])}$.*

Dôkaz. Pripusťme, že taká postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ existuje. Spočítateľná množina $M = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ je borelovská, lebesguovsky merateľná a $\mathrm{Leb}(M) = 0$. Daná postupnosť ju však navštevuje s frekvenciou 1. To je spor. $\square$

2.3 Rovnomerne rozdelené postupnosti a Riemannov integrál

V Sekcii 1.2 sme frekvenciu návštev (trajektórie) bodu x do množiny A prepísali pomocou charakteristickej funkcie. Analogicky možno prepísať limity vo vzťahoch (2.3) a (2.4). Ak ešte uvážime, že na intervale $[A, B]$ sa aj Riemannov integrál funkcie $\chi_{[a,b]}$, aj Riemannov integrál funkcie $\chi_{[a,b)}$ rovnajú $b - a$,[4] vidíme, že vzťah (2.3) možno ekvivalentne zapísať v tvare

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(x_n) = \frac{1}{B-A} \int_A^B \chi_{[a,b]}(x)\, dx. \tag{2.5}$$

[4]Samozrejme, tu sa Riemannov integrál zhoduje s Lebesguovým integrálom príslušnej charakteristickej funkcie na $[A, B]$ (podľa Lebesguovej miery), ale o chvíľu uvidíme, že teória rovnomerne rozdelených postupností súvisí s Riemannovým a nie Lebesguovým integrálom.

a vzťah (2.4) v tvare

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b)}(x_n) = \frac{1}{B-A} \int_A^B \chi_{[a,b)}(x)\, dx. \tag{2.6}$$

Vzhľadom na Definíciu 2.1 a Propozíciu 2.5 tak prichádzame k dôležitému pozorovaniu: Ak zavedieme podmienku[5]

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \frac{1}{B-A} \int_A^B f(x)\, dx \tag{TASA-rr}$$

tak definíciu rovnomernej rozdelenosti postupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ ležiacej v $[A,B]$ možno preformulovať nasledovne:

$$\begin{aligned} &(x_n)_{n=1}^\infty \text{ je r.r. na } [A,B] \iff \\ &\quad \iff \text{(TASA-rr) platí pre charakteristické funkcie intervalov } [a,b] \subseteq [A,B] \\ &\quad \iff \text{(TASA-rr) platí pre charakteristické funkcie intervalov } [a,b) \subseteq [A,B]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Vychádzajúc z faktu (2.7) možno dokázať tzv. integrálne kritérium rovnomernej rozdelenosti postupnosti. Jeho dôkaz je založený na dvoch faktoch. Po prvé, využijeme charakterizáciu rovnomernej rozdelenosti pomocou polouzavretých podintervalov.[6] Po druhé, využijeme, že ak pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ chceme dokázať podmienku (TASA-rr) pre nejakú funkciu, stačí vedieť, že sa táto funkcia dá v integrálnom zmysle natesno obaliť zhora a zdola funkciami, ktoré podmienku (TASA-rr) pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$) spĺňajú. Hovorí o tom nasledujúca lema.

Lema 2.8 (Obaľovacia lema). *Nech $(x_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť ležiaca v intervale $[A,B]$ a nech funkcia $g\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovateľná.[7] Nech pre každé $\varepsilon > 0$ existujú riemannovsky integrovateľné funkcie $\alpha_\varepsilon^-, \alpha_\varepsilon^+\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ také, že*

(i) $\alpha_\varepsilon^-(x) \le g(x) \le \alpha_\varepsilon^+(x), \quad x \in [A,B],$

(ii) $\frac{1}{B-A}\int_A^B (\alpha_\varepsilon^+(x) - \alpha_\varepsilon^-(x))\, dx < \varepsilon,$

(iii) funkcie $\alpha_\varepsilon^-, \alpha_\varepsilon^+$ spĺňajú pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ podmienku (TASA-rr).

Potom aj funkcia g spĺňa pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ podmienku (TASA-rr).

Dôkaz. Všimnime si, že predpoklad (i) dáva

$$\frac{1}{B-A}\int_A^B \alpha_\varepsilon^-(x)\, dx \le \frac{1}{B-A}\int_A^B g(x) \le \frac{1}{B-A}\int_A^B \alpha_\varepsilon^+(x)\, dx$$

[5] Označenie (TASA-rr) pochádza z toho, že vľavo je "time average" funkcie f pozdĺž postupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ a vpravo je "space average" funkcie f na intervale $[A,B]$, pričom "rr" naznačuje, že sa podmienka používa v súvislosti s rovnomernou rozdelenosťou. Navyše, je tu jasná analógia s podmienkou (TASA) zo Sekcie 1.3.

[6] Má to niektoré formálne výhody. Napr. delenie intervalu $[A,B]$ dáva po dvoch disjunktné polouzavreté intervaly (teraz ignorujme bod B, ktorý nám zvýši), zatiaľ čo príslušné uzavreté podintervaly nemajú túto príjemnú vlastnosť.

[7] Predpoklad, že g je riemannovsky integrovateľná, možno vynechať, pretože vyplýva z ostatných predpokladov. Skúste to dokázať.

a predpoklad (ii) zase ukazuje, že dve krajné veličiny (stredné hodnoty α_ε^- a α_ε^+) majú vzdialenosť menšiu než ε. Preto, ak od strednej hodnoty funkcie g odpočítame ε, dostaneme sa pod strednú hodnotu funkcie α_ε^- a ak ku strednej hodnote funkcie g pripočítame ε, dostaneme sa nad strednú hodnotu funkcie α_ε^+. Potom, keďže predpokladáme aj (iii), máme

$$\begin{aligned}\frac{1}{B-A}\int_A^B g(x)\,dx-\varepsilon &\le \frac{1}{B-A}\int_A^B \alpha_\varepsilon^-(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \alpha_\varepsilon^-(x_n)\le\\ &\le \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N g(x_n)\le \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N g(x_n)\le\\ &\le \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \alpha_\varepsilon^+(x_n)=\frac{1}{B-A}\int_A^B \alpha_\varepsilon^+(x)\,dx\le \frac{1}{B-A}\int_A^B g(x)\,dx+\varepsilon.\end{aligned}$$

Keďže ε bolo ľubovoľné, existuje limita

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N g(x_n)=\frac{1}{B-A}\int_A^B g(x)\,dx,$$

čiže funkcia g spĺňa pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ podmienku (TASA-rr). □

Veta 2.9 (Integrálne kritérium rovnomernej rozdelenosti postupnosti). *Nech $(x_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť reálnych čísel ležiaca v $[A,B]$. Potom nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné.*[8]

(1) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. v intervale $[A,B]$.

(2) Podmienka TASA-rr platí pre každú riemannovsky integrovateľnú funkciu $f\colon [A,B]\to\mathbb{R}$.

(3) Podmienka TASA-rr platí pre každú spojitú funkciu $f\colon [A,B]\to\mathbb{R}$.[9]

Dôkaz. $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Predpokladajme, že daná postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. Máme pre ňu dokázať podmienku (TASA-rr) pre každú riemannovsky integrovateľnú funkciu f.

- Ak je f charakteristická funkcia nejakého intervalu $[a,b)\subseteq[A,B]$, tak (TASA-rr) platí podľa (2.7).
- Ak je f schodovitá funkcia, t.j. $f(x)=\sum_{i=1}^k c_i\chi_{[a_i,b_i)}(x)$ pre nejaké po dvoch disjunktné podintervaly $[a_i,b_i)$ intervalu $[A,B]$ a nejaké reálne čísla c_i, tak (TASA-rr) platí vďaka linearite integrálu,[10] linearite sumy a linearite limity (vysvetlite podrobne).
- Nech f je teraz ľubovoľná riemannovsky integrovateľná funkcia na $[A,B]$. Na dôkaz, že pre danú postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ spĺňa podmienku (TASA-rr), použijeme Obaľovaciu lemu. Zvoľme preto $\varepsilon>0$. Podľa kritéria riemannovskej integrovateľnosti existuje také delenie intervalu $[A,B]$, že horný integrálny súčet a dolný integrálny súčet funkcie f pri tomto delení sa líšia

[8] Pre zaujímavosť poznamenajme, že implikácia (1)⇒(2) sa dá využiť na približný výpočet Riemannovho integrálu $\int_A^B f(x)\,dx$. Na podobnej myšlienke je založený numerický výpočet integrálov tzv. metódou Monte Carlo.

[9] Ak niektoré z tvrdení (2), (3) platí, tak ako je uvedené, pre reálne funkcie, tak zrejme platí aj pre komplexné funkcie. Stačí ho totiž použiť na reálnu aj imaginárnu časť danej komplexnej funkcie. Teraz to nepotrebujeme, ale neskôr, v Dôsledku 2.13, túto myšlienku využijeme.

[10] Integrál lineárnej kombinácie funkcií sa rovná tej istej lineárnej kombinácii integrálov tých funkcií.

o menej ako $\varepsilon(B-A)$.[11] Z toho ľahko vidieť (vysvetlite podrobne), že existujú schodovité funkcie $s_\varepsilon^-, s_\varepsilon^+$ také, že

$$s_\varepsilon^-(x) \le f(x) \le s_\varepsilon^+(x), \quad x \in [A,B] \qquad \text{a} \qquad \int_A^B (s_\varepsilon^+(x) - s_\varepsilon^-(x))\,dx < \varepsilon(B-A).$$

Keďže pre schodovité funkcie sme (TASA-rr) už dokázali, podľa Obaľovacej lemy platí (TASA-rr) aj pre funkciu f.

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ Toto je triviálne, lebo spojité funkcie sú riemannovsky integrovateľné.

$\boxed{(3)\Rightarrow(1)}$ Nech (TASA-rr) platí pre každú spojitú funkciu f na $[A,B]$. Aby sme dokázali, že daná postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r., dokážeme, že (TASA-rr) platí pre charakteristické funkcie intervalov $[a,b) \subseteq [A,B]$, pozri (2.7). Fixujme taký interval $[a,b)$. Charakteristickú funkciu $\chi_{[a,b)}$ budeme zdola aj zhora aproximovať spojitými funkciami (pre ktoré podľa predpokladu (3) podmienka (TASA-rr) platí). Nech teda $\varepsilon > 0$. Ľahko vidieť, že existujú spojité funkcie $f_\varepsilon^-, f_\varepsilon^+ \colon [A,B] \to \mathbb{R}$, pre ktoré

$$f_\varepsilon^-(x) \le \chi_{[a,b)}(x) \le f_\varepsilon^+(x), \quad x \in [A,B] \qquad \text{a} \qquad \int_A^B (f_\varepsilon^+(x) - f_\varepsilon^-(x))\,dx < \varepsilon(B-A). \tag{2.8}$$

(Napr. ak $A < a < b < B$ a $\varepsilon > 0$ je malé, zvoľte spojitú funkciu f_ε^+ tak, že $f_\varepsilon^+(x) = 1$ na intervale $[a,b]$, $f_\varepsilon^+(x) = 0$ na $[A, a-\delta]$ a na $[b+\delta, B]$ pre dosť malé $\delta > 0$, $f_\varepsilon^+(x)$ je lineárna na každom zo zvyšných dvoch intervalov $[a-\delta, a]$ a $[b, b+\delta]$. Podobne vymyslite f_ε^-. Kreslite grafy!)

Podľa Obaľovacej lemy podmienka (TASA-rr) platí aj pre $\chi_{[a,b)}$. □

Poznámka 2.10. Pripomeňme, že veličinu $\lim_{N\to\infty}(1/N)\sum_{n=1}^N f(x_n)$ sme sa dohodli nazývať časovým priemerom funkcie f pozdĺž postupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$. Veta 2.9 hovorí, že postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ ležiaca v $[A,B]$ je r.r. vtedy a len vtedy, keď strednú hodnotu ľubovoľnej riemannovsky integrovateľnej funkcie f na intervale $[A,B]$ možno počítať ako časový priemer funkcie f pozdĺž postupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ (viď Obr. 2.1).

Obr. 2.1: Stredná hodnota riemannovsky integrovateľnej funkcie f na intervale sa rovná časovému priemeru funkcie f pozdĺž ľubovoľne zvolenej postupnosti r.r. v tom intervale.

Platí teda:

- Ak f je riemannovsky integrovateľná na $[A,B]$ a $(x_n)_{n=1}^\infty$ je ľubovoľne zvolená r.r. postupnosť na $[A,B]$, tak

$$\frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)\,dx = \text{ časový priemer funkcie } f \text{ pozdĺž postupnosti } (x_n)_{n=1}^\infty.$$

[11] Alternatívne, uvážte, že Riemannov integrál je spoločná hodnota dolného a horného Riemannovho integrálu.

Menej známe je, ako dokázali de Bruijn a Post v r. 1968, že platí aj obrátené tvrdenie:

- Ak $f\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ nie je riemannovsky integrovateľná, tak sa dá v intervale $[A,B]$ zvoliť r.r. postupnosť, pozdĺž ktorej časový priemer funkcie f neexistuje.

Teda dohromady máme:

Funkcia f je riemannovsky integrovateľná na intervale vtedy a len vtedy, keď pre každú rovnomerne rozdelenú postupnosť na tom intervale platí, že existuje časový priemer funkcie f pozdĺž tej postupnosti. V takom prípade sa navyše všetky tie časové priemery zhodujú a rovnajú sa strednej hodnote tej funkcie na danom intervale.

Poznámka 2.11 (R.r. postupností nesúvisí s Lebesguovým integrálom). Rovnomerné rozdelenie postupností súvisí podľa Vety 2.9 s Riemannovým integrálom. Ukážeme, že nesúvisí s Lebesguovým integrálom. Naozaj, uvažujme o nasledujúcich dvoch podmienkach (porovnajte s podmienkami (1) a (2) z Vety 2.9):

(1) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. na $[0,1]$.

(2_{L}) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňa podmienku (TASA-rr) pre každú lebesguovsky integrovateľnú funkciu $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, t.j. pre každú lebesguovsky integrovateľnú funkciu $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\, d\,\mathrm{Leb}(x)$$

(kde vpravo je tentoraz Lebesguov integrál[12] vzhľadom na Lebesguovu mieru Leb na $[0,1]$).

Potom:

- $\boxed{(2_{\mathrm{L}})\Rightarrow(1)}$ To vyplýva z Vety 2.9 (a z toho, že každá riemannovsky integrovateľná funkcia je aj lebesguovsky integrovateľná a jej Riemannov a Lebesguov integrál sa rovnajú).
- $\boxed{(1)\not\Rightarrow(2_{\mathrm{L}})}$ Nech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je hocijaká postupnosť spĺňajúca (1), teda r.r. na $[0,1]$. Tvrdíme, že neplatí (2_{L}). Naozaj, nech $M \subseteq [0,1]$ je (spočítateľná) množina členov postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Potom charakteristická funkcia χ_M množiny M je lebeguovsky integrovateľná, ale

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_M(x_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1 = 1 \quad \neq \quad 0 = \int_0^1 \chi_M(x)\, dx \ .$$

Vzhľadom na Vetu 2.6 a skutočnosť, že Jordanova miera súvisí práve s Riemannovým integrálom a nie s Lebesguovým, nás tento výsledok až tak neprekvapuje.

2.4 Rovnomerne rozdelené postupnosti modulo 1

Budeme uvažovať o hocijakej (možno neohraničenej) postupnosti reálnych čísel a budeme skúmať, či postupnosť necelých častí členov tejto postupnosti[13] je v intervale $[0,1]$ rovnomerne rozdelená. Ak je tomu tak, danú postupnosť reálnych čísel nazveme rovnomerne rozdelenou modulo 1.

[12] Riemannov integrál lebesguovsky integrovateľnej funkcie vôbec nemusí existovať.

[13] tá je už ohraničená, leží v $[0,1)$

Zopakujme si najskôr, že (dolná) celá časť $\lfloor x \rfloor$ reálneho čísla x je najväčšie celé číslo neprevyšujúce x, teda

$$\lfloor x \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}$$

a necelá časť $\{x\}$ čísla x je

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor = x \bmod 1 .$$

Napríklad $\lfloor 3,2 \rfloor = 3$ a $\{3,2\} = 0,2$. Podobne $\lfloor -3,2 \rfloor = -4$ a $\{-3,2\} = 0,8$. Každé reálne číslo x možno písať v tvare súčtu (dolnej) celej časti $\lfloor x \rfloor$ a necelej časti $\{x\}$:

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, \qquad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \quad \{x\} \in [0,1) ,$$

napr. $3,2 = 3 + 0,2$ a $-3,2 = -4 + 0,8$.

Geometricky, necelú časť $\{x\}$ (teda $x \bmod 1$) dostaneme tak, že číslo x posunieme o také celé číslo m, aby sme dostali $x + m \in [0,1) = I$. Potom $x + m = \{x\}$.

Vybavení týmto označením, zopakujeme hlavnú definíciu tejto kapitoly (pozri aj Propozíciu 2.5).

Definícia 2.12. Povieme, že postupnosť reálnych čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je *rovnomerne rozdelená modulo 1* (skrátene r.r. mod 1), ak je postupnosť necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne rozdelená v intervale $[0,1]$, t.j. ak pre každé $0 \le a < b \le 1$ platí

$$\boxed{\mathrm{frekv}_{[a,b)}(\{x_n\}) = b - a.} \tag{2.9}$$

Uvedieme tvrdenie, ktoré je jednoduchým dôsledkom Vety 2.9.

Dôsledok 2.13 (Kritérium r.r. mod 1 pomocou periodických funkcií). *Nech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné.*

(1) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1.

(2) Pre každú spojitú funkciu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s periódou 1 platí

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

(3) Pre každú spojitú funkciu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periódou 1 platí

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

Všimnime si, že vďaka periodičnosti f je jedno, či v (2) a (3) vľavo píšeme $f(x_n)$ alebo $f(\{x_n\})$, takže podmienky (2) a (3) možno preformulovať aj v takom duchu, ako sme boli doteraz zvyknutí:

(2') Postupnosť necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ spĺňa podmienku (TASA-rr) pre každú spojitú funkciu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s periódou 1.

(3') Postupnosť necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^{\infty}$ spĺňa podmienku (TASA-rr) pre každú spojitú funkciu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periódou 1.

Dôkaz. $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Nech $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1, teda $(\{x_n\})_{n=1}^\infty$ je r.r. na $[0,1]$. Nech $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ je spojitá funkcia s periódou 1. Potom $f(x)=g(x)+ih(x)$ pre nejaké spojité funkcie $g,h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (tie sú tiež periodické s periódou 1, to však teraz nevyužijeme). Ak na tieto spojité funkcie g,h (zúžené na $[0,1]$) použijeme Vetu 2.9(1)⇒(3), dostaneme

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\})=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(\{x_n\})+i\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h(\{x_n\})\right)=$$
$$=\int_0^1 g(x)\,dx+i\int_0^1 h(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx\ .$$

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ Toto je triviálne.

$\boxed{(3)\Rightarrow(1)}$ Predpokladajme, že každá spojitá funkcia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s periódou 1 spĺňa rovnosť z (3). Ideme dokázať, že daná postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1, teda že $(\{x_n\})_{n=1}^\infty$ je r.r. na $[0,1]$. Podľa (2.7) stačí dokázať, že pre každý polouzavretý inaterval $[a,b)\subseteq[0,1]$ charakteristická funkcia $\chi_{[a,b)}$ spĺňa podmienku (TASA-rr) pre postupnosť necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^\infty$ a pre $A=0$, $B=1$. To je podobná situácia ako v dôkaze Vety 2.9(3)⇒(1), preto aj postupovať budeme podobne. Fixujme $\varepsilon>0$ a zvoľme najskôr, podobne ako v spomínanom dôkaze Vety 2.9(3)⇒(1), spojité funkcie $f_\varepsilon^-, f_\varepsilon^+\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, pre ktoré platí

$$f_\varepsilon^-(x)\le\chi_{[a,b)}(x)\le f_\varepsilon^+(x),\quad x\in[0,1]\qquad\text{a}\qquad\int_0^1\left(f_\varepsilon^+(x)-f_\varepsilon^-(x)\right)dx<\varepsilon \tag{2.10}$$

a navyše aj

$$f^-(0)=f^-(1),\qquad f^+(0)=f^+(1). \tag{2.11}$$

(To je o trošku ťažšia úloha ako bolo nájsť funkcie $f_\varepsilon^-, f_\varepsilon^+$ v dôkaze Vety 2.9(3)⇒(1), ale presvedčte sa, že sa to dá, dokonca aj v prípade, keď $a=0$ alebo $b=1$.)

Vďaka dodatočnej podmienke (2.11) môžeme funkcie $f_\varepsilon^-, f_\varepsilon^+$ periodicky, s periódou 1, predĺžiť na celú reálnu os. Takto predĺžené funkcie $\widetilde{f_\varepsilon^-}, \widetilde{f_\varepsilon^+}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sú aj spojité. Môžeme preto na ne použiť náš predpoklad (3), takže

$$\varphi\in\{\widetilde{f_\varepsilon^-},\widetilde{f_\varepsilon^+}\}\quad\Longrightarrow\quad\int_0^1\varphi(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(x_n)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(\{x_n\}).$$

To znamená, že pôvodné funkcie $f_\varepsilon^-, f_\varepsilon^+$ na intervale $[0,1]$ spĺňajú podmienku (TASA-rr) pre postupnosť necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^\infty$ a pre $A=0$ a $B=1$. Podľa Obaľovacej lemy podmienka (TASA-rr) platí pre postupnosť necelých častí $(\{x_n\})_{n=1}^\infty$ a pre $A=0$ a $B=1$ aj pre funkciu $\chi_{[a,b)}$, čo sme potrebovali dokázať. □

2.5 Weylovo kritérium pre rovnomernú rozdelenosť modulo 1

Ak chceme pomocou Dôsledku 2.13 dokázať, že daná postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1, mali by sme overiť, či pre každú (!) spojitú funkciu $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (prípadne $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) s periódou 1 platí

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)=\int_0^1 f(x)\,dx\ . \tag{2.12}$$

Pomohlo by, keby to stačilo overit' pre nejaký menší vybraný súbor funkcií. Hermann Weyl[14] si uvedomil, že to stačí overit' pre spočítateľne veľa funkcií $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaných vzťahom:

$$f_k(x) = \exp(i2\pi kx) = e^{i2\pi kx}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Pripomeňme, že podľa Eulerovej formuly je $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, teda $f_k(x) = \cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx)$.

Teda už systém funkcií $f_k(x) = e^{i2\pi kx}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je dostatočne bohatý na to, aby sme pomocou neho mohli overovat' rovnomerné rozdelenie modulo 1 — platnosť rovnosti (2.12) pre uvedené funkcie f_k je nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby $(x_n)_{n=1}^\infty$ bola r.r. mod 1:

- Nutnosť je zrejmá. Funkcie $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sú spojité a periodické s periódou 1 (vysvetlite). Preto, ak $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1, podľa Dôsledku 2.13 naozaj platí
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi kx_n} = \int_0^1 e^{i2\pi kx}\,dx, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$
- Postačujúcosť už zrejmá nie je. Weyl to však dokázal a je to jeden z najdôležitejších faktov teórie rovnomerne rozdelených postupností modulo 1.

Z toho čo sme povedali, sa teda zdá, že Weylovo kritérium bude zniet' takto: Postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy keď

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi kx_n} = \int_0^1 e^{i2\pi kx}\,dx, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

V skutočnosti možno Weylovo kritérium ešte trochu zjednodušit', ak integrál vpravo nahradíme jeho hodnotou. Ľahký výpočet dá, že pre každé celé $k \neq 0$ platí (doplňte detaily):

$$\int_0^1 e^{i2\pi kx}\,dx = \int_0^1 \cos(2\pi kx)\,dx + i\int_0^1 \sin(2\pi kx)\,dx = 0 + i0 = 0, \tag{2.13}$$

alebo elegantnejšie:

$$\int_0^1 e^{i2\pi kx}\,dx = \left[\frac{1}{i2\pi k} e^{i2\pi kx}\right]_{x=0}^1 = 0.$$

Ďalšie zjednodušenie je, že namiesto $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ stačí uvažovat' $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Weylovo kritérium teda znie nasledovne.

Veta 2.14 (Weylovo kritérium; H. Weyl 1916). *Nech $(x_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť reálnych čísel. Potom nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné.*

(1) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1.

(2) $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^N e^{i2\pi kx_n} = 0$ *platí pre každé* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(3) $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^N e^{i2\pi kx_n} = 0$ *platí pre každé* $k \in \mathbb{N}$.

[14] Hermann Weyl (1885 – 1955) bol nemecký matematik, teoretický fyzik a filozof.

Dôkaz. $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Toto sme dokázali v diskusii pred vetou.

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ Predpokladajme (2). Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je ľubovoľná spojitá funkcia s periódou 1. Stačí, ak dokážeme, že

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx \; . \tag{2.14}$$

Naozaj, potom podľa Dôsledku 2.13 dostaneme, že $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1 a dôkaz bude skončený.

Nech teda $\varepsilon > 0$. K dôkazu (2.14) stačí ukázať, že

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \right| \le 3\varepsilon, \qquad \text{pre všetky dostatočne veľké } N. \tag{2.15}$$

Využijeme hlbokú Weierstrassovu vetu z analýzy, podľa ktorej k ľubovoľnej spojitej funkcii $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s periódou 1 existuje trigonometrický polynóm $\Psi(x)$, ktorý danú funkciu rovnomerne aproximuje s presnosťou ε. Pritom trigonometrický polynóm je konečná lineárna kombinácia (s komplexnými koeficientami) funkcií tvaru $e^{i2\pi kx}$ pre nejaké celé čísla k.[15] Teda k našej funkcii f existuje trigonometrický polynóm

$$\Psi(x) = \sum_{\ell=1}^{m} c_\ell e^{i2\pi k_\ell x}, \qquad c_\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ k_\ell \in \mathbb{Z} \tag{2.16}$$

taký, že

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \Psi(x)| \le \varepsilon. \tag{2.17}$$

Použijeme odhad:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \right| \\
&\le \left| \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 \Psi(x)\,dx \right| + \left| \int_0^1 \Psi(x)\,dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Psi(x_n) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Psi(x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \right| \\
&= \underbrace{\left| \int_0^1 (f(x) - \Psi(x))\,dx \right|}_{A} + \underbrace{\left| \int_0^1 \Psi(x)\,dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Psi(x_n) \right|}_{B} + \underbrace{\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\Psi(x_n) - f(x_n)) \right|}_{C}.
\end{aligned}$$

Vďaka (2.17) je $A \le \varepsilon$ (vysvetlite podrobne, treba využiť aj fakt, že absolútna hodnota integrálu je menšia alebo sa rovná integrálu absolútnej hodnoty). Podobne je $C \le \varepsilon$ pre každé N (opäť vysvetlite podrobne). Aby sme dostali požadovaný odhad (2.15), treba ešte dokázať, že pre všetky

[15]Všimnite si, že aj trigonometrický polynóm je spojitá funkcia $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s periódou 1.

dostatočne veľké N je $B \leq \varepsilon$. Aby sme to dokázali, upravíme člen B pomocou (2.16):

$$
\begin{aligned}
B &= \left| \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^m c_\ell e^{i2\pi k_\ell x} \right) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{\ell=1}^m c_\ell e^{i2\pi k_\ell x_n} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{\ell=1}^m \int_0^1 c_\ell e^{i2\pi k_\ell x}\, dx - \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c_\ell e^{i2\pi k_\ell x_n} \right| \\
&= \left| \sum_{\ell=1}^m c_\ell \Bigl(\int_0^1 e^{i2\pi k_\ell x}\, dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} \Bigr) \right| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^m \left| c_\ell \underbrace{\Bigl(\int_0^1 e^{i2\pi k_\ell x}\, dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} \Bigr)}_{B_\ell} \right| = \sum_{\ell=1}^m |c_\ell| \cdot |B_\ell| \ .
\end{aligned}
$$

Rozlíšime dva prípady:

- $k_\ell \neq 0$. Potom podľa (2.13) sa integrál v B_ℓ rovná nule. Ďalej, podľa nášho predpokladu (2) je $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} = 0$, takže existuje N_ℓ také, že pre každé $N \geq N_\ell$ je

$$
\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{m|c_\ell|}.
$$

  Z toho dostávame

$$
|c_\ell| \cdot |B_\ell| = |c_\ell| \cdot \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k_\ell x_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{m} \qquad \text{pre každé } N \geq N_\ell.
$$

- $k_\ell = 0$. Potom sa integrál v B_ℓ rovná 1 a dostávame

$$
|c_\ell| \cdot |B_\ell| = |c_\ell| \cdot \left| 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1 \right| = |c_\ell| \cdot |1-1| = 0 \qquad \text{pre každé } N.
$$

Teraz je už zrejmé, že pre každé dostatočne veľké N je

$$
B = \sum_{\ell=1}^m |c_\ell| \cdot |B_\ell| \leq \sum_{\ell=1}^m \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon,
$$

čo sme potrebovali dokázať.

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ Toto je triviálne.

$\boxed{(3)\Rightarrow(2)}$ Nech $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k x_n} = 0$ platí pre každé $k \in \mathbb{N}$. Aby sme dokázali (2), stačí ukázať, že pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ platí aj $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi(-k)x_n} = 0$. Fixujme teda $k \in \mathbb{N}$. Využijúc predpoklad, prechod ku komplexne združeným číslam dá

$$
\overline{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i2\pi k x_n}} = \overline{0} = 0.
$$

Konjugácia je spojité zobrazenie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, teda $\lim_{N\to\infty} z_N = z$ implikuje $\lim_{N\to\infty} \overline{z_N} = \overline{z} = \overline{\lim_{N\to\infty} z_N}$. Ak ešte uvážime, že konjugácia zachováva súčet aj súčin, t.j. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ a $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, dostávame

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k x_n}} &= \lim_{N\to\infty} \overline{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k x_n} \right)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\overline{e^{i2\pi k x_n}} \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi(-k)x_n}, \end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Príklad 2.15 (Postupnosť násobkov iracionálneho čísla). Nech θ je iracionálne číslo. Ukážeme, že postupnosť $(n\theta)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1.

Použijeme Weylovo kritérium. Pre každé $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ platí (zdôvodnite, prečo je kvocient $e^{i2\pi k\theta}$ rôzny od 1):

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k n\theta} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(e^{i2\pi k\theta} \right)^n \right| = \frac{1}{N} \cdot \left| e^{i2\pi k\theta} \right| \cdot \frac{\left| e^{i2\pi k N\theta} - 1 \right|}{\left| e^{i2\pi k\theta} - 1 \right|}.$$

Keďže pre každé φ je $|e^{i\varphi}| = 1$ a zároveň

$$\begin{aligned} \left| e^{i\varphi} - 1 \right| &= |(\cos\varphi - 1) + i \sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 1 + \sin^2\varphi} = \\ &= \sqrt{2(1-\cos\varphi)} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = 2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|, \end{aligned}$$

dostávame

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k n\theta} \right| \le \frac{1}{N} \cdot 1 \cdot \frac{2}{2\,|\sin(\pi k\theta)|} = \frac{1}{N\,|\sin(\pi k\theta)|} \to 0$$

pre $N \to \infty$. Odtiaľ $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k n\theta} = 0$ a Weylovo kritérium dáva, že daná postupnosť je r.r. mod 1.

Platí trochu viac: Postupnosť $(n\theta)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy, keď θ je iracionálne, pozri Cvičenie 2.4. Tvrdenie, že pre iracionálne θ je postupnosť $(n\theta)_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1, je mierne zosilnené v Cvičení 2.7, podľa ktorého je pre iracionálne θ aj postupnost $(n\theta + c)_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1. Bez dôkazu uvedieme nasledujúce, omnoho silnejšie tvrdenie.

Veta 2.16 (Weylova veta o polynómoch). *Nech $p(n) = \theta_k n^k + \cdots + \theta_1 n + \theta_0$ je polynóm s reálnymi koeficientami. Ak aspoň jeden z koeficientov $\theta_1, \ldots, \theta_k$ (teda rôznych od konštatného člena) je iracionálny, tak postupnosť $(p(n))_{n=1}^{\infty}$ je r.r.* mod 1.

Príklad 2.17. Špeciálne, ak θ je iracionálne číslo, tak nielen postupnosť $(n\theta)_{n=1}^{\infty}$ (pozri Príklad 2.15) ale napr. aj postupnosť $(n^2\theta)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1.

2.6 *O rovnomerne rozdelených postupnostiach v $\mathbb{R}^s$

Pojem rovnomerne rozdelenej postupnosti možno analogicky definovať aj pre postupnosti vektorov v $\mathbb{R}^s$. My sa sústredíme len na postupnosti rovnomerne rozdelené modulo 1.

Ak máme vektor
$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s,$$
môžeme prirodzene definovať jeho celú časť a necelú časť:
$$\lfloor \mathbf{x} \rfloor := (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_s \rfloor), \qquad \{\mathbf{x}\} := (\{x_1\}, \dots, \{x_s\}).$$
Ako obvykle, $\mathbf{0}$ bude označovať nulový vektor $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^s$.

Pre postupnosť vektorov v $\mathbb{R}^s$, definícia rovnomernej rozdelenosti modulo 1 vyjadruje, že pre každý s-rozmerný kváder (v jednotkovej s-rozmernej kocke) sa frekvencia, s akou necelé časti týchto vektorov ležia v tom kvádri, rovná s-rozmernému objemu toho kvádra. V súlade s Definíciou 2.12 zvolíme polouzavreté kvádre (podobne ako v dimenzii jedna, definícia s uzavretými kvádrami by bola ekvivalentná).

Definícia 2.18. Povieme, že postupnosť vektorov $\mathbf{x_n} = (x_{n,1}, \dots, x_{n,s}) \in \mathbb{R}^s$, $n = 1, 2, \dots$, je *rovnomerne rozdelená modulo 1* (skrátene r.r. mod 1), ak pre každý výber s intervalov $[a_1, b_1)$, …, $[a_s, b_s) \subseteq [0, 1]$ platí
$$\boxed{\operatorname{frekv}_{[a_1,b_1)\times\dots\times[a_s,b_s)}(\{x_n\}) = \prod_{i=1}^{s}(b_i - a_i).} \tag{2.18}$$

Analogicky ako pre postupnosti reálnych čísel, možno budovať teóriu rovnomerne rozdelených postupností vektorov v $\mathbb{R}^s$. Nebudeme to robiť, ale bez dôkazov uvedieme aspoň hlavné tvrdenia. Predovšetkým, platí analógia Vety 2.9.

Veta 2.19 (Integrálne kritérium rovnomernej rozdelenosti postupnosti vektorov). *Majme postupnosť vektorov $\mathbf{x_n} = (x_{n,1}, \dots, x_{n,s}) \in \mathbb{R}^s$, $n = 1, 2, \dots$. Potom nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné.*

(1) Postupnosť $(\mathbf{x_n})_{n=1}^\infty$ je r.r. mod 1.

(2) Pre každú riemannovsky integrovateľnú funkciu $f\colon [0,1]^s \to \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_{n,1}\}, \dots, \{x_{n,s}\}) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s)\, dx_1 \dots dx_s\ .$$

(3) Pre každú spojitú funkciu $f\colon [0,1]^s \to \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_{n,1}\}, \dots, \{x_{n,s}\}) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s)\, dx_1 \dots dx_s\ .$$

Funguje aj analógia Weylovho kritéria. Namiesto súčinu kx_n však v ňom tentoraz bude vystupovať skalárny súčin vektorov $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s)$ a $\mathbf{x_n} = (x_{n,1}, \dots, x_{n,s})$, teda
$$\langle \mathbf{k}, \mathbf{x_n} \rangle = k_1 x_{n,1} + \dots + k_s x_{n,s}.$$

Veta 2.20 (Weylovo kritérium pre postupnosti vektorov). *Nech* $\mathbf{x_n} = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,s}) \in \mathbb{R}^s$, $n = 1, 2, \ldots$ *. Potom nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné.*

(1) Postupnosť vektorov $(\mathbf{x_n})_{n=1}^{\infty}$ *je r.r.* mod 1*.*

(2) $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} e^{i2\pi\langle \mathbf{k}, \mathbf{x_n}\rangle} = 0$ *platí pre každý vektor* $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$*.*

Porovnanie tejto vety s jednorozmerným Weylovým kritériom, teda s Vetou 2.14 dáva nasledujúce pozorovanie.

Dôsledok 2.21. *Nech* $\mathbf{x_n} \in \mathbb{R}^s$*,* $n = 1, 2, \ldots$ *je postupnosť vektorov. Potom nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné.*

(a) Postupnosť vektorov $\mathbf{x_n} \in \mathbb{R}^s$ *je r.r.* mod 1*.*

(b) Pre každý vektor $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ *je postupnosť čísel* $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x_n}\rangle \in \mathbb{R}$ *r.r.* mod 1*.*

Dôkaz. $\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$ Nech platí (a) a nech $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$. Potom pre každé číslo $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je aj vektor $c\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$. Využijúc (a), podľa Vety 2.20 dostávame $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi\langle c\mathbf{k}, \mathbf{x_n}\rangle} = 0$. Lenže $\langle c\mathbf{k}, \mathbf{x_n}\rangle = c\langle \mathbf{k}, \mathbf{x_n}\rangle$. Teda pre každé $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi c\langle \mathbf{k}, \mathbf{x_n}\rangle} = 0$. Weylovo kritérium pre postupnosti čísel tak dáva, že postupnosť čísel $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x_n}\rangle$ je r.r. mod 1, čiže sme dostali (b).

$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(a)}}$ Nech platí (b) a nech $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$. Keďže je postupnosť čísel $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x_n}\rangle$ r.r. mod 1, podľa Weylovho kritéria pre postupnosti čísel je $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi c\langle \mathbf{k}, \mathbf{x_n}\rangle} = 0$ pre každé $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Voľbou $c = 1$ dostaneme podmienku (2) z Vety 2.20, takže podľa tej vety je postupnosť vektorov $\mathbf{x_n}$ r.r. mod 1, čiže sme dostali (a). □

Podľa Príkladu 2.15 a Cvičenia 2.4, postupnosť $(n\theta)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy, keď θ je iracionálne číslo. Vetu 2.20, alebo ešte lepšie Dôsledok 2.21, možno použiť v nasledujúcej všeobecnejšej, "s-rozmernej" verzii tohto faktu.

Najskôr však sformulujeme jednoduchú lemu.

Lema 2.22. *Nech* $\theta_1, \ldots, \theta_s \in \mathbb{R}$*. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(a) Čísla $1, \theta_1, \ldots, \theta_s$ *sú* racionálne nezávislé*, t.j. lineárne nezávislé nad poľom racionálnych čísel.*

(b) Pre každý vektor $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ *je číslo* $\theta = k_1\theta_1 + \cdots + k_s\theta_s$ *iracionálne.*

Dôkaz. $\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$ Nech platí (a) a nech neplatí (b). Potom existuje vektor $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ tak, že číslo $\theta = k_1\theta_1 + \ldots k_s\theta_s$ je racionálne, napr.

$$k_1\theta_1 + \cdots + k_s\theta_s = \frac{p}{q}.$$

Potom však $(-p) \cdot 1 + (qk_1)\theta_1 + \cdots + (qk_s)\theta_s = 0$ a keďže niektoré z čísel qk_i je nenulové, máme spor s (a).

$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(a)}}$ Nech platí (b) a nech neplatí (a). Potom existujú $r_0, r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{Q}$, nie všetky nulové, tak, že

$$r_0 \cdot 1 + r_1\theta_1 + \ldots r_s\theta_s = 0. \tag{2.19}$$

Ak $r_1 = \dots r_s = 0$, tak aj $r_0 = 0$, čo je spor s tým, že aspoň jedno $r_i \neq 0$. Preto $r_i \neq 0$ pre niektoré $i \in \{1, \dots, s\}$ a podľa (b) je teda číslo $r_1\theta_1 + \dots r_s\theta_s$ iracionálne. Potom z (2.19) dostaneme, že r_0 je iracionálne, spor. □

Propozícia 2.23. *Nech $\theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbb{R}$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(1) Postupnosť vektorov $\mathbf{x_n} = (n\theta_1, \dots, n\theta_s)$, $n = 1, 2, \dots$ je r.r. mod 1.

(2) Čísla $1, \theta_1, \dots, \theta_s$ sú racionálne nezávislé.

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľný vektor $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$. Potom

$$\langle \mathbf{k}, \mathbf{x_n} \rangle = k_1 \cdot n\theta_1 + \dots + k_s \cdot n\theta_s = n \cdot \underbrace{(k_1\theta_1 + \dots k_s\theta_s)}_{\theta}.$$

Podľa Dôsledku 2.21 je teda postupnosť vektorov $\mathbf{x_n}$ r.r. mod 1 (čiže platí (1)) vtedy a len vtedy, keď pre každý vektor $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ je r.r. mod 1 postupnosť čísel $n\theta$ kde $\theta = k_1\theta_1 + \dots k_s\theta_s$. Lenže my vieme, že táto postupnosť čísel je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy, keď θ je iracionálne. To však podľa Lemy 2.22 platí vtedy a len vtedy, keď sú čísla $1, \theta_1, \dots, \theta_s$ racionálne nezávislé, čiže keď platí (2). □

2.7 Cvičenia a projekty

Cvičenie 2.1. Skonštruujte postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ v množine X tak, aby pre nejakú podmnožinu A frekvencia $\text{frekv}_A(x_n)$ vôbec neexistovala (napr. pre $X = [0, 1]$, $A = [0, 1/2]$).

Cvičenie 2.2. Nech g je afinné zobrazenie, ktoré zobrazuje interval $[A, B]$ na interval $[C, D]$. Nech $\alpha = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v $[A, B]$ a $\omega = (g(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jej obraz v $[C, D]$. Dokážte, že α je r.r. v $[A, B]$ vtedy a len vtedy, keď ω je r.r. v $[C, D]$. Presvedčte sa, že analogické tvrdenie pre homeomorfizmy neplatí.

Cvičenie 2.3. Ukážte, že ak je postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ r.r. v $[A, B]$, tak je hustá v intervale $[A, B]$. Obrátené tvrdenie neplatí. (Porovnajte s Príkladom 2.2.)

Cvičenie 2.4. Ak r je racionálne číslo, tak postupnosť $\omega = (nr)_{n=1}^{\infty}$ nie je r.r. mod 1. (Porovnajte s Príkladom 2.15. Pre silnejšie tvrdenie pozri Cvičenie 2.7.)

Cvičenie 2.5. Pomocou Weylovho kritéria dokážte, že ak postupnosť $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, tak aj postupnosť $\omega_{\times m} = (m \cdot x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, pre každé $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Cvičenie 2.6. Dokážte, že ak postupnosť $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, tak aj postupnosť $\omega_{+c} = (x_n + c)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1, pre každé $c \in \mathbb{R}$.

Cvičenie 2.7. Nech $\theta, c \in \mathbb{R}$. Dokážte, že postupnosť $(n\theta + c)_{n=1}^{\infty}$ je r.r. mod 1 vtedy a len vtedy keď θ je iracionálne.

Cvičenie 2.8. Ak sú postupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1, je potom nevyhnutne aj postupnosť $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1?

Cvičenie 2.9. Dokážte, že číslo $\log_{10} 2$ je iracionálne. Zovšeobecnite.

Cvičenie 2.10. Ak je prirodzené číslo zapísané v dekadickej sústave, tak najľavejšiu cifru v tomto zápise nazývame *vedúcou cifrou* toho prirodzeného čísla (napr. 2018 má vedúcu cifru 2). Hovoríme tiež, že dané prirodzené číslo *začína* tou cifrou (teda 2018 začína cifrou 2). Uvažujme o postupnosti mocnín dvojky:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \dots$$

a príslušnej postupnosti prvých cifier:

$$2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, \dots \ .$$

(1) (*Gel'fandov problém.*) Nachádza sa v postupnosti prvých cifier mocnín dvojky cifra 7? Inak povedané, môže mocnina dvojky začínať sedmičkou?

(2) Nech $r \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Určte frekvenciu, s akou 2^n začína cifrou r.

(3) Je pravda, že mocnina dvojky môže začínať ľubovoľnou skupinou cifier, v ktorej na začiatku nie je 0? (Napr., existuje také prirodzené n, že 2^n začína skupinou cifier 2018?) Aká je frekvencia, s akou sa 2^n začína danou skupinou cifier?

Cvičenie 2.11. Určte frekvenciu, s akou má 2^n (v dekadickom zápise) druhú cifru zľava rovnú $r \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (napr. 2018 má druhú cifru zľava rovnú 0).

Cvičenie 2.12. Ukážte, že vo Weylovej vete o polynómoch platí dokonca ekvivalencia. Ak sú totiž koeficienty $\theta_1, \dots, \theta_k$ racionálne, tak $(p(n))_{n=1}^{\infty}$ nie je r.r. mod 1.

Cvičenie 2.13. Vyšetrite súvis medzi nasledujúcimi dvomi tvrdeniami.

(1) Postupnosť vektorov $\mathbf{x_n} = (x_{n,1}, \dots, x_{n,s})$, $n = 1, 2, \dots,$ je r.r. mod 1.

(2) Pre každé $k = 1, \dots, s$ je postupnosť k-tých súradníc $(x_{n,k})_{n=1}^{\infty}$ r.r. mod 1.

Cvičenie 2.14. Čísla $1, \theta$ sú racionálne nezávislé vtedy a len vtedy, keď θ je iracionálne. Dokážte to jednak na základe definície a jednak pomocou Lemy 2.22.

Projekt 2.15. Zovšeobecnite Cvičenia 2.10 a 2.11 (namiesto dvojky uvažujte o iných číslach a namiesto začiatočnej skupiny cifier uvažujte o všeobecnejších skupinách cifier).

Kapitola 3

Niektoré pojmy z teórie miery

Predpokladáme znalosť teórie miery a integrálu. Tu len zopakujeme/pridáme niekoľko pojmov.

3.1 Niektoré druhy mier

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je *priestor s mierou*, teda X je (neprázdna) množina, $\mathcal{B}$ je nejaká σ-algebra podmnožín množiny X a $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ je miera, teda nezáporná σ-aditívna množinová funkcia (definovaná na σ-algebre $\mathcal{B}$). Hovoríme, že je to miera na $\mathcal{B}$ alebo na $(X, \mathcal{B})$. Ak nemôže dôjsť k nedorozumeniu, teda ak pracujeme len s jednou σ-algebrou, prípadne je jasné o akej σ-algebre uvažujeme, hovoríme tiež, ze μ je miera na X. Pripomeňme, že množiny z $\mathcal{B}$ sa nazývajú merateľné, dvojica $(X, \mathcal{B})$ sa nazýva *merateľný priestor*. Samozrejme, ak hovoríme, že nejaká množina má takú či onakú mieru, napr. že má kladnú mieru, znamená to automaticky, aj ak to explicitne nepovieme, že je merateľná, veď inak by sa o jej miere ani nedalo hovoriť.

Pripomeňme ďalej, že

- μ je *netriviálna miera* (alebo *nenulová miera*), ak $\mu(X) > 0$;
- μ je *konečná miera*, ak $\mu(X) < \infty$;
- μ je *σ-konečná miera*, ak X je zjednotením spočítateľne veľa množín s konečnými mierami, teda $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, $\mu(S_i) < \infty$, $i = 1, 2, \dots$;
- μ je *pravdepodobnostná miera*, ak $\mu(X) = 1$. V takom prípade hovoríme, že $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je *pravdepodobnostný priestor*.

V priestore s triviálnou mierou má každá merateľná množina nulovú mieru. Lebesguova miera na intervale $[0, 1]$ je konečná a dokonca pravdepodobnostná. Lebesguova miera v $\mathbb{R}$ je σ-konečná (to dokazuje napr. vyjadrenie $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, +n]$ alebo $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$ apod.), nie je však konečná.

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Nasledujúca definícia je v súlade s Demokritovou predstavou atómu ako nedeliteľnej čiastočky hmoty:

- množina $A \in \mathcal{B}$ sa nazýva *atóm*, ak má kladnú mieru a nedá sa rozložiť na dve disjunktné merateľné množiny s kladnými mierami.

Teda $A \in \mathcal{B}$ je atóm, ak $\mu(A) > 0$ a neexistuje rozklad $A = P \sqcup Q$, kde $P, Q \in \mathcal{B}$, $\mu(P) > 0$, $\mu(Q) > 0$. Špeciálne, ak bod $x_0 \in X$ je taký, že $\{x_0\} \in \mathcal{B}$ a $\mu(\{x_0\}) > 0$, tak automaticky $\{x_0\}$ je atóm (trochu nepresne povedané, ak bod má kladnú mieru, tak je to automaticky atóm).

Príklad 3.1. Nech $X = \{a, b, c, \}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = 1$, $\mu(\{b, c\}) = 2$, $\mu(X) = 3$). Potom $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Množiny $\{a\}$ a $\{b, c\}$ sú atómy. Množiny $\emptyset$ a X atómami nie sú.

- Miera sa nazýva *neatomická*, ak nemá žiadne atómy (a nazýva sa *atomická*, ak nie je neatomická, teda ak má aspoň jeden atóm).

Inak povedané,

- miera μ je neatomická, ak každá množina kladnej miery má rozklad na dve disjunktné množiny s kladnými mierami.

Triviálna miera je samozrejme neatomická, ale to je nezaujímavý prípad. Ďalším príkladom neatomickej miery je napr. Lebesguova miera na $\mathbb{R}$ (Cvičenie 4.2).

Uvedieme jednoduchý ale veľmi dôležitý príklad atomickej miery.

Príklad 3.2 (Diracova miera). Nech X je množina a nech $x \in X$ je pevne zvolený bod. Položme

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in A, \\ 0, & \text{ak } x \in X \setminus A \end{cases}$$

pre každú množinu $A \subseteq X$. Potom zrejme δ_x je pravdepodobnostná miera na σ-algebre 2^X všetkých podmnožín množiny X (samozrejme, mohli by sme ju zúžiť na hocijakú menšiu σ-algebru). Nazývame ju *Diracova*[1] *miera v bode x* alebo tiež *miera sediaca v bode x*, či *miera sústredená v bode x*. Všimnite si, že je to atomická miera, lebo $\{x\}$ je atóm. Podľa takejto miery sa ľahko integruje. Každá reálna alebo komplexná funkcia f na X je δ_x-merateľná (lebo každá podmnožina množiny X je δ_x-merateľná) a aj δ_x-integrovateľná, pričom

$$\int f \, d\delta_x = f(x).$$

Dalo by sa to dokazovať štandardným spôsobom, t.j. najskôr pre charakteristické funkcie, potom pre jednoduché (schodovité) funkcie, potom pre nezáporné a nakoniec pre ľubovoľné funkcie. Jednoduchšie je však využiť, že funkcie rovnajúce sa skoro všade majú rovnaké integrály. Funkcia f sa δ_x-skoro všade rovná konštantnej funkcii $g \equiv f(x)$. Preto

$$\int f \, d\delta_x = \int g \, d\delta_x = \delta_x(X) f(x) = f(x).$$

3.2 Zúplnenie miery

Pripomeňme fakty o zúplnení miery.

Definícia 3.3. V priestore s mierou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sa miera μ nazýva *úplná*, ak podmienky $Z \subseteq A$ a $\mu(A) = 0$ implikujú $Z \in \mathcal{A}$. Potom, vďaka monotónnosti miery μ je aj $\mu(Z) = 0$.

[1] Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984) bol britský teoretický fyzik. Za svoju základnú prácu v kvantovej fyzike (Princípy kvantovej mechaniky) získal v roku 1933 Nobelovu cenu spoločne s Erwinom Schrödingerom.

Poznamenajme, že napr. zúženie vonkajšej miery μ^* na σ-algebru μ^*-merateľných množín je úplná miera. Lebesguova miera v $\mathbb{R}^n$ sa štandardne definuje práve takto, preto vidieť, že je na σ-algebre všetkých lebesguovsky merateľných množín úplná.

Každý priestor s mierou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sa dá zúplniť tak, že mieru μ rozšírime na mieru $\overline{\mu}$ definovanú na väčšej σ-algebre $\overline{\mathcal{A}}$ generovanej σ-algebrou $\mathcal{A}$ a systémom všetkých podmnožín množín s mierou nula.

Veta 3.4. *Nech μ je miera na σ-algebre $\mathcal{A}$ a nech $\mathcal{Z}$ je systém všetkých podmnožín množín nulovej miery. Nech $\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup Z : A \in \mathcal{A}, Z \in \mathcal{Z}\}$. Definujme $\overline{\mu}$ na $\overline{\mathcal{A}}$ vzťahom $\overline{\mu}(A \cup Z) = \mu(A)$. Potom:*

(1) $\overline{\mathcal{A}}$ je σ-algebra obsahujúca $\mathcal{A}$ aj $\mathcal{Z}$.

(2) $\overline{\mu}$ je korektne definovaná miera na $\overline{\mathcal{A}}$, ktorá sa na $\mathcal{A}$ zhoduje s μ.

(3) $\overline{\mu}$ je úplná ($\overline{\mu}$ sa nazýva zúplnenie miery μ).

Poznamenajme, že množiny s nulovou mierou sa niekedy nazývajú *nulové množiny*. Teda v tejto vete je $\mathcal{Z}$ systém všetkých podmnožín všetkých nulových množín.

3.3 Borelovské množiny a lebesguovsky merateľné množiny

V metrickom priestore X (všeobecnejšie, v topologickom priestore) máme pojem otvorenej množiny. Budeme pracovať s podmnožinami priestoru X.

Najmenšia σ-algebra obsahujúca všetky otvorené množiny, teda σ-algebra generovaná systémom všetkých otvorených množín, sa označuje $\mathcal{B}_X$ alebo krátko $\mathcal{B}$ a nazýva sa σ-algebrou borelovských množín alebo borelovskou σ-algebrou (v X). Množiny do nej patriace sa nazývajú borelovské množiny (v X). Okrem otvorených množín patria teda medzi borelovské množiny napr. všetky uzavreté množiny, potom množiny typu G_δ (teda spočítateľné prieniky otvorených množín), množiny typu F_σ (teda spočítateľné zjednotenia uzavretých množín) a mnohé ďalšie.

V priestore $\mathbb{R}$ s euklidovskou metrikou je množina $\mathbb{Q}$ typu F_σ (ale nie G_δ) a jej komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je množina typu G_δ (ale nie F_σ). Nie sú ani otvorené ani uzavreté, sú však borelovské.

Uvažujme o množine $\mathbb{R}^n$. S euklidovskou metrikou tvorí metrický priestor, môžeme teda hovoriť o borelovských množinách. Na množine $\mathbb{R}^n$ máme však aj Lebesguovu mieru, môžeme teda hovoriť o lebesguovsky merateľných množinách. Z podmnožín množiny $\mathbb{R}^n$ možno vytvoriť rôzne σ-algebry. Okrem σ-algebry $2^{\mathbb{R}^n}$ všetkých podmnožín majú pre nás, ako sme práve naznačili, zvláštnu dôležitosť dve:

- σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ borelovských množín. Jej generátorom je napr. systém všetkých otvorených množín. (Namiesto otvorených množín možno vziať podsystém, ktorý generuje všetky otvorené množiny. Ak sme napr. v $\mathbb{R}$, môžeme vziať systém všetkých otvorených intervalov alebo systém všetkých uzavretých intervalov alebo systém všetkých intervalov tvaru $[a, b)$ apod.; na vygenerovanie všetkých borelovských množín v $[0, 1]$ stačí dokonca systém všetkých intervalov tvaru $[0, b]$, $0 < b \leq 1$).

- σ-algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ lebesguovsky merateľných množín. Generovaná je otvorenými množinami a množinami nulovej miery. (Opäť, systém všetkých otvorených množín tu možno nahradiť podsystémom, ktorý generuje všetky otvorené množiny.)

Z teórie miery je dobre známe, že každá borelovská množina v $\mathbb{R}^n$ je lebesguovsky merateľná. Obrátené tvrdenie neplatí, lebesguovsky merateľných množín je viac.

Príklad 3.5 ($\mathcal{L}_\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}_\mathbb{R} \neq \emptyset$.). Ukážeme, že existujú lebesguovsky merateľné množiny, ktoré nie sú borelovské. Štandardná strednotretinová Cantorova množina má nulovú Lebesguovu mieru a mohutnosť c, preto má $2^c > c$ podmnožín. Každá z týchto 2^c podmnožín je lebesguovsky merateľná, lebo Lebesguova miera je úplná. Na druhej strane, v deskriptívnej teórii množín sa dokazuje, že všetkých borelovských množín je c.[2] Preto v C existuje 2^c takých podmnožín, ktoré patria do $\mathcal{L}_\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}_\mathbb{R}$.[3]

Namiesto strednotretinovej Cantorovej množiny sme mohli vziať ľubovoľnú množinu, ktorá má nulovú Lebesguovu mieru a má mohutnosť c. Platí tiež: Každá lebesguovsky merateľná množina kladnej miery obsahuje podmnožinu, ktorá nie je lebesguovsky merateľná.

Z teórie miery je tiež dobre známe, že nie každá podmnožina $\mathbb{R}^n$ je lebesguovsky merateľná. Napr. tzv. Vitaliho množina patrí do $2^\mathbb{R} \setminus \mathcal{L}_\mathbb{R}$. Platí teda

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \subsetneq 2^{\mathbb{R}^n}.$$

Medzi každými dvomi σ-algebrami v tejto hierarchii troch σ-algebier existujú mnohé ďalšie σ-algebry. Ak nemôže vzniknúť nedorozumenie, budeme používať skrátené označenia $\mathcal{B}$ a $\mathcal{L}$.

To znamená, že keď hovoríme o Lebesguovej miere Leb, môžeme ju uvažovať ako mieru $\mathrm{Leb}_\mathcal{B}$ definovanú na $\mathcal{B}$ alebo ako mieru $\mathrm{Leb}_\mathcal{L}$ definovanú na $\mathcal{L}$. Na $\mathcal{B}$ sa obe miery zhodujú. Miera $\mathrm{Leb}_\mathcal{B}$ nie je úplná (podmnožina borelovskej množiny nulovej miery nemusí byť borelovská, pozri napr. Príklad 3.5). Miera $\mathrm{Leb}_\mathcal{L}$ je úplná (podmnožina lebesguovsky merateľnej množiny *nulovej miery* je lebesguovsky merateľná; z monotónnosti miery potom vyplýva, že má nulovú mieru[4]).

Miera $\mathrm{Leb}_\mathcal{L}$ je zúplnením miery $\mathrm{Leb}_\mathcal{B}$. Platí teda (pozri Vetu 3.4):

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{B}} := \{B \cup Z : B \in \mathcal{B}, Z \in \mathcal{Z}\} \qquad \text{kde} \quad \mathcal{Z} = \{Z \colon Z \subseteq N \in \mathcal{B}, \mathrm{Leb}_\mathcal{B}(N) = 0\}.$$

To, že σ-algebra $\mathcal{L}$ je zúplnením σ-algebry $\mathcal{B}$ vzhľadom na Lebesguovu mieru $\mathrm{Leb}_\mathcal{B}$, sa dá ekvivalentne vyjadriť aj nasledovne:

- $E \in \mathcal{L}$ vtedy a len vtedy, keď existujú množiny $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ také, že $B_1 \subseteq E \subseteq B_2$ a $\mathrm{Leb}_\mathcal{B}(B_2 \setminus B_1) = 0$.

(Táto podmienka je ekvivalentá s tým, že pre každé $\varepsilon > 0$ existujú množiny $B_1^\varepsilon, B_2^\varepsilon \in \mathcal{B}$ také, že $B_1^\varepsilon \subseteq E \subseteq B_2^\varepsilon$ a $\mathrm{Leb}_\mathcal{B}(B_2^\varepsilon \setminus B_1^\varepsilon) < \varepsilon$.)

Uvedieme, hoci bez prílišných detailov, ešte jeden poučný príklad.

Príklad 3.6 (Homeomorfný obraz množiny z $\mathcal{L}$ nemusí patriť do $\mathcal{L}$). Nájdeme homeomorfizmus $F\colon [0,1] \to [0,2]$, ktorý má nasledujúce vlastnosti (funkcia $(1/2)F$ by bola takým homeomorfizmom $[0,1] \to [0,1]$).

(a) F zobrazuje nejakú množinu C nulovej Lebesguovej miery na množinu $F(C)$ kladnej Lebesguovej miery. (Inverzný homeomorfizmus $G = F^{-1}$ teda zobrazuje nejakú množinu $F(C)$ kladnej miery na množinu C nulovej miery.)

[2] Existuje tiež zaujímavý súvisiaci výsledok: Akákoľvek σ-algebra (na akejkoľvek množine) je alebo konečná (a vtedy je to algebra) alebo má mohutnosť aspoň c. Teda neexistuje nekonečná spočítateľná σ-algebra.

[3] Ak z množiny mohutnosti 2^c odoberiete podmnožinu mohutnosti najviac c, dostanete množinu, ktorej mohutnosť je ešte stále 2^c.

[4] Pozor, nie je pravda, že podmnožina lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná, veď to by potom každá podmnožina $\mathbb{R}$ bola lebesguovsky merateľná. Podobne, ako sme už videli, nie je pravda, že podmnožina borelovskej množiny je borelovská.

(b) F zobrazuje nejakú lebesguovsky merateľnú množinu na množinu, ktorá nie je lebesguovsky merateľná. (Inverzný homeomorfizmus $G = F^{-1}$ teda zobrazuje nejakú nemerateľnú množinu na merateľnú množinu.)

(c) F-vzor každej lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina.

Nech C je štandardná stredno-tretinová Cantorova množina. Nech $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ je tzv. Cantorova funkcia (nazývaná niekedy aj diablove schody). Pripomeňme, že je to spojitá neklesajúca surjektívna funkcia, ktorá je na každom styčnom intervale konštantná a zobrazuje Cantorovu množinu C na $[0,1]$. Potom funkcia $F(x) = x + \varphi(x)$ je homeomorfizmus $[0,1] \to [0,2]$. Ukážeme, že má požadované vlastnosti.

$F(C)$ je merateľná (dokonca uzavretá) množina s mierou $\mathrm{Leb}(F(C)) = 1$, hoci $\mathrm{Leb}(C) = 0$. Teda máme (a).

Keďže každá množina kladnej Lebesguovej miery obsahuje nemerateľnú podmnožinu, existuje nemerateľná množina $D \subseteq F(C)$. Ak ju zobrazíme homeomorfizmom F^{-1}, dostaneme množinu $F^{-1}(D) \subseteq C$. Množina $F^{-1}(D)$ je merateľná (lebo je podmnožinou množiny nulovej Lebesguovej miery a Lebesguova miera je úplná) a $\mathrm{Leb}(F^{-1}D) = 0$. Teda F zobrazuje merateľnú množinu $F^{-1}(D)$ na nemerateľnú D.[5] Dostali sme (b).

Cantorova funkcia φ má pozoruhodnú vlastnosť. Ak $A \subseteq [0,1]$ je hocijaká množina (nemusí byť ani merateľná), tak jej vzor $\varphi^{-1}(A)$ je lebesguovsky merateľná množina. Naozaj, tento vzor je zjednotením nejakej podmnožiny Cantorovej množiny C a niektorých styčných intervalov. Preto je to lebesguovsky merateľná množina. Modifikujte túto úvahu, aby ste ukázali (c).

Príklad je varovaním. Aj keď by zobrazenie T bolo homeomorfizmom (a teda aj obraz aj vzor borelovskej množiny by automaticky bola borelovská množina), nemôžeme si automaticky myslieť, že obraz lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina a že vzor lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina (pozri časť (b)). Rovnako si nemôžeme automaticky myslieť, že obraz lebesguovsky nulovej množiny je nulová množina a že vzor lebesguovsky nulovej množiny je nulová množina (pozri časť (a)).

Podľa Dôsledku 4.28 však platí:

- ak zobrazenie medzi otvorenými množinami v $\mathbb{R}^n$ je C^1-difeomorfizmus, tak aj obrazy aj vzory lebesguovsky merateľných množín sú lebesguovsky merateľné množiny a aj obrazy aj vzory množín *nulovej* Lebesguovej miery sú množiny *nulovej* Lebesguovej miery.

Ďalšie zaujímavé informácie nájde čitateľ napr. v [BoI, Section 3.6].

3.4 Výroba nových mier zo starých

Miery možno násobiť (nezápornými) reálnymi číslami a možno ich aj sčitovať. Ak $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor a μ_1, μ_2 sú miery na $\mathcal{B}$ a c_1, c_2 sú nezáporné reálne čísla, tak symbolom

$$\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$$

označujeme funkciu $\mathcal{B} \to [0, \infty]$ definovanú vzťahom

$$\mu(A) = c_1\mu_1(A) + c_2\mu_2(A), \qquad A \in \mathcal{B}.$$

[5] Nie je bez zaujímavosti dodať, že množina $F^{-1}(D)$ je síce merateľná, ale nie je borelovská (teda znovu máme príklad lebesguovsky merateľnej neborelovskej podmnožiny Cantorovej množiny, pozri aj Príklad 3.5). Keby bola borelovská, tak aj jej homeomorfný obraz D by bola borelovská množina. Lenže borelovské množiny sú lebesguovsky merateľné, čo je v spore s tým že D nie je merateľná.

Všimnite si, že uvažujeme len lineárne kombinácie mier s *nezápornými* koeficientami, aby sme mali istotu, že μ je nezáporná (miera musí byť nezáporná).

Propozícia 3.7. *Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor a nech μ_1, μ_2 sú miery na $\mathcal{B}$. Potom platia nasledujúce tvrdenia.*

(1) (násobok miery) Ak $c \geq 0$, tak $\mu := c\mu_1$ je miera na $\mathcal{B}$.

(2) (súčet mier) $\mu := \mu_1 + \mu_2$ je miera na $\mathcal{B}$.

(3) (lineárna kombinácia mier) Ak $c_1, c_2 \geq 0$, tak $\mu := c_1\mu_1 + c_2\mu_2$ je miera na $\mathcal{B}$. Ak μ_1, μ_2 sú konečné, resp. σ-konečné miery, tak aj μ je konečná, resp. σ-konečná miera.

(4) (konvexná kombinácia mier) Ak $c \in [0, 1]$, tak $\mu := (1 - c)\mu_1 + c\mu_2$ je miera na $\mathcal{B}$. Pre každú merateľnú množinu A leží hodnota $\mu(A)$ v konvexnom obale hodnôt $\mu_1(A)$ a $\mu_2(A)$. Ak μ_1, μ_2 sú pravdepodobnostné miery, tak aj μ je pravdepodobnostná miera.

Dôkaz. Cvičenie 4.1. □

Nasledujúca propozícia ukazuje, ako sa integruje podľa miery, ktorá je lineárnou kombináciou mier.

Propozícia 3.8. *Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor, $\mu_1, \dots, \mu_n$ sú miery na $\mathcal{B}$ a $c_1, \dots, c_n$ sú nezáporné reálne čísla. Nech f je reálna (alebo komplexná) funkcia na X, ktorá je integrovateľná vzhľadom na každú z mier μ_i. Potom je integrovateľná aj vzhľadom na mieru $c_1\mu_1 + \cdots + c_n\mu_n$ a platí*

$$\int f\, d(c_1\mu_1 + \cdots + c_n\mu_n) = c_1 \int f\, d\mu_1 + \cdots + c_n \int f\, d\mu_n.$$

Dôkaz. Cvičenie 4.4. □

Príklad 3.9 (Miera sediaca v spočítateľnej množine). Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor. Zvoľme nekonečnú spočítateľnú množinu bodov $x_1, x_2, \dots \in X$ a kladné 'váhy' $w_1, w_2, \dots$. Potom môžeme uvažovať o miere

$$\mu := \sum_{i=1}^{\infty} w_i \delta_{x_i}$$

definovanej na $\mathcal{B}$ vzťahom

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} w_i \delta_{x_i}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \{w_i \colon x_i \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Ak rad konverguje, je $\mu(A)$ nezáporné číslo. Ak diverguje, je $\mu(A) = +\infty$. Ak je $\sum_{i=1}^{\infty} w_i = 1$, ide o pravdepodobnostnú mieru.

Podobne možno definovať (pravdepodobnostnú) mieru sediacu v konečnej množine. (Iná možnosť je používať nezáporné váhy, potom konečný prípad je zahrnutý v nekonečnom spočítateľnom prípade.)

Príklad 3.10 (Výroba pravdepodobnostnej miery z konečnej miery). Predpokladajme, že $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľný priestor s konečnou nenulovou mierou, t.j. $0 < \mu(X) < \infty$. Pre každé $B \in \mathcal{B}$ položme

$$\nu(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(X)}\ .$$

Potom ν je zrejme pravdepodobnostná miera na $(X, \mathcal{B})$. Teda medzi konečnými a pravdepodobnostnými mierami nie je v teórii veľký rozdiel.

Príklad 3.11 (Podmienená miera). Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľný priestor a nech $E \in \mathcal{B}$. Predpokladajme, že $0 < \mu(E) < \infty$ (aby sme touto hodnotou mohli bez problémov deliť). Potom môžeme definovať *podmienenú mieru* $\mu_E \colon \mathcal{B} \to [0, 1]$:

$$\mu_E(A) := \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(E)}, \qquad A \in \mathcal{B}.$$

(Pozri Obr 3.1.)

Obr. 3.1: Podmienená miera

Všimnite si, že takto definovaná podmienená miera je pravdepodobnostná miera.[6]

Ukážeme, ako možno Lebesguovu mieru preniesť na kružnicu.

Príklad 3.12 (Lebesguova miera na kružnici). Nech $\mathbb{S}^1$ je kružnica, teda $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Kružnicu môžeme chápať aj ako interval $[0, 1]$ so zlepenými koncami (čísla $1/10$ a $8/10$ majú na intervale $[0, 1]$ vzdialenosť $7/10$, na kružnici vzdialenosť $3/10$). Nech $\mathcal{B}$ je σ-algebra všetkých borelovských množín v $\mathbb{S}^1$. Mieru λ na $\mathcal{B}$ definujeme nasledovne. Každej (borelovskej) podmnožine kružnice jednoznačne zodpovedá (borelovská) podmnožina intervalu $[0, 1)$; jej Lebesguovu mieru prehlásime za λ-mieru tej podmnožiny kružnice. Je prirodzené mieru λ nazývať Lebesguovou mierou na kružnici. Podobne ako Lebesguova miera na $\mathbb{R}$ alebo na $[0, 1]$, označuje sa niekedy aj Leb alebo Leb_1 (kde index 1 zdôrazňuje, že ide o jednorozmernú Lebesguovu mieru).

3.5 Jednoznačnosť mier

Nech X je množina a nech 2^X je systém *všetkých* podmnožín množiny X. Nech $\mathcal{G} \subseteq 2^X$, teda nech $\mathcal{G}$ je *nejaký* systém podmnožín množiny X. Potom existuje najmenšia σ-algebra obsahujúca $\mathcal{G}$.[7] Označujeme ju $\sigma(\mathcal{G})$. Hovoríme tiež, že je to σ-algebra *generovaná* systémom $\mathcal{G}$. Systém $\mathcal{G}$ sa nazýva *generátor* tej σ-algebry. Pripomeňme, že $\sigma(\mathcal{G})$ nie je nič iné ako prienik všetkých σ-algebier na X, ktoré obsahujú $\mathcal{G}$.

Ak sa dve σ-konečné miery definované na tej istej σ-algebre zhodujú na generujúcej algebre, tak sa zhodujú na celej σ-algebre. To je štandardná veta z teórie miery. Jej presné znenie nasleduje.

Veta 3.13. *Nech μ_1 a μ_2 sú dve σ-*konečné* miery na tom istom merateľnom priestore $(X, \mathcal{B})$. Nech $\mathcal{A}$ je* algebra*, ktorá generuje σ-algebru $\mathcal{B}$. Predpokladajme, že pre každú množinu $A \in \mathcal{A}$ je $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Potom $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ pre každú množinu $B \in \mathcal{B}$ (a teda $\mu_1 = \mu_2$).*

[6] Porovnajte s definíciou podmienenej pravdepodobnosti.

[7] Presnejšie: obsahujúca každú množinu z $\mathcal{G}$.

Teda aby sa dve σ-konečné miery na nejakej σ-algebre $\mathcal{B}$ zhodovali, stačí, aby sa zhodovali na nejakom takom generátore $\mathcal{A}$ tej σ-algebry, ktorý je algebrou.

Vo všeobecnosti k rovnosti σ-konečných mier na σ-algebre $\mathcal{B}$ nestačí, aby sa tieto zhodovali na nejakom generátore $\mathcal{G}$ tej σ-algebry. Inak povedané, vynechať predpoklad, že $\mathcal{G}$ je algebra (a nič namiesto neho nepridať) nemožno.

Uvedieme dva príklady, ktoré to ukazujú.

Príklad 3.14. Majme trojprvkový priestor $X = \{a, b, c\}$ a uvažujme o σ-algebre 2^X tvorenej všetkými jeho podmnožinami. Nech μ_1 je tá (jediná) miera na 2^X, pre ktorú

$$\mu_1(\{a\}) = \mu_1(\{b\}) = \mu_1(\{c\}) = \frac{1}{2}.$$

Podobne, nech miera μ_2 na 2^X je daná hodnotami

$$\mu_2(\{a\}) = \frac{1}{3}, \quad \mu_2(\{b\}) = \frac{2}{3}, \quad \mu_2(\{c\}) = \frac{1}{3}.$$

Na oboch množinách zo systému

$$\mathcal{G} = \{A, C\} \quad \text{kde} \quad A = \{a, b\},\, B = \{b, c\}$$

sa tieto dve miery zhodujú. Pritom $\mathcal{G}$ je zrejme generátor pre σ-algebru 2^X. Napriek tomu sa tie miery nezhodujú na celej σ-algebre 2^X. Nie je to spor s Vetou 3.13, lebo systém $\mathcal{G}$ nie je algebra.

Vo vete je dôležité, že $\mathcal{A}$ je generujúca *algebra* a nielen nejaký generujúci podsystém σ-algebry $\mathcal{B}$, hoc by sa nám ten podsystém aj zdal dostatočne veľký na to, aby veta preň platila.

Príklad 3.15. Podľa [Dav71],

- existuje kompaktný metrický priestor X a dve konečné miery μ_1 a μ_2 na σ-algebre $\mathcal{B}$ všetkých borelovských podmnožín priestoru X s tou vlastnosťou, že $\mu_1(G) = \mu_2(G)$ pre každú uzavretú guľu v priestore X, ale napriek tomu sa μ_1 a μ_2 nerovnajú.

To je prekvapujúce, veď nielenže systém $\mathcal{G}$ všetkých uzavretých gúľ v X je generátorom borelovskej σ-algebry $\mathcal{B}$,[8] ale sa zdá byť aj dostatočne veľkým na to, aby preň Veta 3.13 platila. Nie je to pravda.[9]

Vyvstáva otázka, aké dodatočné predpoklady o generátore $\mathcal{G}$ (namiesto požiadavky, aby to bola algebra), stačia na to, aby platila analógia Vety 3.13. Také podmienky udáva Dynkinova veta o jednoznačnosti miery, pozri napr. [C13, Corollary 1.6.4] alebo [Sch05, Theorem 5.7].

Veta 3.16 (Dynkinova veta o jednoznačnosti mier). *Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor. Predpokladajme, že $\mathcal{G}$ je generátor σ-algebry $\mathcal{B}$ (t.j. $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$), ktorý má tieto vlastnosti:*

(i) $\mathcal{G}$ je uzavretý vzhľadom na konečné prieniky (t.j. $G, H \in \mathcal{G} \implies G \cap H \in \mathcal{G}$);

(ii) v $\mathcal{G}$ existuje rastúca postupnosť množín $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ taká, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = X$.

[8] Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}$ je generovaná systémom všetkých otvorených množín. Lenže každá otvorená množina v kompaktnom metrickom priestore je spočítateľným zjednotením uzavretých gúľ. Preto $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$.

[9] To mimochodom znamená, že v uvedenom priestore X systém $\mathcal{G}$ všetkých uzavretých gúľ určite nie je algebrou generujúcou borelovskú σ-algebru $\mathcal{B}$. Neprekvapuje nás, že tento konkrétny priestor X má túto vlastnosť. Veď v kompaktnom metrickom priestore X systém všetkých uzavretých gúľ väčšinou nie je uzavretý napr. na konečné zjednotenia, teda nie je to algebra.

Potom ak sa dve miery μ, ν definované na $\mathcal{B}$ zhodujú na generátore $\mathcal{G}$ a sú konečné na množinách $G_1, G_2, \dots$ z podmienky (ii), tak je to jedna a tá istá miera (μ, ν sa zhodujú na $\mathcal{B}$, t.j. $\mu(A) = \nu(A)$ pre všetky $A \in \mathcal{B}$).

Pripojme niekoľko poznámok.

- Z predpokladov o mierach μ, ν vzhľadom na podmienku (ii) vyplýva, že sa veta týka len prípadu, keď μ a ν sú σ-konečné miery.
- V podmienke (ii) možno vynechať predpoklad, že postupnosť množín $G_1, G_2, \dots$ je rastúca. (Naozaj, predpoklad $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = X$ nám pre množiny $\widetilde{G}_j := G_1 \cup \dots \cup G_j$ dá, že $\widetilde{G}_1 \subseteq \widetilde{G}_2 \subseteq \dots$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{G}_j = X$. Navyše, ak sa miery μ, ν zhodujú a sú konečné na množinách $G_1, G_2, \dots$, tak sa zhodujú a sú konečné aj na množinách $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \dots$, takže môžeme použiť Vetu 4.8.)
- Ak μ a ν sú konečné, tak podmienku (ii) možno vynechať úplne, je splnená automaticky. (Naozaj, stačí do $\mathcal{G}$ pridať množinu X. Tým sa splnenie podmienky (i) nenaruší a podmienka (ii) bude splnená napr. pre voľbu $G_j = X$, $j = 1, 2, \dots$.)

3.6 Absolútne spojité miery

Absolútna spojitosť má v matematike viacero významov. Nás teraz zaujíma absolútna spojitosť mier.

Definícia 3.17. Nech μ a ν sú dve miery na tom istom merateľnom priestore $(X, \mathcal{B})$. Potom hovoríme, že miera ν je *absolútne spojitá* vzhľadom na mieru μ, ak pre každú merateľnú množinu E platí implikácia

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0.$$

V takom prípade píšeme $\nu \ll \mu$. Ak každá z mier μ a ν je absolútne spojitá vzhľadom na druhú mieru, t.j. ak platí $\nu \ll \mu$ a zároveň $\mu \ll \nu$, tak hovoríme, že miery μ a ν sú *ekvivalentné* a píšeme $\mu \sim \nu$. Teda dve miery sú ekvivalentné, ak majú presne tie isté množiny nulovej miery.

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $\varrho \colon X \to [0, +\infty)$ je nezáporná merateľná funkcia.[10] Pripomeňme známu vetu, že potom množinová funkcia

$$\nu \colon A \mapsto \int_A \varrho \, d\mu = \int \chi_A \varrho \, d\mu, \qquad A \in \mathcal{B} \tag{3.1}$$

je nová miera na $(X, \mathcal{B})$.

Definícia 3.18. Miera (3.1) sa nazýva *miera s hustotou ϱ vzhľadom na mieru μ*. Píšeme

$$\nu = \varrho \, \mu \qquad \text{alebo} \qquad d\nu = \varrho \, d\mu.$$

Ak ν má hustotu vzhľadom na μ, tak na označenie tejto hustoty sa tradične používa označenie $d\nu/d\mu$ (toto označenie treba chápať čisto symbolicky). Teda $d\nu = \varrho \, d\mu$ znamená to isté ako

$$\varrho = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Funkcii ϱ sa niekedy namiesto *hustota* hovorí *Radonova-Nikodymova hustota* alebo *Radonova-Nikodymova derivácia* miery ν vzhľadom na mieru μ.

[10] Teda má integrál na každej merateľnej množine, v najhoršom prípade nekonečný.

Všimnime si, že ak máme (3.1), t.j. $\nu = \varrho\,\mu$, tak $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$, teda $\nu \ll \mu$. To znamená, že absolútna spojitosť vzhľadom na mieru μ je nutná podmienka na to, aby sa miera dala vyjadriť v tvare (3.1), t.j. aby Radonova-Nikodymova derivácia miery ν vzhľadom na mieru μ existovala. Radonova-Nikodymova veta hovorí, že ak miera μ je σ-konečná, tak je to aj postačujúca podmienka.

Veta 3.19 (Radonova-Nikodymova veta). *Nech μ a ν sú dve miery na tom istom merateľnom priestore $(X, \mathcal{B})$. Ak μ je σ-konečná, tak nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:*

(1) $\nu = \varrho\,\mu$ (t.j. $\nu(A) = \int_A \varrho\,d\mu$, $A \in \mathcal{B}$) pre nejakú $\mathcal{B}$-merateľnú funkciu $\varrho \geq 0$;

(2) $\nu \ll \mu$.

Funkcia ϱ je jediná v tom zmysle, že každé dve také funkcie spĺňajúce (1) sa rovnajú μ-skoro všade.[11]

Ide o hlbokú vetu, pozri napr. [Yeh14, Theorem 11.16 a Proposition 11.2] alebo [Sch05, Theorem 20.2]. Nasledujúcu vetu možno nájsť napr. v [Yeh14, Theorem 11.21].

Veta 3.20. *Nech μ a ν sú dve miery na tom istom merateľnom priestore $(X, \mathcal{B})$. Ak sú obe σ-konečné a ak $\nu = \varrho\,\mu$, tak platí nielen $\nu(A) = \int_A \varrho\,d\mu$, $A \in \mathcal{B}$,*[12] *ale dokonca*

$$\int f\,d\nu = \int f\varrho\,d\mu \quad \left(= \int f\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu\right) \qquad \text{pre každú } \mathcal{B}\text{-merateľnú funkciu } f\colon X \to \mathbb{R} \tag{3.2}$$

(v tom zmysle, že ak existuje integrál na jednej zo strán, tak existuje aj integrál na druhej strane a rovnajú sa).

Príklad 3.21. Na σ-algebre $\mathcal{L}$ lebesguovsky merateľných podmnožín reálnej osi uvažujme Lebesguovu mieru Leb a jej dvojnásobok $\nu = 2\,\mathrm{Leb}$. Potom tieto dve miery sú zrejme ekvivalentné. Nájsť obe príslušné Radonove-Nikodymove derivácie je v tomto jednoduchom príklade ľahké. Obidve tie derivácie sú konštantné funkcie na $\mathbb{R}$. Platí $\frac{d\nu}{d\,\mathrm{Leb}} = 2$, lebo pre každú množinu $A \in \mathcal{L}$ je $\nu(A) = 2\,\mathrm{Leb}(A) = \int_A 2\,d\,\mathrm{Leb}$. Podobne, $\frac{d\,\mathrm{Leb}}{d\nu} = \frac{1}{2}$.

Príklad 3.22. Nech c je kladná konštanta. Uvažujme o miere ν definovanej takto:[13]

$$\nu(A) = \int_A \frac{c}{1+x}\,dx, \qquad \text{pre každú lebesguovsky merateľnú množinu } A \subseteq [0,1].^{14}$$

Podľa vyššie uvedeného faktu o (3.1), je ν miera na σ-algebre $\mathcal{L}_{[0,1]}$ lebesguovsky merateľných podmnožín intervalu $[0,1]$. Je tiež zrejmé, že je to konečná miera. Navyše, integrovaná funkcia nadobúda hodnoty z intervalu $[c/2, c]$. Preto

$$\frac{c}{2}\cdot \mathrm{Leb}(A) \leq \nu(A) \leq c\cdot \mathrm{Leb}(A) \qquad \text{pre každú množinu } A \in \mathcal{L}_{[0,1]}.$$

Z toho vyplýva (keďže c je kladné číslo), že

$$\nu(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Leb}(A) = 0 \qquad \text{pre každú množinu } A \in \mathcal{L}_{[0,1]}.$$

[11] Teda aj ν-skoro všade, lebo $\nu \ll \mu$.
[12] To dostanete z nasledujúceho vzťahu voľbou $f = \chi_A$.
[13] Prísne vzaté, mali by sme ju označiť napr. ν_c, lebo závisí od c.
[14] Teda ide o Lebesguov integrál a mohli sme precíznejšie písať $\int_A \frac{c}{1+x}\,d\,\mathrm{Leb}$. Keďže tu integrujeme spojitú kladnú funkciu, je zrejmé, že množinová funkcia ν je dobre definovaná.

Miera ν je teda ekvivalentná s Lebesguovou mierou; $\nu \sim \mathrm{Leb}$ alebo presnejšie $\nu \sim \mathrm{Leb}_{[0,1]}$.

Funkcia $\varrho(x) = c/(1+x)$ je hustota miery ν vzhľadom na mieru $\mathrm{Leb}_{[0,1]}$, teda Radonova-Nikodymova derivácia miery ν vzhľadom na mieru $\mathrm{Leb}_{[0,1]}$. Môžeme písať $\varrho = d\nu/d\,\mathrm{Leb}_{[0,1]}$.[15]

3.7 Push-forward miera a integrovanie podľa nej

Nech $(X, \mathcal{B})$ a $(Y, \mathcal{S})$ sú merateľné priestory. Pripomeňme, že zobrazenie

$$T\colon (X, \mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{S})$$

sa volá *merateľné*,[16] ak

$$A \in \mathcal{S} \Rightarrow T^{-1}(A) \in \mathcal{B}\ .$$

Symbolom $T^{-1}(A)$, alebo kratšie $T^{-1}A$, tu označujeme plný *vzor* množiny A, teda $T^{-1}(A) = \{x \in X\colon T(x) \in A\}$. Zdôraznime, že nepožadujeme, aby *obraz* merateľnej množiny bola merateľná množina. Vždy, keď budeme písať

$$T\colon (X, \mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{S}),$$

budeme mať na mysli, že T je merateľné. Nemerateľnými zobrazeniami sa vôbec nebudeme zaoberať.

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou ale $(Y, \mathcal{S})$ je iba merateľný priestor. Majme merateľné zobrazenie $T\colon (X, \mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{S})$. Dovolíme si to zapísať v tvare, ktorý zdôrazňuje, že 'vľavo' máme aj mieru:

$$T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (Y, \mathcal{S}).$$

V takom prípade existuje prirodzený spôsob ako 'potlačit" mieru μ 'zľava doprava', teda ako preniesť mieru v smere merateľného zobrazenia T. Definujeme tzv. *push-forward mieru* $T_*(\mu)$, krátko $T_*\mu$,

$$T_*\mu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$$

vzťahom $T_*\mu := \mu \circ T^{-1}$, čím máme na mysli, že (pozri Obr. 3.2)

$$T_*\mu(A) := \mu(T^{-1}A), \qquad A \in \mathcal{S}.$$

Obr. 3.2: Mieru zľava doprava možno 'potlačit". Dostaneme tak push-forward mieru

Uvedomte si, že vďaka merateľnosti T veličina $\mu(T^{-1}A)$ existuje, teda množinová funkcia $T_*(\mu)$, niekedy sa používa kratšie označenie $T_*\mu$, je dobre definovaná. Je to dokonca miera.

[15] Keďže nielen $\nu \ll \mathrm{Leb}$, ale aj $\mathrm{Leb} \ll \nu$, tak podľa Radonovej-Nikodymovej verty existuje aj Radonova-Nikodymova derivácia $d\,\mathrm{Leb}\,/d\nu$, určiť ju by však bolo ťažšie.

[16] Takéto zobrazenie sa v ergodickej teórii volá aj transformácia, preto je štandardné označenie T. Niektorí autori však používajú označenie f.

Propozícia 3.23. *Nech $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (Y,\mathcal{S})$ je merateľné zobrazenie. Potom push-forward miera $T_*\mu$ je miera na $\mathcal{S}$.*

Dôkaz. Cvičenie 4.5. □

Príklad 3.24 (Push-forward Diracovej miery). Ak máme merateľné zobrazenie $T\colon (X,\mathcal{B},\delta_x) \to (Y,\mathcal{S})$ a potlačíme 'dopredu' ('zľava doprava') Diracovu mieru δ_x, teda mieru sediacu v bode $x \in X$, dostaneme mieru sediacu v bode $T(x) \in Y$. Inak povedané, tvrdíme, že

$$T_*\delta_x = \delta_{T(x)}.$$

Aby sme sa o tom presvedčili, zvoľme $A \in \mathcal{S}$. Potom

$$\begin{aligned} T_*\delta_x(A) = \delta_x(T^{-1}A) &= \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in T^{-1}A, \\ 0, & \text{ak } x \in X \setminus T^{-1}A \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ak } T(x) \in A, \\ 0, & \text{ak } T(x) \in Y \setminus A \end{cases} \\ &= \delta_{T(x)}(A). \end{aligned}$$

Bude užitočné ujasniť si, ako sa integruje podľa push-forward miery. Využijeme nasledujúci jednoduchý fakt.

Lema 3.25. *Nech $T\colon X \to Y$, $A \subseteq Y$. Potom pre charakteristické funkcie platí*

$$\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}.$$

Dôkaz. Jedna i druhá funkcia je definovaná na X a má hodnoty v $\mathbb{R}$, dokonca v $\{0,1\}$. Pre každé $x \in X$ je

$$\begin{aligned} \chi_A \circ T(x) = \chi_A(T(x)) &= \begin{cases} 1, & \text{ak } T(x) \in A \\ 0, & \text{ak } T(x) \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in T^{-1}(A) \\ 0, & \text{ak } x \notin T^{-1}(A) \end{cases} \\ &= \chi_{T^{-1}(A)}(x). \end{aligned}$$

□

Propozícia 3.26. *Nech $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (Y,\mathcal{S})$ je merateľné zobrazenie a nech $f\colon Y \to \mathbb{C}$ je funkcia.*

(1) Ak $f\colon Y \to \mathbb{C}$ je merateľná, tak aj $f \circ T\colon X \to \mathbb{C}$ je merateľná.[17]

(2) Nech $f\colon Y \to \mathbb{C}$ je merateľná. Potom platí

$$\int_Y f\, dT_*\mu = \int_X f \circ T\, d\mu \tag{3.3}$$

v tom zmysle, že ak existuje jeden integrál, tak existuje aj druhý a rovnajú sa.

(3) Za predpokladu, že $T(X)$ je merateľná množina (t.j. $T(X) \in \mathcal{S}$), tak v časti (2) namiesto $\int_Y f\, dT_*\mu$ možno písať $\int_{T(X)} f\, dT_*\mu$.

[17] Obrátené tvrdenie neplatí. Napr. nech $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{B} = \mathcal{S}$ je σ-algebra borelovských množín v $[0,1]$. Nech μ je Lebesguova miera na $(X,\mathcal{B})$. Nech T je konštantné zobrazenie zobrazujúce X do bodu 0. Potom T je merateľné a push-forward miera $T_*\mu$ na $\mathcal{S}$ sa zhoduje s Diracovou mierou δ_0. Nech $f\colon Y \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá nie je merateľná. Funkcia $f \circ T$ však merateľná je, lebo je konštantná na X.

Obr. 3.3: Situácia pri integrovaní podľa push-forward miery.

Dôkaz. (1) Nech f je merateľná. Aby sme dokázali merateľnosť $f \circ T$, zvoľme otvorenú množinu $U \subseteq \mathbb{C}$. Potom $(f \circ T)^{-1}(U) = T^{-1}(f^{-1}U)$ je otvorená v X, lebo $f^{-1}(U)$ je otvorená v Y (vďaka predpokladu merateľnosti f) a T je merateľná.

(2) Vzhľadom na (1) predpokladáme, že f aj $f \circ T$ sú merateľné. Máme dokázať (3.3).

- Najskôr predpokladajme, že $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{S}$. Potom $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ a podľa Lemy 3.25 je $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}$. Dostávame

$$\int_Y f\,dT_*\mu = \int_Y \chi_A\,dT_*\mu = T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}A) = \\ = \int_X \chi_{T^{-1}(A)}\,d\mu = \int_X \chi_A \circ T\,d\mu = \int_X f \circ T\,d\mu.$$

  Rovnosť (3.3) sme teda dokázali pre charakteristické (merateľné) funkcie. Špeciálne, (3.3) platí pre každú nezápornú charakteristickú (merateľnú) funkciu (tá nie je nevyhnutne integrovateľná, môže mať integrál $+\infty$).

- Z linearity integrálu pre nezáporné merateľné funkcie[18] je zrejmé, že ak tá rovnosť platí pre dve nezáporné (nie nutne integrovateľné) merateľné funkcie, tak platí aj pre akúkoľvek ich lineárnu kombináciu.[19] Preto tá rovnosť platí pre každú jednoduchú nezápornú merateľnú funkciu $s = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j}$, $c_j > 0$.

- Nech teraz f je nezáporná merateľná funkcia (potom integrál f, nie nutne konečný, existuje). Keďže existuje neklesajúca postupnosť s_n jednoduchých nezáporných merateľných funkcií konvergujúca ku f, tak (podľa Beppo Leviho vety o monotónnej konvergencii) dostávame

$$\int f\,dT_*\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n\,dT_*\mu = \lim_{n\to\infty} \int (s_n \circ T)\,d\mu = \int (f \circ T)\,d\mu$$

  (využili sme aj, že ak s_n bodovo konverguje k f, tak $s_n \circ T$ bodovo konverguje ku $f \circ T$).

- Nech teraz f je ľubovoľná reálna merateľná funkcia. Vyjadríme ju v tvare $f = f_+ - f_-$, kde f_+, f_- sú nezáporné merateľné funkcie (a teda funkcie spĺňajúce rovnosť (3.3)). Opäť vďaka linearite integrálu aj f spĺňa rovnosť (3.3) (ak náhodou existuje jeden integrál, tak existuje aj druhý a rovnajú sa).

[18] $\int (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,d\mu = c_1 \int f_1\,d\mu + c_2 \int f_2\,d\mu$ s nezápornými koeficientami c_1, c_2

[19] Vysvetlite podrobne, využije sa, že $(f_1 \circ T) + (f_2 \circ T) = (f_1 + f_2) \circ T$.

- Konečne, nech f je komplexná merateľná funkcia. Potom $f = f_1 + if_2$ kde f_1, f_2 sú reálne merateľné funkcie. Už vieme, že f_1, f_2 spĺňajú (3.3). Potom, znovu vďaka linearite integrálu, aj f spĺňa (3.3) (ak existuje jeden integrál, tak existuje aj druhý a rovnajú sa).

(3) Nech $T(X) \in \mathcal{S}$. Potom aj $Y \setminus T(X) \in \mathcal{S}$ a podľa definície push forward miery je

$$T_*\mu(Y \setminus T(X)) = 0.$$

Potom však $\int_Y f\, dT_*\mu = \int_{T(X)} f\, dT_*\mu$ v tom zmysle, že ak existuje jeden integrál, tak existuje aj druhý a rovnajú sa. $\square$

Poznámka 3.27 (Heuristické úvahy vedúce k Vete 3.28). Všimnime si výpočet integrálu substitúciou:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin x^2\, dx = \begin{vmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \end{vmatrix} = \int_0^{\pi} \sin t\, dt$$

Tieto Riemannove integrály môžeme chápať ako Lebesguove integrály, stačí namiesto dx písať $d\,\mathrm{Leb}$. Ak ďalej formálne budeme uvažovať o miere $\mu = 2x\,\mathrm{Leb}$ (teda $d\mu = 2x\, d\,\mathrm{Leb}$, pozri Sekciu 3.6), tak môžeme výpočet formálne prepísať takto:

$$\int_{[0,\sqrt{\pi}]} \sin x^2 \underbrace{2x\, d\,\mathrm{Leb}(x)}_{d\mu(x)} = \int_{[0,\pi]} \sin t\, d\,\mathrm{Leb}(t).$$

Ak ešte zavedieme funkciu $T\colon [0, \sqrt{\pi}] \to [0, \pi]$, $T(x) = x^2$, môžeme túto rovnosť zapísať v tvare

$$\int_{[0,\sqrt{\pi}]} \sin \circ T \underbrace{d\mu}_{2x\, d\,\mathrm{Leb}} = \int_{[0,\pi]} \sin\, d\,\mathrm{Leb}\,.$$

Podľa (3.3) pre integrál vľavo platí

$$\int_{[0,\sqrt{\pi}]} \sin \circ T \underbrace{d\mu}_{2x\, d\,\mathrm{Leb}} = \int_{[0,\pi]} \sin\, dT_*\mu.$$

V posledných dvoch rovnostiach sa ľavé strany zhodujú, preto sa zhodujú aj pravé strany:

$$\int_{[0,\pi]} \sin\, d\,\mathrm{Leb} = \int_{[0,\pi]} \sin\, dT_*\mu.$$

Z toho síce formálne nevyplýva, že $T_*\mu = \mathrm{Leb}$, ale heuristicky sa predsa len zdá, že miera μ s hustotou $2x$ (vzhľadom na Lebesguovu mieru) sa potlačí dopredu zobrazením $T(x) = x^2$ tak, že hustotu $2x$ predelíme deriváciou $T'(x) = 2x$ (a tak dostaneme mieru Leb s hustotou 1, pozri aj Obr. 3.4).

Obr. 3.4: Vľavo je miera s hustotou $2x$ (čím viac doprava, tým je hustota úsečky väčšia). Zobrazenie $T(x) = x^2$ ju potlačí doprava do miery s hustotou 1, čo zodpovedá predeleniu deriváciou $T'(x) = 2x$.

Ide tu o heuristiku. Tiež je tu problém, že $T'(0) = 0$ a nulou deliť nemožno. Na druhej strane, Lebesguov integrál nie je chúlostivý na hodnotu v jednom bode, dokonca na hodnoty v bodoch množiny nulovej Lebesguovej miery, takže nás nemusí trápiť, ak je T' nenulová len Leb-skoro všade.

Pozrime sa ešte na dva jednoduché príklady.

Nech $T\colon [0, 1/2] \to [0, 1]$, $T(x) = 2x$. Nech μ je Lebesguova miera v $[0, 1/2]$, teda miera s hustotou $\varrho = 1$ vzhľadom na Lebesguovu mieru. Potom podľa definície push-forward miery je $T_*\mu([0, 1]) = \mu([0, 1/2]) = 1/2$,čo je len polovica Lebesguovej miery množina $[0, 1]$ a podobne by to vyšlo pre každú lebesguovsky merateľnú množinu $A \subseteq [0, 1]$. Teda $T_*\mu$ je miera s hustotou $1/2$ vzhľadom na Lebesguovu mieru. Opäť sme dostali, že hustota miery $T_*\mu$ sa rovná hustote miery μ predelenej deriváciou zobrazenia T.

Teraz nech $T\colon [0, 1] \to [0, 1]$ je zobrazenie stan. Nech μ je Lebesguova miera na $[0, 1]$, teda miera s hustotou 1. Tentoraz $T_*\mu([0, 1]) = \mu([0, 1]) = 1$, čo je opäť miera s hustotou 1. Pritom derivácia T je $+2$ na $[0, 1/2]$ a -2 na $[1/2, 1]$. Zdanlivo nedošlo k predeleniu hustoty deriváciou T'. Vtip je v tom, že $T_*\mu([0, 1]) = \mu([0, 1]) = \mu([0, 1/2]) + \mu([1/2, 1]) = 1/2 + 1/2 = 1$. Hustota push-forward miery je 1, ale prirodzeným spôsobom je to súčet dvoch hustôt (zodpovedajúcich dvom častiam zobrazenia), pričom každá z nich sa získava ako podiel hustoty miery μ a *absolútnej hodnoty* derivácie T'.

V posledných dvoch príkladoch bola derivácia T' konštantná resp. konštantná na jednotlivých častiach, preto bola situácia zvlášť jednoduchá. Ak si však ešte pripomenieme situáciu s integrovaním sínusu zo začiatku tejto poznámky, nasledujúca veta nás určite neprekvapí.

Veta 3.28. *Nech $T\colon [a, b] \to [c, d]$ je také zobrazenie, že v intervale $[a, b]$ existujú po dvoch disjunktné otvorené intervaly $I_1, I_2, \ldots$ (konečne alebo nekonečne veľa intervalov tvaru $I_k = (a_k, b_k)$) s vlastnosťami:*

(1) zjednotenie $\bigsqcup_k I_k$ má plnú Lebesguovu mieru v $[a, b]$,

(2) pre každé k, zúženie $T_k := T|_{I_k}$ je C^1-difeomorfizmus otvoreného intervalu I_k na otvorený interval (c, d).

Ak na $[a,b]$ máme mieru μ s hustotou ϱ (vzhľadom na Lebesguovu mieru), tak push-forward miera $T_*\mu$ na $[c,d]$ je miera s hustotou

$$(T_*\varrho)(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y) \cap \bigsqcup_k I_k} \frac{\varrho(x)}{|T'(x)|}, \qquad \textit{pre } y \in (c,d). \tag{3.4}$$

(Teda $\mu = \varrho \operatorname{Leb}_{[a,b]} \Rightarrow T_*\mu = (T_*\varrho) \operatorname{Leb}_{[c,d]}$, pričom hustota $T_*\varrho$ je určená vzťahom (3.4). Keď tu hovoríme o Lebesguovej miere, máme na mysli Lebesguovu mieru definovanú na σ-algebre všetkých lebesguovsky merateľných podmnožín daného intervalu.)

Skôr než začneme vetu dokazovať, uvedieme pár poznámok.

Hustotu $T_*\varrho$ sme vzťahom (3.4) určili len na otvorenom intervale (c,d). To nevadí, lebo na jej hodnotách v dvoch bodoch vôbec nezáleží (ak ϱ_1 a ϱ_2 sa rovnajú skoro všade, tak miery $\varrho_1 \operatorname{Leb}$ a $\varrho_2 \operatorname{Leb}$ sa zhodujú).

Vzťah (3.4) sa dá zrejme prepísať takto:

$$(T_*\varrho)(y) = \sum_k \frac{\varrho(x_k)}{|T'(x_k)|}, \qquad \text{kde } x_k = T_k^{-1}(y), \quad \text{pre} \quad y \in (c,d).$$

Pre každé k, derivácia $T'(x_k)$ je konečná a nenulová (C^1-difeomorfizmus má v každom bode konečnú nenulovú deriváciu.)

Množina $Z = [a,b] \setminus \bigsqcup_k I_k$ má nulovú Lebesguovu mieru a je to uzavretá množina v $[a,b]$, obsahujúca koncové body a, b. Môže to byť ľubovoľná uzavretá množina v $[a,b]$ s uvedenými vlastnosťami (komplement každej takej množiny je zjednotenie otvorených intervalov). Napríklad to môže byť strednotretinová Cantorova množina (je uzavretá a má Lebesguovu mieru nula), intervaly I_k sú jej styčné intervaly nejako očíslované indexami $k = 1, 2, \dots$.

Keby sme vo vzťahu (3.4) písali $\sum_{x \in T^{-1}(y)}$, mohlo by sa stať, že pre nejaké $y \in (c,d)$ by išlo o nespočítateľnú sumu (napr. by mohlo byť $T(Z) = \{y\}$, pritom Z môže byť nespočítateľná, ako sme už uviedli vyššie). Lenže nespočítateľnú suma sa nedá rozumne definovať, nehovoriac o tom, že v tých vzoroch bodu y, ktoré patria do Z, by neexistovala derivácia vystupujúca v (3.4).

Na intervaloch I_k máme C_1-difeomorfizmy T_k. V predpokladoch sa však nič nehovorí o zobrazení T na množine Z. To má nasledujúce dôsledky.

- Na jednej strane, $T\colon ([a,b], \mathcal{L}_{[a,b]}) \to ([c,d], \mathcal{L}_{[c,d]})$ je určite merateľné zobrazenie.

  Aby sme to ukázali, nech $A \subseteq [c,d]$ je lebesguovsky merateľná. Potom

  $$T^{-1}(A) = \underbrace{\left(T^{-1}(A) \cap Z\right)}_{A_Z} \cup \bigcup_k \underbrace{T_k^{-1}(A)}_{A_k} \tag{3.5}$$

  je tiež lebesguovsky merateľná. Naozaj, A_Z je lebesguovsky merateľná a má nulovú mieru, lebo je to podmnožina nulovej množiny Z (Lebesguova miera je úplná). Každá množina A_k je tiež lebesguovsky merateľná, lebo T_k je C_1-difeomorfizmus (pozri Dôsledok 4.28 resp. koniec Sekcie 3.3).

- Na druhej strane, $T\colon ([a,b], \mathcal{B}_{[a,b]}) \to ([c,d], \mathcal{B}_{[c,d]})$ nemusí byť merateľné zobrazenie.

  Naozaj, ak v (3.5) je množina A borelovská, jej vzor $T^{-1}(A)$ nemusí byť borelovská množina. Množiny A_k síce borelovské sú (spojitý vzor borelovskej množiny je borelovská), ale ukážeme, že množina A_Z nemusí byť borelovská (potom ani $T^{-1}(A)$ nie je borelovská). Napr. ak Z je strednotretinová Cantorova množina a Z_1 je taká jej podmnožina, ktorá nie je borelovská (pozri Príklad 3.5), tak v prípade, že $T(Z_1) = \{p\}$ a $T(Z \setminus Z_1)$ neobsahuje bod p, pre borelovskú množinu $A = \{p\}$ dostaneme $A_Z = Z_1$, čo nie je borelovská množina.

Ideme dokázať vetu.

Dôkaz. Vzhľadom na definíciu hustoty miery potrebujeme dokázať, že ak $A \subseteq [c,d]$ je lebesguovsky merateľná, tak

$$T_*\mu(A) \stackrel{?}{=} \int_A (T_*\varrho)(y)\, d\,\mathrm{Leb}(y) = \int_{[c,d]} \chi_A(y)(T_*\varrho)(y)\, dy$$

(namiesto $d\,\mathrm{Leb}(y)$ píšeme krátko dy). Podľa definície push-forward miery, ako aj s ohľadom na predpoklad, že $\mu = \varrho\,\mathrm{Leb}$ a s využitím Lemy 3.25 môžeme ľavú stranu prepísať takto:

$$\begin{aligned} T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}A) &= \int_{[a,b]} \chi_{T^{-1}A}(x)\, d\mu = \int_{[a,b]} \chi_{T^{-1}A}(x)\varrho(x)\, d\,\mathrm{Leb}(x) \\ &= \int_{[a,b]} \chi_A(T(x))\varrho(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} \chi_A(T_k(x))\varrho(x)\, dx. \end{aligned}$$

(Mali by sme ešte pripočítať integrál na množine $Z = [a,b] \setminus \bigsqcup_k I_k$, ale tento integrál je nulový, pretože podľa predpokladu je $\mathrm{Leb}(Z) = 0$.) Našu úlohu teda môžeme preformulovať nasledovne. Pre fixovanú lebesguovsky merateľnú množinu $A \subseteq [c,d]$ máme dokázať rovnosť

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_{I_k} \chi_A(T_k(x))\varrho(x)\, dx}_{J_k} \stackrel{?}{=} \int_{[c,d]} \chi_A(y)(T_*\varrho)(y)\, dy. \tag{3.6}$$

Túto rovnosť ideme teraz dokázať (budeme upravovať ľavú stranu a dostaneme pravú stranu).

Pre každé jedno k budeme integrál J_k počítať substitúciou $T_k(x) = y$; presnejšie, aby to bolo presne v súlade s Vetou 4.27(b), budeme dosadzovať

$$x = T_k^{-1}(y).$$ [20]

Pre dané k, zobrazenie T_k je C^1-difeomorfizmom I_k na (c,d), takže pre $y \in (0,1)$ máme v I_k jediný vzor $T_k^{-1}(y)$. Pre deriváciu potom platí

$$(T_k^{-1})'(y) = \frac{1}{(T_k)'(T_k^{-1}(y))} = \frac{1}{T'(T_k^{-1}(y))}$$

Pomocou Vety 4.27(b) môžeme potom písať (namiesto integrálu na (c,d) píšeme integrál na $[c,d]$; tieto integrály sa zhodujú):

$$J_k = \int_{I_k} \chi_A(T_k(x))\varrho(x)\, dx = \int_{[c,d]} \chi_A(y)\varrho(T_k^{-1}(y)) \left| \frac{1}{T'(T_k^{-1}(y))} \right| dy.$$

[20] Vo Vete 4.27(b) išlo o dosadzovanie $y = T(x)$, takže tu máme vymenené označenie premenných.

Integrujú sa tu nezáporné funkcie, takže pri sumovaní takýchto integrálov v (3.6) môžeme podľa vety o monotónnej konvergencii zameniť poradie sumovania integrovania. Dostaneme tak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_{I_k} \chi_A(T_k(x))\varrho(x)\,dx}_{J_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[c,d]} \chi_A(y) \frac{\varrho(T_k^{-1}(y))}{|T'(T_k^{-1}(y))|}\,dy$$

$$= \int_{[c,d]} \chi_A(y) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho(T_k^{-1}(y))}{|T'(T_k^{-1}(y))|}}_{(T_*\varrho)(y)}\,dy = \int_{[c,d]} \chi_A(y)(T_*\varrho)(y)\,dy,$$

takže sme naozaj dostali pravú stranu v (3.6) a dôkaz je skončený. □

3.8 Cvičenia a projekty

Kapitola 4

Mieru zachovávajúce systémy

4.1 Invariantné miery

V sekcii 3.7 sme k merateľnému zobrazeniu $T\colon (X,\mathcal{B}) \to (Y,\mathcal{S})$ zaviedli zobrazenie

$$T_*\colon \{\text{miery na } (X,\mathcal{B})\} \to \{\text{miery na } (Y,\mathcal{S})\}$$

definované nasledovne. Ak μ je miera na $(X,\mathcal{B})$, tak $T_*\mu$ je taká miera na $(Y,\mathcal{S})$, že

$$T_*\mu(A) := \mu(T^{-1}A), \qquad A \in \mathcal{S}$$

(a naučili sme sa aj, ako sa integruje podľa takto definovanej push-forward miery).
V tejto sekcii sa pozrieme na špeciálny prípad, keď

$$(Y,\mathcal{S}) = (X,\mathcal{B}).$$

Ten má totiž súvis s tzv. invariantnými mierami, čo je fundamentálny pojem celej ergodickej teórie.

Nech teda $(X,\mathcal{B},\mu)$ je priestor s mierou a nech $T\colon (X,\mathcal{B}) \to (X,\mathcal{B})$ je merateľné zobrazenie. Keďže tu navyše máme aj mieru μ, budeme písať

$$T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu),$$

hoci zatiaľ predpokladáme len merateľnosť (čo nesúvisí s hodnotami miery). Pripomeňme, že merateľnosť zobrazenia T znamená to, že vzor každej merateľnej množiny je merateľná množina (formálne: ak $A \in \mathcal{B}$, tak $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$).
Teraz príde dôležitá definícia ergodickej teórie.

Definícia 4.1. Nech $(X,\mathcal{B},\mu)$ je priestor s mierou a nech $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ je merateľné zobrazenie. Povieme, že T je *mieru zachovávajúce zobrazenie* alebo že T *zachováva mieru* μ alebo že μ je *invariantná miera* pre T, ak

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \qquad \text{pre všetky } A \in \mathcal{B}, \tag{4.1}$$

t.j. ak $\mu \circ T^{-1} = \mu$ na $\mathcal{B}$ alebo, inak zapísané,

$$T_*\mu = \mu \quad \text{na } \mathcal{B}. \tag{4.2}$$

(Teda μ je invariantná miera pre T, ak je to pevný bod zobrazenia T_*.)

Pripojme niekoľko poznámok k definícii:

- Zobrazenie T zachovávajúce mieru je merateľné podľa definície.
- Keďže T je merateľné, pre každé $A \in \mathcal{B}$ máme $T^{-1}A \in \mathcal{B}$ a teda $\mu(T^{-1}A)$ existuje. Dôležité je pamätať si, že v definícii je T^{-1} a nie T. Množina $T(A)$ by ani nemusela byť merateľná, takže hovoriť o $\mu(T(A))$ by ani nebolo dosť dobre možné.[1]
- Samozrejme, môže sa stať, že T je náhodou bijekcia a navyše taká, že nielen T je merateľná ale aj T^{-1} je merateľná. Potom pre $A \in \mathcal{B}$ je nielen $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ ale aj $T(A) \in \mathcal{B}$, lebo $T(A) = (T^{-1})^{-1}(A)$ je vzor množiny A pri merateľnom zobrazení T^{-1}. V takomto špeciálnom prípade obojstranne merateľnej bijekcie by sme v definícii invariantnej miery mohli písať T namiesto T^{-1}, pretože v takomto prípade zrejme platí, že podmienka (4.1) je ekvivalentná s podmienkou
$$\mu(T(A)) = \mu(A) \qquad \text{pre všetky } A \in \mathcal{B}. \tag{4.3}$$
Vo všeobecnosti však ekvivalentné nie sú, pozri Príklad 4.11.
- Definícia invariantnej miery, aspoň v prípade, že μ je pravdepodobnostná miera, heuristicky znamená nasledujúce. Pre $A \in \mathcal{B}$ hodnotu $\mu(A)$ interpretujme ako pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod z X patrí do množiny A. Potom $\mu(T^{-1}A)$ je pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod z X patrí do množiny $T^{-1}A$, čo je ekvivalentné s tým, že T-obraz toho bodu patrí do množiny A. Teda invariantnosť miery znamená, že pre každú merateľnú množinu A je pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod patrí do A, rovnaká ako pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod má obraz patriaci do A.

Príklad 4.2 (Pre identitu je každá miera invariantná). Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ja akýkoľvek priestor s mierou a nech $T\colon X \to X$ je identita (teda $T(x) = x$ pre každé $x \in X$, píšeme $T = \mathrm{Id}_X$.) Potom T zachováva mieru μ, lebo triviálne $T^{-1}(A) = A$ pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$.

Príklad 4.3 (Lebesguova miera v $\mathbb{R}^n$ je invariantná pre zhodné zobrazenia). Nech $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{L}$ je σ-algebra borelovských resp. lebesguovsky merateľných množín v $\mathbb{R}^n$ a nech Leb je Lebesguova miera v $\mathbb{R}^n$. Ako vieme z geometrie, každé zhodné zobrazenie $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je bijekcia a inverzné zobrazenie T^{-1} je tiež zhodné. Ak $A \in \mathcal{B}$, resp. $A \in \mathcal{L}$, tak aj $T(A), T^{-1}(A)$ patria do $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{L}$ a ako vieme z teórie miery, platí $\mathrm{Leb}(T(A)) = \mathrm{Leb}(A) = \mathrm{Leb}(T^{-1}(A))$. Druhá rovnosť znamená, že Lebesguova miera je invariantná pre zhodné zobrazenia. Formálnejšie, ak $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je zhodné zobrazenie, tak $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mathrm{Leb}_{\mathcal{B}})$ a $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mathrm{Leb}_{\mathcal{L}})$ sú mieru zachovávajúce systémy (namiesto $\mathcal{B}$ a $\mathcal{L}$ by sme mali písať $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ a $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$).

Ak miera μ je invariantná pre T, tak je invariantná aj pre iterácie T^k, $k \geq 2$. To je zrejmé a vyplýva to aj z nasledujúcej propozície.

Propozícia 4.4. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T, S\colon X \to X$ zachovávajú mieru μ. Potom aj $T \circ S$ ju zachováva.*

Dôkaz. Stačí si uvedomiť, že $(T \circ S)^{-1}(A) = S^{-1}(T^{-1}A)$. □

Nasledujúca propozícia ukazuje, trochu nepresne povedané, že pozdĺž trajektórie invariantná miera (neostro) rastie.

[1] Poznamenajme, že v matematike sa vzory a nie obrazy dobre správajú. To je tiež akýsi formálny dôvod na použitie T^{-1} a nie T.

Propozícia 4.5. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T \colon X \to X$ zachováva mieru μ. Potom pre každé $A \in \mathcal{B}$ také, že aj $T(A) \in \mathcal{B}$,[2] platí*

$$\mu(T(A)) \geq \mu(A).$$

Dôkaz. Nech $A, T(A) \in \mathcal{B}$. Keďže T je merateľné, tak aj $T^{-1}(T(A)) \in \mathcal{B}$. Keďže T zachováva mieru, platí $\mu(T(A)) = \mu(T^{-1}(T(A)))$. Lenže triviálne je $T^{-1}(T(A)) \supseteq A$, takže monotónnosť miery dá $\mu(T^{-1}(T(A))) \geq \mu(A)$. Teda $\mu(T(A)) \geq \mu(A)$. $\square$

Príklad 4.6 (Invariantná miera sediaca v periodickej orbite). Nech $T \colon X \to X$ je zobrazenie majúce periodický bod x_0 s periódou p, teda $x_0, x_1 = T(x), \dots, x_{p-1} = T^{p-1}(x)$ je periodická orbita pozostávajúca z p navzájom rôznych bodov. Posaďme do tej orbity mieru, ktorá uvedeným bodom (presnejšie príslušným jednobodovým množinám) v danom poradí priraďuje miery $w_0, w_1, \dots, w_{p-1}$. Uvažujeme teda o miere μ, definovanej na σ-algebre 2^X vzťahom (porovnaj s Príkladom 3.9)

$$\mu := w_0\delta_{x_0} + w_1\delta_{x_1} + \cdots + w_{p-1}\delta_{x_{p-1}}.$$

Ak chceme, aby μ bola invariantná pre T, tak podľa Propozície 4.5 musíme váhy w_i zvoliť tak, aby neklesali pozdĺž trajektórie. Lenže za p krokov sa z bodu x_0 dostaneme znovu do neho, teda sa nám nerovnosti 'zacyklia': $w_0 \leq w_1 \leq \cdots \leq w_{p-1} \leq w_0$. Všetky váhy sú teda rovnaké. Odtiaľ dostávame, že μ má nevyhnutne tvar

$$\mu = w_0 \left(\delta_{x_0} + \delta_{x_1} + \cdots + \dots \delta_{x_{p-1}} \right). \tag{4.4}$$

Obrátene, miera tohto tvaru je invariantná pre T. Naozaj, nech v každom z p bodov tej periodickej orbity sedí rovnaká miera w_0 a nech $A \subseteq X$. Ak A obsahuje k spomedzi tých p bodov, tak aj $T^{-1}(A)$ ich obsahuje presne k (vysvetlite). To ale znamená, že $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) = kw_0$, čo dokazuje, že μ je invariantná. Samozrejme, ak chceme aby invariantná miera (4.10) bola navyše pravdepodobnostná, treba zvoliť $w_0 = 1/p$.

Ak merateľné zobrazenie $T \colon (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B})$ má pevný bod p, môžeme uvažovať o Diracovej miere δ_p sediacej v bode p. Pomocou tejto miery vieme odmerať nielen každú množinu z $\mathcal{B}$ (napr. $X \in \mathcal{B}$ a $\delta_p(X) = 1$, ide teda o pravdepodobnostnú mieru), ale dokonca každú podmnožinu X. Podľa predchádzajúceho príkladu je to invariantná miera pre merateľné zobrazenie $T \colon (X, 2^X) \to (X, 2^X)$. Ak však z nejakých dôvodov nechceme zväčšovať našu σ-algebru $\mathcal{B}$ a chceme uvažovať len o invariantných mierach na $\mathcal{B}$, môžeme uvažovať o miere δ_p *zúženej* len na $\mathcal{B}$, teda (ak ponecháme aj pre zúženú mieru pôvodné označenie δ_p)

$$\delta_p(A) := \begin{cases} 1, & \text{ak } p \in A, \\ 0, & \text{ak } p \in X \setminus A \end{cases} \qquad \text{(len pre) } A \in \mathcal{B}.$$

Keďže $T \colon (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B})$ je podľa predpokladu merateľné, je miera δ_p zúžená na $\mathcal{B}$ zrejme stále invariantná miera pre T. (Aj všeobecne, ak invariantnú mieru pre $T \colon (X, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{A})$, definovanú na nejakej "veľkej" σ-algebre $\mathcal{A}$, zúžime na nejakú menšiu σ-algebru $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, vzhľadom na ktorú je T tiež merateľné, tak táto zúžená miera je invariantná pre $T \colon (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B})$).

Lenže T môže mať aj iný pevný bod q a potom aj δ_q je invariantná miera pre T. Už táto jednoduchá úvaha ukazuje, že merateľné zobrazenie $T \colon (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B})$ môže mať viacero, aj

[2] Tento predpoklad znamená, že aj $\mu(T(A))$ existuje.

podstatne rôznych, invariantných mier. Potom vieme pomocou nasledujúcej propozície vyrobiť nekonečne veľa invariantných mier pre T.

Propozícia 4.7. *Lineárna kombinácia invariantných mier pre merateľné zobrazenie $T\colon (X,\mathcal{B}) \to (X,\mathcal{B})$ je opäť invariantná miera pre T.*

Dôkaz. Nech μ_1, μ_2 sú invariantné miery pre T a nech $\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$. Nech $A \in \mathcal{B}$. Potom $T^{-1}A \in \mathcal{B}$ a $\mu_1(T^{-1}A) = \mu_1(A)$ a rovnako $\mu_2(T^{-1}A) = \mu_2(A)$. Preto

$$\mu(T^{-1}A) = c_1\mu_1(T^{-1}A) + c_2\mu_2(T^{-1}A) = c_1\mu_1(A) + c_2\mu_2(A) = \mu(A),$$

čo dokazuje, že μ je invariantná. Podobne pre dlhšie ako dvojčlenné lineárne kombinácie (prípadne použite matematickú indukciu). $\square$

4.2 Dynkinova veta a overovanie invariantnosti mier

Ak overujeme, či T zachováva mieru μ, mali by sme overiť, že $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ pre všetky $A \in \mathcal{B}$. To je väčšinou oveľa ťažšie ako v predchádzajúcich dvoch príkladoch. Našťastie, v skutočnosti netreba overiť podmienku $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ pre všetky množiny $A \in \mathcal{B}$, stačí to urobiť len pre niektoré množiny. Budeme využívať Dynkinovu vetu, pozri Vetu 3.16, ktorú však mierne preformulujeme, aby sa nám na overovanie invariantnosti mier potom ľahšie používala.

Veta 4.8 (Dynkinova veta o jednoznačnosti mier, ekvivalentný tvar). *Nech $(X,\mathcal{B},\mu)$ je priestor s mierou. Nech $\mathcal{G}$ je systém množín v X, s vlastnosťami:*

(D1) $\mathcal{G}$ je generátorom pre $\mathcal{B}$ (t.j. $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}$),

(D2) $\mathcal{G}$ je uzavretý vzhľadom na konečné prieniky (t.j. $G, H \in \mathcal{G} \Longrightarrow G \cap H \in \mathcal{G}$),

(D3) v $\mathcal{G}$ existuje rastúca postupnosť množín $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ s konečnými μ-mierami taká, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = X$.

Nech ν je ďalšia miera na $(X,\mathcal{B})$ a nech

(D4) $\nu = \mu$ na $\mathcal{G}$.

Potom $\nu = \mu$ na celej σ-algebre $\mathcal{B}$, t.j. $\nu(A) = \mu(A)$ pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$.

Ešte raz pripomeňme, že ak miera μ je konečná, tak podmienku (D3) netreba overovať, je splnená automaticky.

Dokazovať, že μ je invariantná miera pre $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$, znamená dokazovať rovnosť dvoch mier:

$$\underbrace{T_*\mu}_{\nu} = \mu \quad \text{na } \mathcal{B}. \tag{4.5}$$

Teda mali by sme overiť, že

$$\underbrace{\mu(T^{-1}A)}_{\nu(A)} = \mu(A) \qquad \text{pre každú množinu } A \in \mathcal{B}.$$

To môže byť veľmi ťažké, lebo často je to tak, že nevieme presne opísať, ako presne vyzerajú všetky merateľné množiny A. Podľa Dynkinovej vety však stačí nájsť systém $\mathcal{G}$ spĺňajúci predpoklady (D1), (D2), (D3) z vety a overiť ešte (D4), teda že $\nu = \mu$ na $\mathcal{G}$, t.j.

$$\mu(T^{-1}G) = \mu(G) \quad \text{pre každé } G \in \mathcal{G}.$$

Potom $\nu = \mu$ na celej σ-algebre $\mathcal{B}$, teda

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \qquad \text{pre všetky } A \in \mathcal{B},$$

čiže miera μ je invariantná pre T. Dospeli sme k záveru, že

$$\boxed{\begin{gathered}\text{na dôkaz invariantnosti miery } \mu \text{ stačí nájsť } \mathcal{G} \text{ ako v Dynkinovej vete a dokázať}\\ \mu(T^{-1}G) = \mu(G), \quad G \in \mathcal{G}.\end{gathered}} \tag{4.6}$$

Pritom "$\mathcal{G}$ ako v Dynkinovej vete" tu znamená $\mathcal{G}$ spĺňajúce (D1), (D2), (D3).

V nasledujúcej Tabuľke 4.1 je ukázané, ako možno voliť systém $\mathcal{G}$ v niektorých dôležitých prípadoch ($\mathcal{G}$ je systém množín takého tvaru, ako je uvedené v pravom stĺpci). Presvedčte sa, že v každom z tých prípadov sú naozaj splnené predpoklady (D1) a (D2) z Dynkinovej vety. V prípade, že μ je konečná na množinách z $\mathcal{G}$, vidieť, že je splnená aj podmienka (D3). Pripomeňme ešte, že $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je kružnica (s jednotkovým obvodom, teda interval $[0,1]$, v ktorom zlepíme koncové body).

Overovanie, že merateľné zobrazenie $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ zachováva mieru μ		
X	$\mathcal{B}$	$\mu(T^{-1}G) = \mu(G)$ stačí overiť napr. pre (**ak μ je na nich konečná**)
$\mathbb{R}$	borelovské množiny	intervaly $[a,b]$
$[0,1]$		intervaly $[0,b]$
$\mathbb{R}^2$		intervaly $[a,b] \times [c,d]$
$[0,1]^2$		intervaly $[0,b] \times [0,d]$
$[0,1)$		intervaly $[0,b]$ (alebo $[0,b)$)
$\mathbb{S}^1$		oblúky $[0,b]$ (alebo $[0,b)$)

Tab. 4.1: Overovanie invariantnosti miery v niektorých dôležitých prípadoch

Poznámka 4.9 (Ak je v Tabuľke 4.1 $\mathcal{L}$ namiesto $\mathcal{B}$). Čo ak by sme v tejto tabuľke namiesto miery μ na borelovských množinách (to môže ale nemusí byť Lebesguova miera $\mathrm{Leb}_{\mathcal{B}}$) chceli uvažovať túto mieru na lebesguovsky merateľných množinách? Po prvé, μ by sme museli mať definovanú na tejto väčšej σ-algebre $\mathcal{L}$ (čo by bolo automaticky splnené, ak by μ bola priamo Lebesguova miera alebo aspoň miera majúca hustotu vzhľadom na Lebesguovu mieru). Po druhé, museli by sme vedieť, že $T\colon (X,\mathcal{L},\mu) \to (X,\mathcal{L},\mu)$ je merateľné, teda že vzor lebesguovsky merateľnej množiny je opäť lebesguovsky merateľná množina (vieme, že dokonca ani v prípade homeomorfizmu T to tak nemusí byť, hoci vtedy vzor borelovskej množiny je automaticky borelovská množina; pozri Príklad 3.6 a diskusiu za ním). Predpokladajme však, že tomu tak je. Ak chceme potom overiť, či je miera μ (definovaná na $\mathcal{L}$) invariantná pre T, čo vtedy zvoliť ako generátor $\mathcal{G}$?

Ako sme už povedali v Sekcii 3.3, σ-algebra $\mathcal{L}$ lebesguovsky merateľných množín je generovaná otvorenými množinami a množinami nulovej miery, pričom samozrejme namiesto všetkých otvorených množín môžeme vziať iný systém, ktorý generuje σ-algebru $\mathcal{B}$ borelovských množín. Z toho vyplýva, že

- v analogickej tabuľke pre σ-algebru $\mathcal{L}$ lebesguovsky merateľných množín možno za "dynkinovský" generátor zvoliť systém

$$\mathcal{G} = \{\text{intervaly ako v Tabuľke 4.1 a okrem toho množiny nulovej } \mu\text{-miery}\},$$

  ak sú splnené predpoklady:

  (i) miera μ je definovaná na $\mathcal{L}$,
  (ii) $T\colon (X, \mathcal{L}, \mu) \to (X, \mathcal{L}, \mu)$ je merateľné,
  (iii) miera μ na $\mathcal{L}$ je úplná.

Naozaj, takýto systém je, ako sme povedali, generátorom pre $\mathcal{L}$ (teda platí (D1)) a spĺňa aj ostatné predpoklady Dynkinovej Vety 4.8. Predpoklad (D3) je splnený automaticky, lebo ho spĺňal systém intervalov z Tabuľky 4.1. Predpoklad (D2) je splnený, lebo ho spĺňal systém intervalov z Tabuľky 4.1 a pridali sme predpoklad (iii) úplnosti miery; vysvetlite).

Záver teda znie, že v opísanej situácii treba, ak sú splnené uvedené predpoklady, overovať rovnosť $\mu(T^{-1}G) = \mu(G)$ pre intervaly ako v Tabuľke 4.1 a okrem toho ešte pre množiny nulovej μ-miery.

Poznámka 4.10 (O overovaní $\mu(T^{-1}N) = \mu(N)$ pre nulové množiny). Úloha dokázať, že

- $N \in \mathcal{L}, \mu(N) = 0 \Rightarrow \mu(T^{-1}N) = \mu(N)$

sa dá mierne preformulovať. Treba dokázať, že

- $N \in \mathcal{L}, \mu(N) = 0 \Rightarrow \mu(T^{-1}N) = 0.$

V prípade, že $\mu \sim$ Leb na $\mathcal{L}$ (takou je napr. miera z Príkladu 3.22), tak vzhľadom na to, μ a Leb majú tie isté nulové množiny, dostávame ešte jednoduchšiu ekvivalentnú formuláciu:

- $N \in \mathcal{L}, \mathrm{Leb}(N) = 0 \Rightarrow \mathrm{Leb}(T^{-1}(N)) = 0.$

Táto implikácia je automaticky splnená napr. vtedy, keď T je C^1-difeomorfizmus, pozri Dôsledok 4.28.

Či už je μ ekvivalentná s Lebesguovou mierou alebo nie, niekedy sa vzor množiny N s mierou $\mu(N) = 0$ dá vyjadriť v takom tvare, že je zrejmé, že $\mu(T^{-1}(N)) = 0$. Napríklad platí:

$$\left.\begin{array}{rl} T^{-1}(N) = & N_0 \cup \bigcup_{k\in K} T_k^{-1}(N), \text{ kde} \\ & \mu(N_0) = 0, \\ & K \text{ je spočítateľná}, \\ & \mu(T_k^{-1}(N)) = 0 \text{ pre každé } k \end{array}\right\} \Longrightarrow \mu(T^{-1}(N)) = 0.$$

(Ak $\mu \sim$ Leb, tak tu všade môžeme symbol μ nahradiť symbolom Leb.) Táto úvaha sa dá použiť ak T je definované po častiach, s časťami T_k, ktoré sú C^1-difeomorfizmami (medzi otvorenými množinami) a zvyšok priestoru X má nulovú μ-mieru. S takou situáciou sa stretneme napr. hneď v nasledujúcom príklade, v ktorom má zobrazenie dve časti T_1, T_2.[3]

Príklad 4.11 (Lebesguova miera je invariantná pre zobrazenie "stan"). Nech $T\colon [0,1] \to [0,1]$ je zobrazenie "stan", definované vzťahom $T(x) := 1 - |2x - 1|$, teda

$$T(x) := \begin{cases} 2x & \text{ak } x \in [0, 1/2], \\ 2 - 2x & \text{ak } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

[3] S prípadom zobrazenia s nekonečným spočítateľným počtom častí, ktoré navyše nie sú lineárne, sa stretneme v Príklade 4.16.

(pozri Obr. 4.1). Ukážeme, že toto zobrazenie zachováva Lebesguovu mieru na σ-algebre $\mathcal{B}$ borelovských množín.

Obr. 4.1: Stan aj šikmý stan zachovávajú Lebesguovu mieru.

Zobrazenie T je merateľné, takže podľa Tabuľky 4.1 stačí overiť, že $\mathrm{Leb}(T^{-1}[0,b]) = \mathrm{Leb}([0,b])$ pre každé $0 < b \leq 1$. Platí $\mathrm{Leb}([0,b]) = b$. Ďalej, $T^{-1}[0,b] = [0,b/2] \sqcup [1-b/2,1]$ (lebo ľavá aj pravá časť stanu majú smernicu v absolútnej hodnote rovnú 2), takže $\mathrm{Leb}(T^{-1}[0,b]) = b/2 + b/2 = b$ a rovnosť je dokázaná.[4]

Ideme ukázať, že zobrazenie stan zachováva dokonca Lebesguovu mieru na σ-algebre $\mathcal{L}$ lebesguovsky merateľných množín v $[0,1]$. Využijeme Poznámky 4.9 a 4.10. Najskôr si všimnime, že

(i) miera Leb je definovaná na $\mathcal{L}$,

(ii) $T\colon ([0,1],\mathcal{L},\mathrm{Leb}) \to ([0,1],\mathcal{L},\mathrm{Leb})$ je merateľné (stačí si uvedomiť, že vzor lebesguovsky merateľnej množiny pri lineárnej funkcii je lebesguovsky merateľná množina) a

(iii) miera Leb na $\mathcal{L}$ je úplná.

Potrebujeme teda už len ukázať, že ak $N \subseteq [0,1]$ je množina nulovej Lebesguovej miery, tak aj $T^{-1}(N)$ je nulovej Lebesguovej miery. K tomu si stačí všimnúť, že

$$\begin{aligned} T^{-1}(N) &= T^{-1}(N \cap \{0,1\}) \cup T^{-1}(N \cap (0,1)) \\ &= N_0 \cup T_1^{-1}(N \cap (0,1)) \cup T_2^{-1}(N \cap (0,1)) \end{aligned}$$

kde $N_0 \subseteq \{0,\frac{1}{2},1\}$ a $T_1 := T|_{(0,1/2)}\colon (0,\frac{1}{2}) \to (0,1)$ a $T_2 := T|_{(1/2,1)}\colon (\frac{1}{2},1) \to (0,1)$ sú C^1-difeomorfizmy medzi otvorenými množinami. Potom $T^{-1}(N)$, ako zjednotenie troch množín nulovej Lebesguovej miery, je množina nulovej Lebesguovej miery.

Príklad 4.12 (Lebesguova miera je invariantná pre "šikmý stan"). Nech $0 < c < 1$ a nech $T\colon [0,1] \to [0,1]$ je zobrazenie "(plný) šikmý stan", pozri Obr. 4.1, teda zobrazenie také, že $T(0) = 0$, $T(c) = 1$, $T(1) = 0$ a T je lineárne na $[0,c]$ aj na $[c,1]$. Ľahko vidieť, že T má na $[0,c]$ smernicu $1/c$ a na $[c,1]$ smernicu $-1/(1-c)$. T-vzor intervalu $[0,b]$ je preto disjunktným zjednotením dvoch intervalov. Jeden má dĺžku $b/(1/c) = bc$ a druhý $b/(1/(1-c)) = b(1-c)$. Ich súčet má teda Lebesguovu mieru $bc + b(1-c) = b$, t.j $\mathrm{Leb}(T^{-1}[0,b]) = \lambda([0,b])$ pre každé $0 < b \leq 1$. To podľa Tabuľky 4.1 dokazuje, že T zachováva Lebesguovu mieru na σ-algebre borelovských množín. Z podobných dôvodov ako v predchádzajúcom príklade, zachováva aj Lebesguovu mieru na σ-algebre lebesguovsky merateľných množín.

[4] Všimnime si, že obrazom intervalu $[0,1/2]$ je interval $[0,1]$ s dvojnásobnou mierou, teda podmienka (4.3) tu splnená nie je.

Príklad 4.13 (Lebesguova miera nie je invariantná pre "znížený stan"). Nech $0 < c < 1$ a nech $T\colon [0,1] \to [0,1]$ je zobrazenia také, že $T(0) = 0$, $T(c) = d \in (0,1)$, $T(1) = 0$ a T je lineárne na $[0,c]$ aj na $[c,1]$. Potom malé okolie jednotky (ktoré má kladnú Lebesguovu mieru!) má prázdny vzor. Preto Lebesguova miera nie je invariantná pre T.

Obr. 4.2: Znížený stan

Príklad 4.14 (Lebesguova miera na kružnici je invariantná pre rotácie). Nech $(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}, \mathrm{Leb})$ je kružnica s Lebesguovou mierou na σ-algebre všetkých borelovských množín. Táto miera je zrejme invariantná pre každú rotáciu kružnice.

Ak interpretujeme $\mathbb{S}^1$ ako interval $[0,1)$, tak každá rotácia kružnice sa dá zapísať v tvare $T(x) = x + \alpha \mod 1$ pre nejaké $\alpha > 0$. Ak si nakreslíte graf tohto zobrazenia v štvorci $[0,1)^2$, pozri Obr. 4.3, tak metódami ako v prípade stanov možno nahliadnuť, že T zachováva Lebesguovu mieru na $\mathcal{B}$ (a podobne ako v prípade stanov sa ukáže, že T zachováva aj Lebesguovu mieru na $\mathcal{L}$).

Obr. 4.3: Graf rotácie $T(x) = x + \alpha \mod 1$

Príklad 4.15 (Lebesguova miera je invariantná pre expandujúce zobrazenia E_m). Nech $m \geq 2$ je prirodzené číslo a nech $E_m\colon [0,1) \to [0,1)$ je zobrazenie definované vzťahom $E_m(x) = mx \pmod 1$ (interval $[0,1)$ môžeme stotožniť s kružnicou $\mathbb{S}^1$, vtedy sa E_m nazýva expandujúcim zobrazením kružnice). Toto zobrazenie zachováva Lebesguovu mieru na borelovských množinách, lebo ak $0 < b < 1$, tak vzor intervalu $[0,b)$ s dĺžkou (mierou) b pozostáva z m navzájom disjunktných intervalov, z ktorých každý má dĺžku b/m. Zachováva aj Lebesguovu mieru na lebesguovsky merateľných množinách (zobrazenie E_m je $\mathcal{L}$-merateľné a E_m-vzor množiny nulovej

Lebesguovej miery je zrejme množina nulovej Lebesguovej miery).

Obr. 4.4: Expandujúce zobrazenie kružnice zachováva Lebesguovu mieru.

Príklad 4.16 (Neatomická invariantná miera pre Gaussovo zobrazenie). Nech $X = [0,1]$, $\mathcal{B}$ je σ-algebra borelovských množín v $[0,1]$ a $T\colon X \to X$ je zobrazenie

$$T(x) := \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0, \\ \frac{1}{x} \bmod 1, & \text{ak } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Pre $x \in (0,1]$ možno funkčnú hodnotu zapísať aj pomocou necelej časti resp. celej časti: $T(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

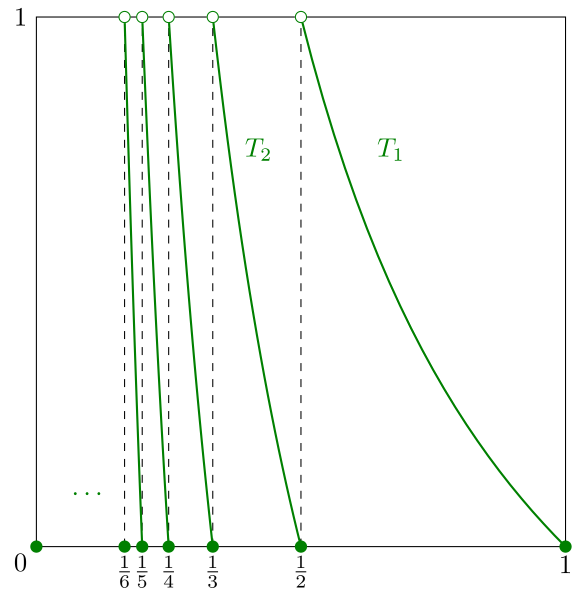
Ak si nakreslíme graf funkcie $1/x$ na $(0,1]$, tak vidíme, že použitie $\bmod 1$ z neho vyrobí nekonečne veľa klesajúcich úsekov. Teda graf T pozostáva z počiatku a z grafov funkcií

$$\begin{aligned}
T_1(x) &:= \frac{1}{x} - 1 && \text{pre } x \in I_1 := \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\
T_2(x) &:= \frac{1}{x} - 2 && \text{pre } x \in I_2 := \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \\
&\dots \\
T_n(x) &:= \frac{1}{x} - n && \text{pre } x \in I_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \\
&\dots .
\end{aligned}$$

Keďže každé zo zobrazení T_k je na svojom definičnom intervale spojité a teda merateľné (vzor otvorenej množiny je borelovská alebo, ekvivalentne, vzor borelovskej množiny je borelovská), ľahko vidieť, že aj $T\colon ([0,1],\mathcal{B}) \to ([0,1],\mathcal{B})$ je merateľné.

Nie je problém nájsť atomickú invariantnú mieru pre T. Takou je napr. Diracova miera δ_0 sediaca v pevnom bode 0. Možno tiež vziať Diracovu mieru sediacu v niektorom inom pevnom bode (je ich nekonečne veľa), prípadne nejakú ich lineárnu kombináciu (podľa Propozície 4.7 je to invariantná miera). Inou možnosťou je nájsť nejakú periodickú orbitu s vyššou periódou a vziať invariantnú mieru sediacu v nej (pozri Príklad 4.6). Konečne, možno vziať aj lineárne kombinácie doteraz uvedených invariantných mier.

Má Gaussovo zobrazenie aj nejakú neatomickú mieru? Dá sa ukázať, že Lebesguova miera nie je pre T invariantnou mierou (Cvičenie 3.9.) A čo iná miera? Ukážeme, že T zachováva tzv. Gaussovu mieru na σ-algebre $\mathcal{B}$ borelovských množín v $[0,1]$. Definovaná je vzťahom (symbolom



Obr. 4.5: Gaussovo zobrazenie (graf má nekonečne veľa vetiev, nakreslených je len 5 z nich)

log označíme prirodzený logaritmus, integrujeme podľa Lebesguovej miery)

$$\mu(B) = \frac{1}{\log 2} \int\limits_B \frac{1}{1+x}\, dx, \qquad B \in \mathcal{B}.^5$$

(Ide teda o mieru, ktorá má hustotu vzhľadom na Lebesguovu mieru, pozri Sekciu 3.6.) Aby sme dokázali, že miera μ je invariantná pre T, podľa Tabuľky 4.1 stačí ukázať, že pre každé $0 < b \leq 1$ je

$$\mu(T^{-1}[0,b]) = \mu([0,b]). \tag{4.7}$$

Na pravej strane máme

$$\mu([0,b]) = \frac{1}{\log 2} \int_0^b \frac{1}{1+x}\, dx = \frac{1}{\log 2} \left[\log(1+x)\right]_{x=0}^b = \frac{\log(1+b)}{\log 2} \ . \tag{4.8}$$

Aby sme určili ľavú stranu (4.7), uvedomme si najskôr, že $T^{-1}[0,b] = \{0\} \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}[0,b]$. Keďže $\mu(\{0\}) = 0$, je

$$\mu(T^{-1}[0,b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n^{-1}[0,b]).$$

Pritom $T_n^{-1}[0,b] = \left[\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n}\right]$, lebo T_n je definovaná a klesajúca na intervale I_n a korene rovníc

[5] Pripomeňme fakt z teórie miery, že ak na priestore s mierou $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ máme nezápornú merateľnú funkciu $f\colon X \to \mathbb{R}$, tak $\mu(A) := \int_A f\, d\lambda$, $A \in \mathcal{A}$, určuje mieru na $\mathcal{A}$. Funkcia f sa nazýva *hustota* miery μ vzhľadom na mieru λ. Ak $\lambda(B) = 0$ tak automaticky vyjde $\mu(B) = 0$, čomu hovoríme, že μ je *absolútne spojitá* vzhľadom na λ. Špeciálne, Gaussova miera μ je absolútne spojitá vzhľadom na Lebesguovu mieru. Teda napr. μ-miera spočítateľnej množiny je nula. Ďalej si všimnite, že koeficient $1/\log 2$ je zvolený tak, aby išlo o pravdepodobnostnú mieru: $\mu([0,1]) = 1$ podľa (4.8).

$T_n(x) = b$ a $T_n(x) = 0$ sú v danom poradí čísla $1/(n+b)$ a $1/n$ z tohto intervalu. Preto

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}[0,b]) = &\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n^{-1}[0,b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \int_{\frac{1}{n+b}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+x}\, dx \\
&= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{1}{n+b}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\log 2} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big([\log(n+1) - \log n] - [\log(n+b+1) - \log(n+b)] \big).
\end{aligned}$$

Ak teraz využijeme, že pre teleskopickú sumu $\sum_{n=1}^{N}(v_{n+1} - v_n)$ platí

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}(v_{n+1} - v_n) = &\\
&= (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + (v_4 - v_3) + \cdots + (v_N - v_{N-1}) + (v_{N+1} - v_N) \\
&= v_{N+1} - v_1,
\end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}[0,b]) = &\\
&= \frac{1}{\log 2} \lim_{N\to\infty} \big([\log(N+1) - \log 1] - [\log(N+b+1) - \log(1+b)] \big) \\
&= \frac{1}{\log 2} \lim_{N\to\infty} \log \frac{(N+1)(1+b)}{N+b+1} = \frac{\log(1+b)}{\log 2}\ .
\end{aligned}$$

To je to isté ako v (4.8), takže μ je naozaj invariantná miera pre Gaussovo zobrazenie.

Zatiaľ sme ukázali, že T zachováva danú mieru μ na σ-algebre $\mathcal{B}$ borelovských množín v $[0,1]$. Postupom opísaným v Poznámkach 4.9 a 4.10 sa dá ľahko ukázať, že T zachováva túto mieru dokonca na σ-algebre $\mathcal{L}_{[0,1]}$ lebesguovsky merateľných množín v $[0,1]$. Predovšetkým,

(i) miera μ je definovaná na $\mathcal{L}_{[0,1]}$,

(ii) $T\colon ([0,1], \mathcal{L}_{[0,1]}, \mu) \to ([0,1], \mathcal{L}_{[0,1]}, \mu)$ je merateľné,

(iii) miera μ na $\mathcal{L}_{[0,1]}$ je úplná.

Ostáva overiť, že ak $N \in \mathcal{L}_{[0,1]}$ je nulovej μ-miery, tak aj $T^{-1}(N)$ je nulovej μ-miery. Keďže podľa Príkladu 3.22 je Gaussova miera μ ekvivalentná s Lebesguovou mierou, stačí dokázať, že ak $N \in \mathcal{L}$, $\mathrm{Leb}(N) = 0$, tak $\mathrm{Leb}(T^{-1}N) = 0$. Aby sme to dokázali, stačí si uvedomiť, že

$$\begin{aligned}
T^{-1}(N) &= T^{-1}\left(N \cap \{0,1\}\right) \cup T^{-1}\left(N \cap (0,1)\right) \\
&= T^{-1}(N \cap \{0,1\}) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k^{-1}(N \cap (0,1)).
\end{aligned}$$

Množina $T^{-1}(N \cap \{0,1\})$ je spočítateľná, preto má Lebesguovu mieru nula. Pre každé k, T_k je C^1-difeomorfizmus otvoreného intervalu I_k na otvorený interval $(0,1)$, preto $T_k^{-1}(N \cap (0,1))$ má nulovú Lebesguovu mieru. Teda $\mathrm{Leb}(T^{-1}(N)) = 0$, čo sme potrebovali ukázať.

4.3 Overovanie invariantnosti mier pomocou integrálov

Uvedieme ekvivalentné definície invariantnej miery. Sú formulované pomocou integrálov. To nie je až také prekvapujúce, ak si uvedomíme, že pre $A \in \mathcal{B}$ sa dá rovnosť $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ ekvivalentne zapísať v tvare

$$\int \chi_{T^{-1}(A)}\, d\mu = \int \chi_A\, d\mu.$$

Užitočná bude aj Lema 3.25. Podľa nej, v našej situácii, keď máme zobrazenie $T\colon X \to X$, pre každú množinu $A \subseteq X$ platí

$$\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}.$$

Uvažujme o dynamickom systéme (X,T). Ak zvolíme bod $x \in X$, môžeme ho interpretovať ako stav systému teraz, teda v čase 0. Potom $T(x)$ je stav systému po uplynutí jednej jednotky času, teda v čase 1, $T^2(x)$ je jeho stav v čase 2 atď. Uvažujme teraz o funkcii $f\colon X \to \mathbb{R}$. Napr. $f(x)$ môže byť teplota systému v stave x alebo nejaká iná fyzikálna veličina, ktorú možno v každom stave systému pozorovať, merať. Pripomeňme, že takúto funkciu nazývame jedným slovom pozorovateľná, angl. observable. Všeobecnejšie, ako pozorovateľné môžu vystupovať funkcie $f\colon X \to \mathbb{C}$ (nie je v tom veľký rozdiel, veď komplexné číslo je dvojica reálnych čísel). V špeciálnom prípade, ak $(X,\mathcal{B},\mu)$ je priestor s mierou a $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ je merateľné zobrazenie, tak má zmysel obmedziť sa na pozorovateľné, ktoré sú integrovateľné, teda patria do $L^1(X,\mathcal{B},\mu)$.

Nasledujú sľúbené ekvivalentné definície invariantnej miery.

Veta 4.17 (**Ekvivalentné definície invariantnej miery**). *Nech $(X,\mathcal{B},\mu)$ je priestor s mierou a nech $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ je merateľné zobrazenie. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(1) T zachováva mieru μ.

(2) Pre každú množinu $A \in \mathcal{B}$ je

$$\int \chi_A\, d\mu = \int (\chi_A \circ T)\, d\mu.$$

(3) Pre každú nezápornú *merateľnú funkciu $f\colon X \to \mathbb{R}$ je*

$$\int f\, d\mu = \int (f \circ T)\, d\mu. \tag{4.9}$$

Ak navyše X je priestor s konečnou *mierou, tak aj nasledujúce podmienky sú s nimi ekvivalentné.*

(4) Pre každú integrovateľnú funkciu $f\colon X \to \mathbb{R}$ (t.j. $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{B},\mu)$) platí (4.9).

(5) Pre každú integrovateľnú funkciu $f\colon X \to \mathbb{C}$ (t.j. $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{B},\mu)$) platí (4.9).

(6) Pre každú funkciu $f \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{B}, \mu))$ *platí* (4.9).

(7) Pre každú funkciu $f \in L^2_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{B}, \mu))$ *platí* (4.9).

Dôkaz. $\boxed{(1)\Leftrightarrow(2)}$ $\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu$ a $\mu(T^{-1}(A)) = \int \chi_{T^{-1}(A)} \, d\mu = \int (\chi_A \circ T) \, d\mu$ (v poslednej rovnosti sme využili Lemu 3.25).[6]

$\boxed{(2)\Leftrightarrow(3)}$ Implikácia sprava doľava je triviálna, lebo ak $A \in \mathcal{B}$, tak χ_A je nezáporná merateľná funkcia. Nech teraz platí (2) a nech $f\colon X \to \mathbb{R}$ je nezáporná merateľná funkcia (potom integrál f, nie nutne konečný, existuje).

- Podľa predpokladu rovnosť $\int f \, d\mu = \int (f \circ T) \, d\mu$ platí pre každú charakteristickú merateľnú funkciu, špeciálne pre každú nezápornú charakteristickú merateľnú funkciu (pozor, tá nie je nevyhnutne integrovateľná, môže mať integrál $+\infty$).

- Z linearity integrálu pre nezáporné merateľné funkcie[7] je zrejmé, že ak tá rovnosť platí pre dve nezáporné (nie nutne integrovateľné) merateľné funkcie, tak platí aj pre akúkoľvek ich lineárnu kombináciu (vysvetlite podrobne). Preto tá rovnosť platí pre každú jednoduchú nezápornú merateľnú funkciu.

- Keďže existuje neklesajúca postupnosť s_n jednoduchých nezáporných merateľných funkcií konvergujúca ku f, tak (podľa Beppo Leviho vety o monotónnej konvergencii) dostávame
$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (s_n \circ T) \, d\mu = \int (f \circ T) \, d\mu$$
(využili sme aj, že ak s_n bodovo konverguje k f, tak $s_n \circ T$ bodovo konverguje ku $f \circ T$).

Nech teraz $\mu(X) < \infty$ (potom každá charakteristická merateľná funkcia je automaticky integrovateľná, následne aj každá jednoduchá merateľná funkcia je integrovateľná). Navyše sa vie, že ak $\mu(X) < \infty$, tak $L^2(\mu) \subseteq L^1(\mu)$.

$\boxed{(3)\Rightarrow(4)}$ Máme dokázať rovnosť (4.9) pre každú reálnu integrovateľnú funkciu. Podľa predpokladu (3) rovnosť (4.9) platí pre každú nezápornú merateľnú funkciu, teda špeciálne pre každú nezápornú integrovateľnú funkciu. Nech teraz $f\colon X \to \mathbb{R}$ je *ľubovoľná* integrovateľná funkcia. Keďže $f = f_+ - f_-$, kde f_+, f_- sú nezáporné integrovateľné funkcie (a teda funkcie spĺňajúce rovnosť (4.9)), tak opäť vďaka linearite integrálu aj f spĺňa rovnosť (4.9).

$\boxed{(4)\Rightarrow(5)}$ Nech rovnosť (4.9) platí pre každú reálnu integrovateľnú funkciu a nech f je komplexná integrovateľná funkcia. Potom $f = f_1 + if_2$ kde f_1, f_2 sú reálne integrovateľné funkcie. Podľa predpokladu f_1, f_2 spĺňajú (4.9). Potom, znovu vďaka linearite integrálu, aj f spĺňa (4.9).

$\boxed{(5)\Rightarrow(7)}$ Ak $\mu(X) < \infty$, tak $L^2(\mu) \subseteq L^1(\mu)$.

$\boxed{(7)\Rightarrow(6)}$ Reálna funkcia je aj komplexná funkcia.

$\boxed{(6)\Rightarrow(2)}$ Ak $A \in \mathcal{B}$, tak $\chi_A \in L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{B}, \mu)$, pretože $(\chi_A)^2 = \chi_A$ a teda $\int |(\chi_A)^2| \, d\mu = \int \chi_A \, d\mu = \mu(A) \le \mu(X) < \infty$. □

[6] Keďže invariantnosť miery μ nie je nič iné ako rovnosť $T_*\mu = \mu$, mohli sme ekvivalenciu (1)⇔(2) dokazovať aj použitím Propozície 3.26.

[7] $\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, d\mu = c_1 \int f_1 \, d\mu + c_2 \int f_2 \, d\mu$ s nezápornými koeficientami c_1, c_2

Poznámka 4.18. Možno nahliadnuť, že do vety by sa dali pridať aj podmienky, v ktorých vystupujú priestory L^p, $p \geq 1$.

Poznámka 4.19. Druhá časť Vety 4.17 (o priestoroch s konečnou mierou) vo všeobecnosti neplatí ak X má nekonečnú mieru. Ukážeme príklad, v ktorom (4) neimplikuje (1). Zvoľme $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{B} = 2^X$, $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = +\infty$ (a $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = +\infty$). Nech ďalej $T(0) = T(1) = 0$. Ľahko sa overí, že $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a $T\colon X \to X$ je merateľné zobrazenie.

- Ukážeme, že podmienka (4) je splnená. Nech teda $f\colon X \to \mathbb{R}$ je integrovateľná funkcia. Potom však, ako je dobre známe z teórie integrálu, je f integrovateľná na množine $\{0\}$ aj na množine $\{1\}$. Keďže však $\mu(\{0\}) = +\infty$ aj $\mu(\{1\}) = +\infty$, musí byť $f(0) = 0$ aj $f(1) = 0$. Odtiaľ $\int f\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$ a rovnako $\int (f \circ T)\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$.

- Podmienka (1) splnená nie je. Zobrazenie T nezachováva mieru μ, lebo $\mu(\{1\}) = +\infty$ ale $\mu(T^{-1}(\{1\})) = \mu(\emptyset) = 0$.

Poznámka 4.20. Keby sme nepoznali definíciu invariantnej miery a mali by sme navrhnúť takú definíciu, mohla by nás napadnúť práve podmienka (3) z Vety 4.17. Naozaj, intuitívne by ju bolo možné interpretovať ako zachovávnie miery μ zobrazením T. Toto možno chápať ako jeden z dôvodov, prečo sa invariantná miera definuje pomocou T^{-1} a nie pomocou T.

Príklad 4.21 (Invariantná miera sediaca v periodickej orbite II). Nech $T\colon X \to X$ je zobrazenie majúce periodický bod x s periódou p. Podľa Príkladu 4.6 je miera

$$\mu = w_0 \left(\delta_x + \delta_{T(x)} + \cdots + \ldots \delta_{T^{p-1}(x)} \right). \tag{4.10}$$

invariantnou mierou pre T (pre $w_0 = 1/p$ je to navyše pravdepodobnostná miera). Dokážeme to teraz iným spôsobom, pomocou Vety 4.17(4)⇒(1). Nech $f\colon X \to \mathbb{R}$ je integrovateľná funkcia. Potom, ak využijeme Propozíciu 3.8 a Príklad 3.2,

$$\begin{aligned}
\int (f \circ T)\, d\mu &= w_0 \left(\int (f \circ T)\, d\delta_x + \int (f \circ T)\, d\delta_{T(x)} + \cdots + \int (f \circ T)\, d\delta_{T^{p-1}(x)} \right) \\
&= w_0 \left((f \circ T)(x) + (f \circ T)(T(x)) + \cdots + (f \circ T)(T^{p-1}(x)) \right) \\
&= w_0 \left(f(T(x)) + f(T^2(x)) + \cdots + f(T^p(x)) \right) \\
&= w_0 \left(f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^{p-1}(x)) \right) \\
&= \int f\, d\mu
\end{aligned}$$

(v predposlednej rovnosti sme využili, že $T^p(x) = x$).

Príklad 4.22 (Lebesguova miera je invariantná pre expandujúce zobrazenia E_m II). Podľa Príkladu 4.15 expandujúce zobrazenia E_m zachovávajú Lebesguovu mieru. Dokážeme to iným spôsobom, pomocou Vety 4.17(4)⇒(1). Pre jednoduchosť zvoľme $m = 2$, uvažujeme teda o zobrazení $T(x) = 2x \pmod 1$, $x \in [0, 1)$. Inak povedané, $T(x) = 2x$ ak $x \in [0, 1/2)$ a $T(x) = 2x - 1$ ak $x \in [1/2, 1)$. Ide o zobrazenie kružnice $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ktorú si môžeme predstaviť aj ako interval $[0, 1]$, v ktorom stotožníme konce. Nech teraz $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ je integrovateľná funkcia taká, že $f(0) = f(1)$ (aby f predstavovala dobre definovanú funkciu na $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Potom (λ označuje

Lebesguovu mieru na kružnici resp. na intervale $[0,1)$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(f\circ T)\,d\lambda &= \int_0^{1/2}(f\circ T)\,d\lambda + \int_{1/2}^1 (f\circ T)\,d\lambda\\ &= \int_0^{1/2} f(2x)\,dx + \int_{1/2}^1 f(2x-1)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f\,d\lambda,\end{aligned}$$

pričom sme pri výpočte prvého integrálu použili substitúciu $2x = t$ a pri výpočte druhého integrálu substitúciu $2x-1=t$.

4.4 *Absolútne spojité invariantné miery pre zobrazenia intervalu

Máme na mysli miery, ktoré sú absolútne spojité vzhľadom na Lebesguovu mieru.

Pripomeňme, že ak $T\colon (X,\mathcal{B},\mu)\to(X,\mathcal{B},\mu)$ je merateľné zobrazenie, tak to, že miera μ je invariantná pre T znamená práve to, že

$$T_*\mu = \mu \quad \text{na } \mathcal{B}.$$

Zároveň Veta 3.28 ukazovala, že pre istú triedu zobrazení $T\colon [a,b]\to[c,d]$ vieme určiť $T_*\mu$, ak μ je miera, ktorá má hustotu vzhľadom na Lebesguovu mieru (t.j. je absolútne spojitá vzhľadom na Lebesguovu mieru). Pre zobrazenia T zo spomínanej triedy zobrazení veta hovorila (pre význam symbolu I_k pozri Vetu 3.28):

$$\mu = \varrho\,\mathrm{Leb} \Rightarrow T_*\mu = (T_*\varrho)\,\mathrm{Leb}, \quad \text{pričom} \quad (T_*\varrho)(y) = \sum_{x\in T^{-1}(y)\cap\bigsqcup_k I_k}\frac{\varrho(x)}{|T'(x)|}, \quad y\in(c,d).$$

Tieto fakty nám dávajú silný nástroj na overovanie, či nejaká absolútne spojitá miera vzhľadom na Lebesguovu mieru je invariantná pre nejaké zobrazenie intervalu. Pravda, musí ísť o zobrazenie správneho typu.

Poznamenajme ešte, že namiesto $d\,\mathrm{Leb}_{[a,b]}$ budeme, ako býva zvykom, písať dx. Mieru $\mathrm{Leb}_{[a,b]}$ uvažujeme definovanú na σ-algebre $\mathcal{L}_{[a,b]}$ všetkých lebesguovsky merateľných podmnožín intervalu $[a,b]$.

Veta 4.23. *Nech $T\colon [a,b]\to[a,b]$ je také zobrazenie, že v intervale $[a,b]$ existujú po dvoch disjunktné otvorené intervaly $I_1, I_2, \dots$ (konečne alebo nekonečne veľa intervalov tvaru $I_k = (a_k,b_k)$) s vlastnosťami:*

(1) zjednotenie $\bigsqcup_k I_k$ má plnú Lebesguovu mieru v $[a,b]$,

(2) pre každé k, zúženie $T_k := T|_{I_k}$ je C^1-difeomorfizmus otvoreného intervalu I_k na otvorený interval (a,b).

Nech $\mu = \varrho\, dx$ pre nejakú lebesguovsky integrovateľnú funkciu ϱ. Potom μ je invariantná pre T vtedy a len vtedy, keď

$$\varrho(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y) \cap \bigsqcup_k I_k} \frac{\varrho(x)}{|T'(x)|}, \qquad \text{pre skoro všetky } y \in [a,b]. \tag{4.11}$$

Dôkaz. Podľa definície invariantnej miery je daná miera $\mu = \varrho\, \mathrm{Leb}_{[a,b]}$ invariantná pre T vtedy a len vtedy, keď

$$\mu = T_*\mu \quad \text{na } \mathcal{L}_{[a,b]}. \tag{4.12}$$

Podľa Vety 3.28 má miera $T_*\mu$ hustotu (vzhľadom na Lebesguovu mieru)

$$(T_*\varrho)(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y) \cap \bigsqcup_k I_k} \frac{\varrho(x)}{|T'(x)|}, \qquad \text{pre } y \in (a,b). \tag{4.13}$$

Dve miery na $\mathcal{L}_{[a,b]}$ s hustotami vzhľadom na Lebesguovu mieru sa rovnajú zrejme vtedy a len vtedy, keď sa ich hustoty zhodujú skoro všade na $[a,b]$. Preto podmienka (4.12) je ekvivalentná s podmienkou

$$\varrho(y) = (T_*\varrho)(y) \qquad \text{pre skoro všetky } y \in [a,b].$$

Vzhľadom na (4.13) je to ekvivalentné s (4.11), ako sme mali dokázať. □

Príklad 4.24. Nech $T\colon [0,1] \to [0,1]$ je zobrazenie stan. Aj z Vety 4.23 vyplýva nám už známy fakt, že Lebesguova miera je invariantná pre T (pozri Príklad 4.11). Naozaj, $T\colon [0,1] \to [0,1]$ spĺňa predpoklady Vety 4.23, s dvomi intervalmi $I_1 = (0, 1/2)$ a $I_2 = (1/2, 1)$. Lebesguova miera má konštantnú hustotu $\varrho = 1$ vzhľadom na Lebesguovu mieru. Pretože každý bod $y \in (0,1)$ má dva vzory, pričom v jednom z nich má T deriváciu $+2$ a v druhom deriváciu -2, rovnosť (4.11) je pre hustotu $\varrho = 1$ splnená. Platí totiž:

$$1 = \frac{1}{|+2|} + \frac{1}{|-2|} \qquad \text{pre všetky } y \in [0,1].$$

Príklad 4.25. V Príklade 4.16 sme ukázali, že miera

$$\mu(B) = \frac{1}{\log 2} \int_B \frac{1}{1+x}\, dx, \qquad B \in \mathcal{L}_{[0,1]}$$

je invariantná pre Gaussovo zobrazenie T. Uvedieme iný dôkaz, založený na Vete 4.23.

Pretože T spĺňa predpoklady Vety 4.23 (s nekonečným množstvom po dvoch disjunktných otvorených intervalov $I_1, I_2, \ldots$, ktorých zjednotenie má plnú mieru a T je C^1-difeomorfizmus na každom z nich), stačí dokázať, že hustota

$$\varrho(x) = \frac{1}{(1+x)\log 2}, \qquad x \in [0,1].$$

spĺňa podmienku

$$\varrho(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y) \cap \bigsqcup_k I_k} \frac{\varrho(x)}{|T'(x)|}, \qquad \text{pre skoro všetky } y \in [0,1]. \tag{4.14}$$

Dokážeme, že táto rovnosť je splnená pre každé $y \in (0,1)$.

Fixujme teda $y \in (0,1)$ a pripomeňme, že T má nekonečne veľa vetiev $T_k(x) = (1/x) - k$, $k = 1, 2, \ldots$. Preto bod y má nekonečne veľa vzorov

$$T_k^{-1}(y) = \frac{1}{y+k}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Všetky tieto vzory sú v zjednotení $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, na ktorom má T deriváciu $T'(x) = (1/x)' = -1/x^2$. Potom pre pravú stranu (4.14) dostávame:

$$\begin{aligned}\sum_{x \in T^{-1}(y) \cap \bigsqcup_k I_k} \frac{\varrho(x)}{|T'(x)|} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho(T_k^{-1}(y))}{|T'(T_k^{-1}(y))|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho\left(\frac{1}{y+k}\right)}{\left|T'\left(\frac{1}{y+k}\right)\right|} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y+k}{(y+k+1)\log 2} \cdot \frac{1}{(y+k)^2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(y+k)(y+k+1)}\end{aligned} \tag{4.15}$$

Ide tu o teleskopickú sumu. Ak použijeme rozklad

$$\frac{1}{(y+k)(y+k+1)} = \frac{1}{y+k} - \frac{1}{y+k+1},$$

v n-tom čiastočnom súčte sa vyrušia všetky členy okrem prvého a posledného, takže

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(y+k)(y+k+1)} = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+n+1}.$$

Limitovaním pre $n \to \infty$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(y+k)(y+k+1)} = \frac{1}{y+1}.$$

a, po dosadení do (4.15),

$$\sum_{x \in T^{-1}(y) \cap \bigsqcup_k I_k} \frac{\varrho(x)}{|T'(x)|} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{y+1} = \varrho(y),$$

čo sme potrebovali dokázať.

4.5 Invariantnosť Lebesguovej miery pre niektoré C^1-difeomorfizmy

Teraz sa ideme venovať systémom na priestore $\mathbb{R}^n$, prípadne na tóruse $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, v ktorých je invariantnou mierou Lebesguova miera.

4.5.1 C^1-difeomorfizmy zachovávajúce Lebesguovu mieru

Nech U je otvorená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a nech $T\colon U \to \mathbb{R}^m$ je zobrazenie so súradnicovými funkciami $g_1, \ldots, g_m$. To znamená, že

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Hovoríme, že zobrazenie T je *triedy* C^1 (alebo presnejšie triedy $C^1(U)$), ak má spojité parciálne derivácie prvého rádu na celej množine U. Týchto derivácií je mn a štandardným spôsobom sa usporadúvajú do matice $m \times n$. Ak $\mathbf{p} \in U$, tak

$$J_T(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

je tzv. *Jacobiho matica* zobrazenia T v bode $\mathbf{p}$. Ak $T\colon U \to V$ je triedy C^1, tak je aj spojité.

Budeme sa zaoberať prípadom $m = n$, ktorý je zvlášť dôležitý v dynamike. Vtedy je Jacobiho matica štvorcová, typu $n \times n$ a má teda determinant, tzv. *Jacobián*. Jeho hodnota samozrejme závisí od bodu $\mathbf{p}$, v ktorom ho vyčísľujeme. Ak T je triedy C^1, sú parciálne derivácie spojité, a preto je aj Jacobián spojitou funkciou (spojite závisí od voľby bodu $\mathbf{p}$).

Ak U, V sú otvorené množiny v $\mathbb{R}^n$, tak zobrazenie $T\colon U \to V$ sa nazýva C^1-*difeomorfizmus*, ak T je bijekcia, T je triedy C^1 a aj inverzné zobrazenie $T^{-1}\colon V \to U$ je triedy C^1. Na zisťovanie, či je nejaké zobrazenie C^1-difeomorfizmus, sa používa nasledujúce dobre známe tvrdenie.

Propozícia 4.26. *Ak $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená množina, tak zobrazenie $T\colon U \to \mathbb{R}^n$ je C^1-difeomorfizmom $U \to T(U)$ práve vtedy, keď je to injektívne C^1-zobrazenie, ktorého Jacobián je v každom bode z U rôzny od nuly.*

V Lebesguovej teórii veta o substitúcii v Lebesguovom integrále hovorí nasledovné, pozri napr. [Yeh14, Theorem 26.9]. Symbolom λ_n označme Lebesguovu mieru v $\mathbb{R}^n$.

Veta 4.27 (Substitúcia v Lebesguovom integrále). *Nech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Nech $T\colon U \to \mathbb{R}^n$ je injektívne C^1-zobrazenie. Potom platia nasledujúce tvrdenia.*

(a) Ak $A \subseteq U$ je λ_n-merateľná množina, tak aj $T(A)$ je λ_n-merateľná a

$$\lambda_n(T(A)) = \int_A |\det J_T|\, d\lambda_n \ .$$

(b) Ak $f\colon T(U) \to \mathbb{R}$ (alebo do rozšírenej reálnej osi) je λ_n-merateľná funkcia, tak

$$\int_{T(U)} f\, d\lambda_n = \int_U (f \circ T)|\det J_T|\, d\lambda_n$$

v tom zmysle, že akonáhle jeden z tých dvoch integrálov existuje, tak existuje aj druhý a rovnajú sa. Špeciálne, táto rovnosť automaticky platí, ak merateľná funkcia f je nezáporná na $T(U)$.

Vetu tu nebudeme dokazovať, všimnite si však, že (a) dostaneme z (b) voľbou $f = \chi_{T(A)}$. Všimneme si niektoré dôsledky vety.

Dôsledok 4.28. *Nech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Nech $T\colon U \to \mathbb{R}^n$. Potom*

(a) Ak T je injektívne C^1-zobrazenie, tak obraz lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina a obraz množiny nulovej *Lebesguovej miery je množina* nulovej *Lebesguovej miery.*

(b) *Ak $T: U \to T(U)$ je C^1-difeomorfizmus, tak obraz aj vzor lebesguovsky merateľnej množiny je lebesguovsky merateľná množina a obraz aj vzor množiny* nulovej *Lebesguovej miery je množina* nulovej *Lebesguovej miery.*

Dôkaz. (a) Toto je Veta 4.27(a) (integrál na A je nulový, ak A má nulovú mieru).
(b) vyplýva z (a). □

Dôsledok 4.29. *Nech T je injektívne C^1-zobrazenie $\mathbb{R}^n$ na seba. Potom Lebesguova miera λ_n je invariantná pre T vtedy a len vtedy, keď $|\det J_T| = 1$ v každom bode z $\mathbb{R}^n$.*

Dôsledok dokážeme. Najskôr si však všimnime, že T je tu bijekcia, takže zachovávanie miery tu možno opisovať nielen rovnosťami tvaru $\lambda_n(T^{-1}(A)) = \lambda_n(A)$ (ako je to v definícii invariantnej miery), ale rovnako dobre rovnosťami tvaru $\lambda_n(A) = \lambda_n(T(A))$.

Tiež si všimnime, že vzhľadom na Propozíciu 4.26 tento dôsledok ukazuje, že ak injektívne C^1-zobrazenie $\mathbb{R}^n$ na seba zachováva Lebesguovu mieru, tak je to C^1-diffeomorfizmus.

Dôkaz. Ak $|\det J_T| = 1$ v každom bode, tak Veta 4.27(a) pre každú lebesguovsky merateľnú množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dá $\lambda_n(T(A)) = \lambda_n(A)$. Teda T zachováva Lebesguovu mieru.

Nech teraz T zachováva Lebesguovu mieru a nech v nejakom bode $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ je $|\det J_T|(\mathbf{t}) \neq 1$ (chceme odvodiť spor). Nech napr. $|\det J_T|(\mathbf{t}) > 1$ (ak $0 \leq |\det J_T|(\mathbf{t}) < 1$), je dôkaz podobný). Keďže Jacobián $\det J_T$ je spojitou funkciou bodu, tak existuje otvorené okolie V bodu $\mathbf{t}$ a $\varepsilon > 0$ také, že $|\det J_T| > 1 + \varepsilon$ v každom bode z V. Pritom V je Lebesguovsky merateľná množina, takže podľa Vety 4.27(a) je

$$\lambda_n(T(V)) = \int_V |\det J_T|\, d\lambda_n \geq \int_V (1+\varepsilon)\, d\lambda_n = (1+\varepsilon)\lambda_n(V) > \lambda_n(V),$$

čo odporuje predpokladu, že T zachováva Lebesguovu mieru. □

Ak v horeuvedenom dôsledku T zachováva Lebesguovu mieru, tak $|\det J_T| = 1$ v každom bode z $\mathbb{R}^n$ a podľa Propozície 4.26 je T difeomorfizmus $\mathbb{R}^n$ na seba. Mohlo by sa zdať, že v niektorých bodoch môže byť $\det J_T = +1$ a v iných $\det J_T = -1$. Lenže Jacobián C^1-difeomorfizmu je spojitou funkciou bodu a $\mathbb{R}^n$ je súvislý priestor. Preto v uvedenom dôsledku sú práve dve možnosti. Buď je v *každom* bode Jacobián $\det J_T = +1$ alebo je v *každom* bode $\det J_T = -1$. Zobrazenie T je v prvom (resp. druhom) prípade C^1-difeomorfizmus *zachovávajúci (resp. obracajúci) orientáciu.* Tak sa totiž nazýva každý C^1-difeomorfizmus, ktorý má v každom bode kladný (resp. záporný) Jacobián.

4.5.2 Lineárne zobrazenia zachovávajúce Lebesguovu mieru

Fakty uvedené vyššie nám pomôžu zistiť, ktoré lineárne zobrazenia $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zachovávajú Lebesguovu mieru. Pôjde tu o zovšeobecnenie toho, čo je v dimenzii 1 zrejmé (vysvetlite):

- Medzi lineárnymi zobrazeniami $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, t.j. zobrazeniami tvaru $T(x) = ax$ zachovávajú Lebesguovu mieru práve tie, pre ktoré $|a| = 1$, teda práve dve zobrazenia: $T(x) = x$ a $T(x) = -x$.

Teraz ukážeme, že medzi lineárnymi zobrazeniami $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, t.j. medzi zobrazeniami tvaru

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

kde A je nejaká matica typu $n \times n$ s reálnymi koeficientami, zachovávajú Lebesguovu mieru v $\mathbb{R}^n$ práve tie, pre ktoré $|\det A| = 1$.[8]

Začneme pripomenutím dobre známych faktov z lineárnej algebry.

Propozícia 4.30. *Nech $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ je lineárne zobrazenie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(1) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ je injekcia,

(2) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ je surjekcia,

(3) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ je bijekcia,

(4) $\det A \neq 0$ (t.j. matica A je regulárna),

(5) existuje inverzná matica A^{-1},

(6) k zobrazeniu $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ existuje inverzné zobrazenie.

Navyše platí:

(a) Ak k danému zobrazeniu existuje inverzné zobrazenie, tak toto je tiež lineárne, dané inverznou maticou A^{-1} (teda je to zobrazenie $\mathbf{x} \mapsto A^{-1}\mathbf{x}$).

(b) Lineárne zobrazenie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zobrazuje $\mathbb{R}^n$ na vektorový podpriestor priestoru R^n.

V nasledujúcej propozícii spojitosť v (a) vyplýva z (b), lebo spojitosť parciálnych derivácií implikuje spojitosť zobrazenia. V skutočnosti časť (a) ani nebudeme potrebovať, zaradili sme ju však pre úplnosť a z pedagogických dôvodov.

Propozícia 4.31. *Nech $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ je lineárne zobrazenie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

(a) T je Lipschitzovské (teda aj spojité).

(b) T má konštantné (teda spojité) parciálne derivácie. Jacobiho matica $J_T(\mathbf{p}) = A$ v každom bode $\mathbf{p}$.

(c) T je C^1-difeomorfizmus práve vtedy, keď $\det A \neq 0$ (teda práve vtedy, keď je to bijekcia, pozri Propozíciu 4.30(3)⇔(4)).

Dôkaz. (a) Toto je dobre známe z funkcionálnej analýzy (platí, že $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|T(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|T\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, kde $\|T\|$ je tzv. norma operátora T). Bez tejto znalosti možno postupovať nasledovne.

Ak pre bod (stĺpcový vektor) $\mathbf{z} = (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ definujeme jeho tzv. euklidovskú normu (veľkosť vektora zo strednej školy) vzťahom $\|\mathbf{z}\| := \left(\sum_{i=1}^n z_i^2\right)^{1/2}$, tak euklidovská vzdialenosť bodov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ nie je nič iné ako $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, teda norma ich rozdielu.

Nech $A = (a_{ij})_{i,1=1}^n$. Vezmime $\mathbf{z} = (z_i)_{i=1}^n$ a jeho obraz

$$\mathbf{z}' := T(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} = (z_i')_{i=1}^n, \quad \text{kde} \quad z_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j. \tag{4.16}$$

[8] Pre $n = 1$ je matica A daná číslom a, teda je to matica typu 1×1 a jej determinant je a. Teda oba výsledky sú v súlade.

Potom
$$\|T(\mathbf{z})\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (z_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \right)^2$$
Podľa Cauchy-Schwartzovej nerovnosti je
$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} z_j^2 \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \|\mathbf{z}\|^2 .$$
Po dosadení do predchádzajúcej rovnosti dostaneme
$$\|T(\mathbf{z})\|^2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \|\mathbf{z}\|^2$$
Zaveďme konštantu $M := \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$. Táto konštanta závisí od matice A (teda od zobrazenia T), nie však od voľby vektora $\mathbf{z}$. Z posledného vzťahu dostávame
$$\|T(\mathbf{z})\| \le M \|\mathbf{z}\| .$$
Z toho už ľahko vyplýva lipschitzovskosť zobrazenia T. Naozaj, pre euklidovskú vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov (stĺpcových vektorov) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dostávame
$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|T(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \le M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| .$$
(b) Parciálne derivácie sa vypočítajú z vyjadrenia pre T, pozri (4.16).

(c) Ak T je C^1-difeomorfizmus, tak je to predovšetkým bijekcia a z Propozície 4.30 dostaneme, že $\det A \neq 0$. Obrátene, nech $\det A \neq 0$. Potom z Propozície 4.30 dostaneme, že T je bijekcia, teda existuje inverzné zobrazenie, ktoré je podľa Propozície 4.30 tiež lineárne. Podľa (b) majú obe tieto zobrazenia spojité parciálne derivácie. Teda T je C^1-difeomorfizmus. □

Dôsledok 4.32. *Ak $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ je lineárne zobrazenie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané maticou A, tak T zachováva Lebesguovu mieru vtedy a len vtedy, keď $|\det A| = 1$.*

Dôkaz. Ak T nie je bijekcia, tak to nie je ani surjekcia (pozri Propozíciu 4.30(2)⇔(3)). Potom však, využijúc aj Propozíciu 4.30(b), je oborom hodnôt *vlastný* vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$. Ten má však nulovú (n-rozmernú) Lebesguovu mieru a keďže jeho vzor je celý priestor $\mathbb{R}^n$, zobrazenie nezachováva Lebesguovu mieru.

Ukázali sme tak, že keď zisťujeme, ktoré lineárne zobrazenia zachovávajú Lebesguovu mieru, stačí si všímať bijekcie. Bijektívne lineárne zobrazenie je však automaticky C^1-difeomorfizmus (pozri Propozíciu 4.31(c)). Ak ešte vezmeme do úvahy, že $J_T = A$ (pozri Propozíciu 4.31(b)), tak Dôsledok 4.29 dáva požadovaný výsledok: T zachováva Lebesguovu mieru práve vtedy, keď $|\det A| = 1$. □

Dôsledok 4.33. *Ak T je zobrazenie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ také, že pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a každé $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ je*
$$T(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - T(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}^n,$$
tak T indukuje zobrazenie $\mathcal{T}$ tórusu $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ do seba. Pritom platia nasledujúce tvrdenia.

(a) $\mathcal{T}$ je lebesguovsky merateľné na $\mathbb{T}^n$ práve vtedy, keď T je lebesguovsky merateľné na $\mathbb{R}^n$.

(b) $\mathcal{T}$ zachováva Lebesguovu mieru na $\mathbb{T}^n$ práve vtedy, keď T zachováva Lebesguovu mieru na $\mathbb{R}^n$.

Pomocou horeuvedených dôsledkov možno pre niektoré špeciálne zobrazenia dokázať, že zachovávajú Lebesguovu mieru.

Príklad 4.34 (Arnoľdovo CAT zobrazenie zachováva Lebesguovu mieru). Matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

prislúcha lineárne zobrazenie roviny, $T(x,y) = (2x+y, x+y)$. Pretože matica A je celočíselná, je splnená podmienka $T(x+a, y+b) - T(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ pre každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a každé $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Preto zobrazeniu T prislúcha indukované zobrazenie $\mathcal{T}$ na dvojrozmernom tóruse,

$$\mathcal{T}(x,y) = (2x+y \mod 1, x+y \mod 1).$$

Pre danú konkrétnu maticu sa niekedy nazýva Arnoľdovo[9] CAT-zobrazenie, kde CAT pochádza zo slov "continuous automorphism of the torus", ale ide zároveň o slovnú hračku, lebo Arnoľd toto zobrazenie ilustroval tak, že ukazoval, ako sa obrázok hlavy mačky v jednotkovom štvorci (z ktorého stotožnením protiľahlých strán vzniká tórus) mení pri iterovaní pomocou zobrazenia T.[10]

Pretože $\det A = 1$, na základe Dôsledkov 4.32 a 4.33(b) Arnoľdovo CAT zobrazenie zachováva Lebesguovu mieru na tóruse.

Príklad 4.35. Pre $\alpha \in \mathbb{R}$ definujme zobrazenie na dvojrozmernom tóruse vzťahom

$$\mathcal{T} \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \qquad \mathcal{T}(x,y) = (x+\alpha, x+y) \mod 1.$$

Dokážeme, že zachováva Lebesguovu mieru na tóruse.

Toto zobrazenie je indukované (afinným, ale nelineárnym) zobrazením v rovine,

$$T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x,y) = (x+\alpha, x+y).$$

Naozaj, pre zobrazenie T je splnená podmienka $T(x+a, y+b) - T(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ pre každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a každé $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Teda podľa Dôsledku 4.33 zobrazenie T naozaj indukuje nejaké zobrazenie na tóruse. Týmto indukovaným zobrazením na tóruse je zrejme naše zobrazenie $\mathcal{T}$.

Podľa Dôsledku 4.33(b) stačí preto dokázať, že rovinné zobrazenie T zachováva Lebesguovu mieru. Na to použijeme Dôsledok 4.29. Zobrazenie T je injektívne C^1-zobrazenie $\mathbb{R}^2$ na seba. Pritom jeho Jakobián

$$\det J_T(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x+\alpha)}{\partial x} & \frac{\partial(x+\alpha)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x+y)}{\partial x} & \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

takže jeho absolútna hodnota je v každom bode (x,y) rovná 1. Preto T (a potom aj $\mathcal{T}$) zachováva Lebesguovu mieru.

Poznamenajme, že sme mohli postupovať aj inak. Zobrazenie T sa dá vyjadriť ako kompozícia lineárneho zobrazenia $(x,y) \mapsto (x, x+y)$, ktoré zachováva Lebesguovu mieru (lebo jeho matica má determinant rovný 1, pozri Dôsledok 4.32) a posunutia $(x,y) \mapsto (x+\alpha, y)$, ktoré tiež zachováva Lebesguovu mieru (pozri Príklad 4.3). Potom podľa Propozície 4.4 aj T zachováva Lebesguovu mieru.

---

[9] Владимир Игоревич Арнольд (Vladimír Igorevič Arnoľd, 1937-2010) bol významný sovietsky a ruský matematik, v r. 1957 vyriešil trinásty Hilbertov problém, je známy ako spolutvorca tzv. KAM (Kolmogorov-Arnoľd-Moser) teórie a ako autor mnohých ďalších významných výsledkov v rôznych oblastiach matematiky, o.i. v dynamických systémoch a diferenciálnych rovniciach.

[10] Angl. cat = mačka. Na internete ľahko nájdete príslušné obrázky.

4.6 Cvičenia a projekty

Cvičenie 4.1. Dokážte Propozíciu 3.7.

Cvičenie 4.2. Ukážte, že Lebesguova miera na $\mathbb{R}$ je neatomická.

Cvičenie 4.3. Nech $(X, \mathcal{B})$ je merateľný priestor. Dokážte, že lineárna kombinácia neatomických mier na $\mathcal{B}$ je neatomická miera na $\mathcal{B}$.

Cvičenie 4.4. Dokážte Propozíciu 3.8. (Návod: Začnite prípadom, keď f je charakteristická funkcia množiny.)

Cvičenie 4.5. Dokážte Propozíciu 3.23.

Cvičenie 4.6. Nech T je merateľné zobrazenie z jedného priestoru s mierou do druhého. Ako by ste v tejto situácii definovali, že T zachováva mieru?

Cvičenie 4.7. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T\colon X \to X$ je bijekcia taká, že T aj T^{-1} sú merateľné. Dokážte, že T zachováva mieru μ vtedy a len vtedy, keď T^{-1} zachováva mieru μ.

Cvičenie 4.8. Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva mieru μ a nech $k \geq 2$. Potom Propozície 4.4 aj iterácia T^k zachováva mieru μ. Je obrátené tvrdenie pravdivé?

Cvičenie 4.9. Podľa Propozície 4.7 je lineárna kombinácia invariantných mier invariantná miera. Ak sú pôvodné miery pravdepodobnostné, za akých predpokladov je výsledná miera tiež pravdepodobnostná?

Cvičenie 4.10. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci dynamický systém (teda μ je invariantná miera pre T). Nech $A \in \mathcal{B}$ má konečnú μ-mieru. Dokážte, že potom $\mu(T^{-1} \setminus A) = \mu(A \setminus T^{-1}A)$.

Cvičenie 4.11. Nech X je nespočítateľná množina a nech

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq X \colon A \text{ je spočítateľná alebo } X \setminus A \text{ je spočítateľná}\}.$$

Definujme funkcie $\mu, \nu, \omega\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ takto:

$$\begin{aligned}
\mu(A) = 0 \text{ ak } A \text{ je spočítateľná a } \mu(A) = 1 \text{ ak } A \text{ je nespočítateľná},\\
\nu(A) = 0 \text{ ak } A \text{ je spočítateľná a } \nu(A) = 2 \text{ ak } A \text{ je nespočítateľná},\\
\omega(A) = 0 \text{ ak } A \text{ je spočítateľná a } \omega(A) = \infty \text{ ak } A \text{ je nespočítateľná}.
\end{aligned}$$

Dokážte nasledujúce tvrdenia.

(a) B je σ-algebra.

(b) $\mu \neq \nu$ sú konečné miery na $\mathcal{A}$.

(c) ω je miera na $\mathcal{A}$, ale nie je σ-konečná.

(d) Systém $\mathcal{G} = \{A \subseteq X \colon A \text{ je spočítateľná}\}$ spĺňa predpoklady (D1), (D2) z Dynkinovej vety a pre miery μ, ν platí (D4). Napriek tomu, hoci μ, ν sú konečné (a teda aj σ-konečné), nie je $\mu = \nu$ na celej σ-algebre B. To nie je spor s Dynkinovou vetou, lebo nie je splnená podmienka (D3), neexistuje požadovaná rastúca postupnosť množín).

(d) Ak za systém $\mathcal{G}$ nezvolíme systém z (d) ale priamo σ-algebru $\mathcal{B}$, tak sú splnené (D1), (D2), (D3) ale nie D(4).

Cvičenie 4.12. Nech $T\colon (X, \mathcal{B}) \to (X', \mathcal{B}')$ je merateľné zobrazenie a nech x, y sú dva rôzne body z X. Označme $T(x) = x'$, $T(y) = y'$. Určte

(a) $T_*(\delta_x + \delta_y)$ ak $x' \neq y'$,

(b) $T_*(\delta_x + \delta_y)$ ak $x' = y'$.

Cvičenie 4.13. Ktoré afinné zobrazenia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, teda zobrazenia tvaru $T(x) = ax+b$, zachovávajú Lebesguovu mieru? Zovšeobecnite na afinné zobrazenia $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, teda zobrazenia tvaru $T(x) = Ax + B$, kde A, B sú matice $n \times n$ s reálnymi koeficientami.

Cvičenie 4.14. Nech $X = [0, 1)$ a

$$T(x) = \begin{cases} 2x \pmod 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 4x \pmod 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Ukážte, že T zachováva Lebesguovu mieru.

Cvičenie 4.15. Nájdite príklad priestoru s mierou $(X, \mathcal{B}, \mu)$ a merateľného zobrazenia $T\colon X \to X$, ktoré nie je surjektívne a napriek tomu zachováva mieru μ. (Porovnajte s Príkladom 4.13.)

Cvičenie 4.16. Nech $T\colon [0, 1] \to [0, 1]$ je také zobrazenie, že

(a) $T(0) = 1/2$, $T(1/4) = 0$, $T(3/4) = 1$, $T(1) = 1/2$,

(b) $T(0) = 1/2$, $T(1/4) = 1$, $T(3/4) = 0$, $T(1) = 1/2$.

Vyšetrite, či T zachováva Lebesguovu mieru.

Cvičenie 4.17. Ukážte, že Gaussovo zobrazenie nezachováva Lebesguovu mieru.

Cvičenie 4.18. Nech $T\colon [0, 1] \to [0, 1]$ je zobrazenie definované vzťahom[11] $T(x) = 4x(1 - x)$. Keďže T je spojité, je merateľné vzhľadom na σ-algebru $\mathcal{B}$ borelovských množín. Dokážte nasledujúce tvrdenia.

(a) Zobrazenie T nezachováva Lebesguovu mieru.

(b) Zobrazenie T zachováva mieru μ definovanú ako integrál jej (mimochodom neohraničenej) funkcie hustoty vzľadom na Lebesguovu mieru:

$$\mu(B) = \int_B \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\, dx, \quad B \in \mathcal{B}.$$

(Prečo asi je v menovateli koeficient π?)

Cvičenie 4.19. Nech α je reálne číslo. Uvažujte o zobrazení $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dvojrozmerného tórusu, ktoré je definované vzťahom

$$\mathcal{T}(x, y) = (x + \alpha \mod 1, x + y \mod 1).$$

Ukážte, že toto zobrazenie zachováva Lebesguovu mieru.

[11] Je to jedno z tzv. logistických zobrazení $x \mapsto rx(1-x)$, $r \in [0, 4]$. Niekedy sa nazýva tiež plná parabola (plná preto, lebo práve pre $r = 4$ je to surjekcia $[0, 1]$ na seba). V teórii dynamických systémov sa dokazuje, že plná parabola je topologicky konjugovaná so zobrazením stan. Zatiaľ čo stan zachováva Lebesguovu mieru, plná parabola ju nezachováva.

Cvičenie 4.20. Nech $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci dynamický systém. Povieme, že množina W je *slabo blúdivá*, ak existuje postupnosť $n_i \nearrow +\infty$ taká, že $T^{n_i}W \cap T^{n_j}W = \emptyset$ pre každé $i \neq j$. Dokážte, že ak je miera μ konečná, tak slabo blúdivé množiny s kladnou mierou nemôžu existovať.

Cvičenie 4.21. Majme konečne veľa alebo nekonečne spočítateľne veľa po dvoch disjunktných otvorených intervalov $I_k = (a_k, b_k) \subseteq [0,1]$, pre $k \in K$. Nech $\sum_{k\in K}(b_k - a_k) = 1$. Nech zobrazenie $T\colon [0,1] \to [0,1]$ je také, že na každom z otvorených intervalov I_k je lineárne a zobrazuje ho na otvorený interval $(0,1)$. Dokážte, že Lebesguova miera $\mathrm{Leb}_{[0,1]}$ je invariantná pre T. (Na rozdiel od všeobecnej situácie vo Vetách 3.28 a 4.23, T je aj borelovsky merateľná, vzor borelovskej množiny je borelovská množina.)

Cvičenie 4.22. Dokážte, že zobrazenie $T\colon [0,1] \to [0,1]$ definované vzťahom

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1-x}{x}, & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

zachováva mieru μ definovanú na lebesguovsky integrovateľných množinách v $[0,1]$ vzťahom

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx}{x},$$

teda mieru s hustotou $1/x$ vzhľadom na Lebesguovu mieru. (Na rozdiel od všeobecnej situácie vo Vetách 3.28 a 4.23, T je aj borelovsky merateľná.)

Cvičenie 4.23. Dokážte, že zobrazenie $T\colon [0,1] \to [0,1]$ definované vzťahom $T(x) = 4x(1-x)$ zachováva mieru μ definovanú na lebesguovsky integrovateľných množinách v $[0,1]$ vzťahom

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

teda miera s hustotou $1/\sqrt{x(1-x)}$ vzhľadom na Lebesguovu mieru. (Na rozdiel od všeobecnej situácie vo Vetách 3.28 a 4.23, T je aj borelovsky merateľná.)

Projekt 4.24. V Cvičení 4.20 hovoríme o slabo blúdivých množinách. Mali by teda existovať aj blúdivé či silno blúdivé množiny. Okrem toho, popri obrazoch množiny W by sme mohli uvažovať aj vzory. Rozpracujte, aj s pomocou literatúry, túto problematiku do formy sekcie alebo aspoň súboru cvičení do tohto učebného textu.

Projekt 4.25. Všimnite si, že Dôsledky 4.32, 4.33 a Príklad 4.34 možno zovšeobecniť. Podstatné je len to, že matica A je celočíselná a má determinat $+1$ alebo -1. Dimenzia nie je dôležitá a namiesto lineárnych zobrazení možno uvažovať afinné zobrazenia. Spracujte túto problematiku a aplikujte ju aj na rotácie kružnice.

Projekt 4.26. V Poznámke 4.19 sme ukázali, ze druhá časť Vety 4.17 neplatí, ak vynecháme predpoklad, že $\mu(X) < \infty$. Je možné tento predpoklad nahradiť nejakým iným rozumným predpokladom? (Napr. že T je surjekcia alebo že v (4) a (5) namiesto integrovateľných funkcií budeme uvažovať funkcie majúce integrál apod. Autor sa s týmto nestretol, dokonca sa nestretol ani s Poznámkou 4.19, veta sa v knihách formuluje len pre priestory s konečnou mierou.)

Kapitola 5

Rekurentnosť

5.1 Počet návratov. Poincarého veta o rekurencii

Predpoklad, že $T\colon X \to X$ zachováva *konečnú* mieru, má dôležité dynamické dôsledky. Jedným z nich je Poincarého veta o rekurencii.[1]

Nech T je zobrazenie $X \to X$ a $A \subseteq X$. Predpokladajme, že $x \in A$. To sa dá vyjadriť aj tak, že $T^0(x) \in A$, teda bod x je v "čase" 0 v množine A. Ak existuje $n \geq 1$ tak, že aj $T^n(x) \in A$, je prirodzené povedať, že bod x sa v čase n *vrátil do množiny* A. Ak je takých prirodzených čísel n nekonečne veľa (alebo presne k alebo ani jedno), budeme hovoriť, že bod x sa nekonečne veľakrát (alebo presne k-krát) vrátil do A.[2] Dobré je si tiež uvedomiť, že nasledujúce podmienky sú pre $n \geq 1$ ekvivalentné:

(1) Existuje bod $x \in A$, ktorý sa v čase n vráti do A.

(2) $T^n(A) \cap A \neq \emptyset$.

(3) $T^{-n}(A) \cap A \neq \emptyset$.

Každá z troch podmienok je totiž ekvivalentná s tým, že v A existuje bod, ktorého T^n-obraz je tiež v A. Názorne povedané, podmienky sú ekvivalentné s tým, že existuje T^n-šípka, ktorá začína aj končí v A.

Definícia 5.1. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Povieme, že merateľné zobrazenie $T\colon X \to X$ je *rekurentné* (vzhľadom na mieru μ), ak pre každú množinu $A \subseteq X$ s mierou $\mu(A) > 0$ existuje bod $x \in A$, ktorý sa vráti do A (t.j. existuje $n \geq 1$ tak, že $T^n(x) \in A$).

Inak povedané, T je rekurentné, ak je merateľné a každá množina kladnej miery sa pri iterovaní niekedy (v čase $n \geq 1$) pretne sama so sebou. Poznamenajme, že nejde o štandardnú terminológiu, ale ustálená terminológia neexistuje.[3]

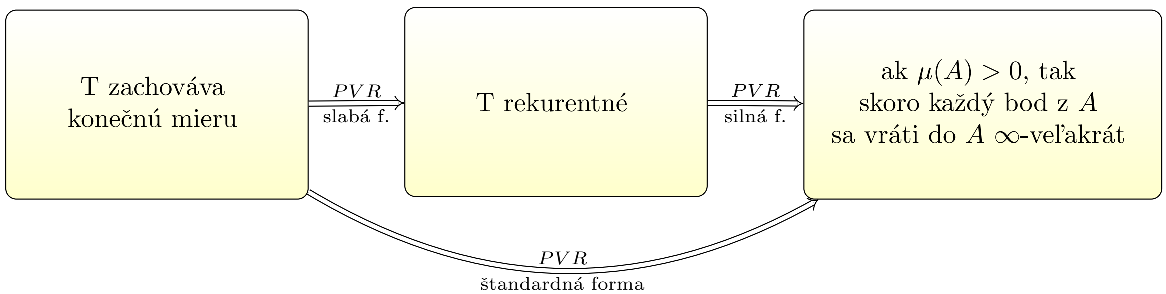
[1] Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) bol francúzsky matematik, fyzik, astronóm a filozof. V matematike bol polyhistorom, vynikol v mnohých jej oblastiach. Počas štúdia problému troch telies si uvedomil, že vývoj deterministického systému môže dramaticky závisieť od počiatočných podmienok. (Zdá sa, že pred ním si to uvedomoval len J. C. Maxwell.) Tým pomohol položiť základy modernej teórie chaosu. Je považovaný aj za jedného zo zakladateľov topológie. V roku 1905 dospel súčasne s Einsteinom k základným pojmom špeciálnej teórie relativity.

[2] Pozor na možné nedorozumenia. Podľa prijatej terminológie aj ak celá trajektória $x, T(x), T^2(x), \dots$ leží v A, tak hovoríme, že bod a sa nekonečne veľa krát "vrátil" do A, hoci množinu A nikdy "neopustil". Jednoducho, pre bod $x \in A$ počítame počet časov $n \geq 1$, pre ktoré je $T^n(x) \in A$. "Návrat" je teda návšteva v čase $n \geq 1$.

[3] Hovorí sa napr. o konzervatívnych zobrazeniach alebo o nestlačiteľných zobrazeniach, ale tieto pojmy majú aj iné významy. Ak by sme mali použiť analógiu s topologickou dynamikou, mohli by sme tiež vravieť o mierovo neblúdivých zobrazeniach, aj k tomu však možno mať výhrady.

Triviálnym príkladom rekurentného zobrazenia je identita. Ďalsie príklady budú zrejmé už o chvíľu, z Vety 5.2. Zobrazenie "znížený stan" (pozri Príklad 4.13) nie je rekurentné, lebo ak $1-\delta < 1$ je maximálna hodnota tohto zobrazenia a za A zvolíme otvorené δ-okolie bodu 1, tak v A neexistuje bod, ktorý sa vráti do A.

Náš plán je dokázať tvrdenia, ktoré si kvôli prehľadnosti znázorníme nasledujúcim diagramom.



Obr. 5.1: Poincarého vety o rekurencii: slabá forma, silná forma, štandardná forma

Veta 5.2 (Poincarého veta o rekurencii – slabá forma). *Nech zobrazenie* $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ *zachováva* konečnú *mieru* μ. *Potom* T *je rekurentné vzhľadom na* μ.

Dôkaz. Nech $\mu(A) > 0$. Keďže T zachováva mieru μ, všetky množiny v postupnosti

$$A, T^{-1}(A), T^{-2}(A), \dots$$

majú rovnakú mieru, rovnú $\mu(A) > 0$. Tieto množiny nemôžu byť navzájom disjunktné, lebo ich zjednotenie by malo nekonečnú mieru, zatiaľ čo celý priestor X má len konečnú mieru. Preto existujú také celé čísla $0 \le m < n$, že

$$T^{-m}(A) \cap T^{-n}(A) \neq \emptyset.$$

Zvoľme bod $x_0 \in T^{-m}(A) \cap T^{-n}(A)$. Potom body $x_m := T^m(x_0)$ a $x_n := T^n(x_0)$ patria do A. Keďže $n > m$, máme $x_n = T^{n-m}(x_m)$. Vidíme, že v množine A existuje bod x_m, ktorý sa v čase $n - m \ge 1$ vráti do A. Tým sme dokázali, že T je rekurentné. $\square$

Poznámka 5.3. Predpoklad, že miera μ je konečná, je v tejto vete podstatný. Posunutie $T(x) = x + 1$ na reálnej osi (so σ-algebrou borelovských množín a Lebesguovou mierou) je merateľné a zachováva Lebesguovu mieru, ale nie je rekurentné. Interval $[0,1)$ má totiž kladnú mieru, ale pri iterovaní sám seba nikdy nepretne.

Veta 5.4 (Poincarého veta o rekurencii – silná forma). *Nech zobrazenie* $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ *je rekurentné. Potom pre každú množinu* $A \subseteq X$ *platí, že skoro každý bod množiny* A *sa nekonečne veľakrát vráti do množiny* A.

Všimnime si, že veta hovorí čosi netriviálne len pre množiny A s kladnou mierou. Ak je totiž $\mu(A) = 0$, tak každá podmnožina množiny A je plnej miery v A (teda aj podmnožina tých bodov z A, ktoré sa do A vrátia nekonečne veľakrát, hoc by aj tá podmnožina bola prázdna).

Dôkaz. Potrebujeme dokázať, že množina

$$A_\infty = \{x \in A \colon \exists \text{ nekonečne veľa časov } n \geq 1 \text{ takých, že } T^n(x) \in A\}$$

je plnej miery v A, teda $\mu(A \setminus A_\infty) = 0$.

Nech A_0 je množina tých bodov z A, ktoré sa nikdy nevrátia do A a pre $k = 1, 2, \dots$ je A_k množina tých bodov z A, ktoré sa práve k-krát vrátia do A. Potom množinu A možno vyjadriť ako disjunktné zjednotenie:

$$A = (A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots) \sqcup A_\infty. \tag{5.1}$$

Množina A je merateľná, teda aj $A^C := X \setminus A$ je merateľná. Keďže zobrazenie T je merateľné, sú aj všetky vzory $T^{-i}(A)$, $T^{-i}(A^C)$ merateľné. Potom sú však merateľné aj množiny (pre väčšiu názornosť podčiarkujeme vzory množiny A):

$$\begin{aligned}
A_0 = {} & \quad A \cap T^{-1}(A^C) \cap T^{-2}(A^C) \cap T^{-3}(A^C) \cap \dots, \\
A_1 = {} & \quad (A \cap \underline{T^{-1}(A)} \cap T^{-2}(A^C) \cap T^{-3}(A^C) \cap \dots) \cup \\
& \cup (A \cap T^{-1}(A^C) \cap \underline{T^{-2}(A)} \cap T^{-3}(A^C) \cap \dots) \cup \\
& \cup (A \cap T^{-1}(A^C) \cap T^{-2}(A^C) \cap \underline{T^{-3}(A)} \cap \dots) \cup \\
& \cup \ \dots, \\
A_2 = {} & \bigsqcup_{1 \leq i < j} (A \cap T^{-1}(A^C) \cap \dots \cap T^{-(i-1)}(A^C) \cap \underline{T^{-i}(A)} \cap T^{-(i+1)}(A^C) \cap \dots \\
& \qquad \dots \cap T^{-(j-1)}(A^C) \cap \underline{T^{-j}(A)} \cap T^{-(j+1)}(A^C) \cap \dots), \\
\dots, & \\
A_\infty = {} & \quad A \setminus (A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots).
\end{aligned}$$

Všetky množiny vystupujúce vo vzťahu (5.1) sú teda merateľné. Aby sme dokázali, že A_∞ má plnú mieru v A, stačí ukázať, že

$$\mu(A_0) = \mu(A_1) = \mu(A_2) = \dots = 0.$$

Teraz príde kľúčové miesto v dôkaze: Keďže predpokladáme, že T je rekurentné, tak na dôkaz nulovosti týchto mier stačí ukázať, že body z týchto množín sa do nich nikdy nevrátia (pozri Definíciu 5.1).

Ak $x \in A_0$, tak podľa definície množiny A_0 sa x nikdy nevráti do množiny A, teda ani do menšej množiny $A_0 \subseteq A$.

Podobne, ak $x \in A_k$, $k \in \mathbb{N}$, tak x sa nikdy nevráti do A_k. Ak by totiž pre nejaké $n \geq 1$ bolo $T^n(x) \in A_k \subseteq A$, tak bod $T^k(x)$ (ako bod patriaci do A_k) by sa presne k-krát vrátil do A. Lenže to by znamenalo, že náš bod x sa do A vrátil aspoň $k+1$ krát (jednak v čase n a potom v ďalších k časoch). To je spor s tým, že $x \in A_k$. □

Ako dôsledok Viet 5.2 a 5.4 okamžite dostávame nasledujúce tvrdenie.

Veta 5.5 (Poincarého veta o rekurencii – štandardná forma). *Nech* $T \colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ *zachováva* konečnú *mieru* μ. *Potom pre každú množinu* $A \subseteq X$ *platí, že skoro každý bod množiny* A *sa nekonečne veľakrát vráti do množiny* A.

Poznámka 5.6. Tvrdenie, že skoro každý bod množiny A sa nekonečne veľakrát vráti do množiny A nemusí byť príliš užitočné, ak zachovávaná miera μ nemá fyzikálny význam. Napr. ak $p \in X$ je pevný bod zobrazenia T, tak Diracova miera δ_p je invariantná pre T. Poincarého veta dáva:

- Keďže množina $\{p\}$ má kladnú mieru, skoro každý bod z nej sa do nej vráti nekonečne veľa krát. Lenže to je predsa jasné aj bez Poincarého vety, veď bod p je dokonca pevný bod.
- Množina $X \setminus \{p\}$ má nulovú mieru, preto Poincarého veta nič nezaručuje ("skoro každý bod množiny nulovej miery" môže znamenať aj "žiaden bod"). Poincarého veta nedáva ani len to, že aspoň jeden bod z $X \setminus \{p\}$ sa aspoň raz vráti do $X \setminus \{p\}$. Ani to nemusí byť pravda (môže byť $T(x) = p$ pre každé $x \in X$).

Poznámka 5.7. Ten istý príklad ako v Poznámke 5.3 ukazuje, že predpoklad konečnosti miery vo Vete 5.5 nemožno vynechať.

Poznámka 5.8. Zobrazenie stan zachováva (konečnú) Lebesguovu mieru. Preto skoro každý bod z intervalu $(0,1]$ sa doň podľa Vety 5.5 vráti nekonečne veľa krát. Bod 1 sa doň však nevráti nikdy. Teda vo vete nemožno tvrdiť, že by sa každý bod množiny A musel do nej vrátiť (a to ani v prípade, že A má plnú mieru).

Samozrejme, v špeciálnych prípadoch sa môže stať, že úplne každý bod množiny A sa do nej vráti nekonečne veľa krát. Tak je tomu napr. ak T je identita alebo ak T je rotácia kružnice, na ktorej máme Lebesguovu mieru (tá je invariantná pre rotácie) a A je oblúk kružnice.

5.2 *Horná frekvencia návratov v priestore s konečnou mierou

Zosilníme Vetu 5.5. Ukážeme, že ak v systéme zachovávajúcom *konečnú* mieru vezmeme hocijakú množinu A kladnej miery, tak nielenže sa skoro každý bod množiny A vráti do A nekonečne veľa krát, ale dokonca sa tam skoro každý bod množiny A vracia s kladnou hornou frekvenciou! Najskôr ukážeme, že existuje aspoň jeden taký bod v A a z toho potom napodiv odvodíme, že skoro každý bod množiny A má tú vlastnosť.

Lema 5.9. *Nech $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ zachováva* konečnú *mieru μ a nech $\mu(A) > 0$. Potom existuje aspoň jeden bod množiny A, ktorý sa vracia do A s kladnou hornou frekvenciou.*

Dôkaz. Nech taký bod neexistuje (odvodíme spor). Potom každý bod množiny A sa vracia do A s nulovou hornou frekvenciou, čiže aj s nulovou frekvenciou. Pre každé $x \in A$ je teda

$$\mathrm{frekv}_A(T^n x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in \{1,2,\ldots,N\}\colon T^n x \in A\}}{N} = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_A(T^n x)}_{f_N(x)} = 0.$$

Z toho možno odvodiť, že každý bod $x \in X$ navštevuje množinu A s nulovou frekvenciou. Naozaj, bod $x \in X$ buď vôbec nenavštívi množinu A a potom je to triviálne, alebo pre nejaké $k \geq 0$ je $T^k(x) \in A$ a potom je to tiež zrejmé, lebo tento bod $T^k(x)$ sa vracia do A s nulovou frekvenciou. Dostávame teda, že horeuvedená limita sa rovná nule všade na X:

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = 0 \qquad \text{pre každé } x \in X. \tag{5.2}$$

Funkcie f_N, $n = 1,2,\ldots$ sú reálne funkcie definované všade na X. Overíme, že postupnosť $(f_N)_{N=1}^{\infty}$ spĺňa predpoklady Lebesguovej vety o dominantnej konvergencii:

- Funkcie f_N sú merateľné.

  Naozaj, zobrazenie $T\colon X \to X$ je merateľné podľa predpokladu, preto aj jej iterácie sú merateľné. Ďalej, množina A je merateľná, teda charakteristická funkcia $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ je merateľná. Z toho dostávame, že funkcie $f_N\colon X \to \mathbb{R}$ sú merateľné.

- $|f_N(x)| \leq 1$ pre každé N a pre každé $x \in X$. Pritom jednotková funkcia je integrovateľná na X.

  Naozaj, $|\chi_A(x)| \leq 1$, preto zrejme $|f_N(x)| \leq 1$. Jednotková funkcia je integrovateľná na X, lebo $\mu(X) < \infty$.

- Postupnosť f_N bodovo konverguje (k nulovej funkcii na X).

  To už vieme z (5.2).

Podľa Lebesguovej vety o dominantnej konvergencii sú funkcie f_N integrovateľné (a aj limitná nulová funkcia je integrovateľná, to je však jasné) a platí

$$\lim_{N\to\infty} \int f_N \, d\mu = \int \left(\lim_{N\to\infty} f_N \right) \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0. \tag{5.3}$$

Lenže μ je invariantná pre T a teda aj pre iterácie T, takže s využitím Vety 4.17 dostávame, že pre každé N je

$$\begin{aligned}
\int f_N \, d\mu =& \frac{1}{N} \int \left((\chi_A \circ T) + (\chi_A \circ T^2) + \cdots + (\chi_A \circ T^N) \right) \, d\mu \\
=& \frac{1}{N} \int (\chi_A + \chi_A + \cdots + \chi_A) \, d\mu = \frac{1}{N} N \mu(A) = \mu(A).
\end{aligned}$$

Po dosadení do (5.3) dostaneme $\mu(A) = 0$, čo je spor s predpokladom, že $\mu(A) > 0$. □

Veta 5.10. *Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva* konečnú *mieru μ a nech $\mu(A) > 0$. Potom skoro každý bod množiny A sa vracia do A s kladnou hornou frekvenciou.*

Dôkaz. Pre $x \in A$ nás zaujíma horná frekvencia, s akou postupnosť $T^n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ navštevuje množinu A:

$$\operatorname{frekv}_A^+(T^n x) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in \{1, 2, \ldots, N\}\colon T^n x \in A\}}{N} = \limsup_{N\to\infty} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_A(T^n x)}_{f_N(x)} .$$

Z dôkazu Lemy 5.9 vieme, že funkcie $f_N\colon X \to \mathbb{R}$ sú merateľné. Teda aj funkcia $\operatorname{frekv}_A^+(T^n x)\colon X \to \mathbb{R}$ je merateľná. Z toho vyplýva, že v rozklade $A = A^+ \sqcup A^0$ sú množiny

$$A^+ = \{x \in A\colon \operatorname{frekv}_A^+(T^n x) > 0\}, \qquad A^0 = \{x \in A\colon \operatorname{frekv}_A^+(T^n x) = 0\}$$

merateľné. Chceme dokázať, že $\mu(A^0) = 0$. Predpokladajme, že by bolo $\mu(A^0) > 0$. Potom podľa Lemy 5.9 existuje bod $x_0 \in A^0$, ktorý sa vracia do množiny A^0, a teda aj do väčšej množiny A, s kladnou hornou frekvenciou. To však znamená, že x_0 patrí do A^+. To je spor s tým, že $x_0 \in A^0$. □

Poznámka 5.11. Veta 5.10 neplatí bez predpokladu $\mu(X) < \infty$. Kontrapríkladom je $T(x) = x+1$ na reálnej osi s Lebesguovou mierou.

Poznámka 5.12. Veta 5.10 neplatí bez predpokladu, že μ je invariantná. Nech $T\colon [0,1] \to [0,1]$ je lineárna na intervaloch $[0,1/4]$, $[1/4,1/2]$, $[1/2,1]$, s hodnotami $T(0) = 0$, $T(1/4) = 1/2$, $T(1/2) = 0$, $T(1) = 1/2$. Potom Lebesguova miera Leb je na $[0,1]$ konečná (ale nie invariantná pre T; vysvetlite). Hoci interval $A = (1/2,1]$ má mieru $\mathrm{Leb}(A) > 0$, žiaden bod z A sa do A nevráti.

Poznámka 5.13. Pomocou Birkhoffovej ergodickej vety sa Veta 5.10 dá ešte zosilniť. V skutočnosti sa skoro každý bod množiny A vracia do A s kladnou frekvenciou (nie iba s kladnou hornou frekvenciou). To preto, lebo podľa Birkhoffovej ergodickej vety táto frekvencia *existuje* pre skoro každé $x \in A$ (lebo frekvencia $\mathrm{frekv}_A(x)$ existuje pre skoro každé $x \in X$). No a keď existuje, tak sa zhoduje s hornou frekvenciou, ktorá je kladná. Pozri Dôsledok 10.2.

5.3 *Kacova veta

Kacova[4] veta dopĺňa Poincarého vetu o rekurencii v štandardnej forme o kvantitatívny aspekt. Ukazuje, ako dlho (v priemere) trvá bodu z A, kým sa prvýkrát vráti do A.

Predpokladajme, že $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ zachováva konečnú mieru μ. Ak $\mu(A) > 0$, tak z Poincarého vety o rekurencii v štandardnej forme (pozri Vetu 5.5) vieme, že μ-skoro každý bod z A sa (nekonečne veľa krát) vráti do A. Môžeme preto definovať tzv. *čas prvého návratu* $t_A(x)$ bodu $x \in A$ do množiny A:

$$t_A(x) := \begin{cases} \min\{n \geq 1\colon T^n(x) \in A\}, & \text{ak existuje také } n \geq 1, \text{ že } T^n(x) \in A, \\ +\infty, & \text{ak také } n \text{ neexistuje.} \end{cases}$$

Ide o funkciu

$$t_A\colon A \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

ktorá je vďaka Poincarého vete v štandardnej forme μ-skoro všade na A konečná. Je to tzv. *funkcia prvého času návratu do množiny* A.[5] O chvíľu dokážeme, že je merateľná a dokonca aj integrovateľná.

Zaujíma nás stredná hodnota tejto funkcie na množine A, čiže hodnota[6]

$$(t_A)_{\mathrm{str}} = \frac{1}{\mu(A)} \int_A t_A \, d\mu. \tag{5.4}$$

Pretože $t_A(x) = +\infty$ len na množine miery nula, čo dá do integrálu nulový príspevok, má stredná hodnota (5.4) šancu byť číslom. O chvíľu sa dozvieme, že (funkcia t_A je merateľná a) stredná hodnota (5.4) je naozaj číslo. Ukáže sa totiž, že integrál v (5.4) je konečný,[7] t.j. že funkcia t_A je integrovateľná. Hodnotu tohto integrálu nám dáva tzv. Kacova veta.

Aby sme Kacovu vetu sformulovali a dokázali, budeme používať množiny, ktoré napriek podobným označeniam budú mať iný význam ako tie, ktoré sme použili v dôkaze Vety 5.4. Tentokrát

[4] Mark Kac (1914 – 1984) bol poľský matematik, Steinhausov žiak. Od r.1938 žil v USA. Kacova veta je z r. 1947.

[5] Angl. "the first-return time function".

[6] Keďže $\mu(A)$ je v menovateli, vidíme, prečo potrebujeme $0 < \mu(A) < +\infty$.

[7] To nie je zrejmé, lebo funkcia t_A je vo všeobecnosti neohraničená. Hodnotu $+\infty$ síce nadobúda len na množine miery nula (a teda na nej má nulový integrál), ale ona vo všeobecnosti nadobúda aj ľubovoľne veľké konečné hodnoty.

rozložíme na menšie množiny nielen množinu A, ale aj jej komplement $A^C = X \setminus A$. Pre body z množiny A, teda body, ktoré v čase 0 sú v A, nás bude zaujímať prvý čas ≥ 1, kedy sa *vrátia* do A. Pre body z množiny A^C, teda body, ktoré v čase 0 nie sú v A, nás bude zaujímať čas ≥ 1, kedy sa prvý raz *dostanú* do A. Použijeme teda rozklad

$$X = \overbrace{\underbrace{(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n \sqcup \dots) \sqcup A_\infty}_{A} \quad \sqcup \quad \underbrace{\left(A_1^C \sqcup A_2^C \sqcup \cdots \sqcup A_n^C \sqcup \dots\right)}^{X \setminus A^C_\infty} \sqcup A_\infty^C}_{A^C = X\setminus A}, \tag{5.5}$$

v ktorom

$$\begin{aligned} A_n &:= t_A^{-1}(n) = \{x \in A\colon\ T^i(x) \notin A \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ a } T^n(x) \in A\}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ A_\infty &:= t_A^{-1}(+\infty) = \{x \in A\colon\ T^i(x) \notin A \text{ pre } i = 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

a podobne

$$\begin{aligned} A_n^C &:= \{x \in A^C\colon\ T^i(x) \notin A \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ a } T^n(x) \in A\}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ A_\infty^C &:= \{x \in A^C\colon\ T^i(x) \notin A \text{ pre } i = 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

Teda A_n je množina tých bodov z A, ktoré sa prvýkrát *vrátia* do A v čase n. Množinu A_∞ tvoria tie body, ktoré sú v A, ale už sa nikdy nevrátia do A. Ďalej, A_n^C je množina tých bodov, ktoré sú v komplemente množiny A a prvýkrát *vojdú* do A v čase n. Tie body z komplementu množiny A, ktoré nikdy nevojdú do A, tvoria množinu A_∞^C.

Môžeme si tiež všimnúť, že A_∞^C je množina tých bodov $x \in X$, ktorých orbita $\mathrm{Orb}_T(x) = \{x, T(x), T^2(x), \dots\}$ nepretína množinu A. Teda $X \setminus A_\infty^C$ je množina tých bodov z X, ktorých orbita pretína množinu A.

Z definícií horeuvedených množín je zrejmé, že tieto množiny sú navzájom disjunktné a každý bod z X patrí práve do jednej z nich. Teda (5.5) je rozklad priestoru X (niektoré z množín v tom rozklade však môžu byť prázdne).

Skôr než sformulujeme a dokážeme Kacovu vetu, je dobré si uvedomiť, že všetky množiny v tom rozklade sú merateľné, a teda budeme môcť hovoriť o ich mierach (merateľnosť množiny A_∞^C sa využije už pri formulovaní Kacovej vety). To je zrejmé z merateľnosti množín A a A^C, merateľnosti zobrazenia T a zrejmých vyjadrení spomínaných množín v nasledujúcich tvaroch (vysvetlite):

$$\begin{aligned} A_n &= A \ \ \cap T^{-1}(A^C) \cap \cdots \cap T^{n-1}(A^C) \cap T^{-n}(A), \\ A_\infty &= A \ \ \cap T^{-1}(A^C) \cap \cdots \cap T^{n-1}(A^C) \cap \dots, \\ A_n^C &= A^C \cap T^{-1}(A^C) \cap \cdots \cap T^{n-1}(A^C) \cap T^{-n}(A), \\ A_\infty^C &= A^C \cap T^{-1}(A^C) \cap \cdots \cap T^{n-1}(A^C) \cap \dots. \end{aligned}$$

Veta 5.14 (Kacova veta pre mieru zachovávajúce systémy). *Nech* $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ *zachováva konečnú mieru* μ *a nech* $\mu(A) > 0$. *Potom funkcia* t_A *je integrovateľná a platí:*

$$\int_A t_A \, d\mu = \mu(X) - \mu(A^C_\infty),$$

takže stredný čas prvého návratu bodov množiny A *do tejto množiny je*

$$(t_A)_{\mathrm{str}} = \frac{\mu(X) - \mu(A^C_\infty)}{\mu(A)} \, .$$

Dôkaz. Funkcia

$$t_A\colon A \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

nadobúda hodnotu n na množine A_n ($n = 1, 2, \dots$) a hodnotu $+\infty$ na množine A_∞. Ako sme vyššie ukázali, všetky tieto množiny sú merateľné. Z toho vyplýva, že t_A je merateľná, a to jednoduchá merateľná (tzv. schodovitá) funkcia. Navyše, vďaka Poincarého vete o rekurencii v štandardnej forme je $t_A(x) < +\infty$ pre skoro každý bod $x \in A$, t.j.

$$\mu(A_\infty) = 0. \tag{5.6}$$

Preto má funkcia t_A integrál

$$\int_A t_A \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mu(A_n) \tag{5.7}$$

(ešte nevieme, či je tento integrál konečný alebo sa rovná $+\infty$).

Funkciu t_A integrujeme na A (len tam je definovaná). Aby sme však vypočítali sumu na pravej strane (5.7), bude užitočné pozrieť sa na celý priestor X. Vzhľadom na rozklad (5.5) máme (pozri aj (5.6))

$$\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \underbrace{\mu(A_\infty)}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^C_n) + \mu(A^C_\infty). \tag{5.8}$$

Keďže $m(X) < +\infty$, nekonečné rady nezáporných čísel v (5.8) konvergujú. Z toho o.i. vyplýva, že

$$\mu(A^C_n) \to 0 \qquad \text{pre } n \to \infty. \tag{5.9}$$

Po úprave

$$\mu(X) - \mu(A^C_\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(A_n) + \mu(A^C_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \sqcup A^C_n\right). \tag{5.10}$$

Aby sme ďalej upravili túto sumu, ideme študovať množiny $A_n \sqcup A^C_n$ (odvodíme vzťah (5.11)).

Ak sa pozrieme na definície množín A_n a A^C_n, vidíme, že pre $n = 1, 2, \dots$ je

$$A_n \sqcup A^C_n = \{x \in A \cup A^C = X\colon\ T(x), \dots, T^{n-1}(x) \in A^C \text{ a } T^n(x) \in A\ \}.$$

Pre $n \geq 2$ to dáva[8]

$$\begin{aligned} A_n \sqcup A^C_n &= \{x \in X\colon\ T(x) \in A^C \text{ a } T(Tx), \dots, T^{n-2}(Tx) \in A^C \text{ a } T^{n-1}(Tx) \in A\} \\ &= \{x \in X\colon\ T(x) \in A^C_{n-1}\} = T^{-1}(A^C_{n-1}). \end{aligned}$$

[8] Pre $n = 1$ to dáva $A_1 \sqcup A^C_1 = \{x \in X\colon\ T(x) \in A\} = T^{-1}(A)$, ale to nevyužijeme.

Dokázali sme tak, že

$$T^{-1}(A_n^C) = A_{n+1}^C \sqcup A_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \dots. \tag{5.11}$$

Odtiaľ, ak využijeme, že μ je T-invariantná, máme

$$\mu(A_n^C) = \mu(T^{-1}A_n^C) = \mu(A_{n+1}^C) + \mu(A_{n+1}), \qquad n = 1, 2, \dots$$

a opakovaným použitím (5.11) dostávame (pre fixované $n \geq 1$)

$$\begin{aligned} \mu(A_n^C) &= \mu(A_{n+1}^C) + \mu(A_{n+1}) = \mu(A_{n+2}^C) + \mu(A_{n+2}) + \mu(A_{n+1}) \\ &= \mu(A_{n+3}^C) + \mu(A_{n+3}) + \mu(A_{n+2}) + \mu(A_{n+1}) \\ &= \cdots = \mu(A_m^C) + \sum_{i=n+1}^{m} \mu(A_i) \qquad \text{pre každé } m > n. \end{aligned}$$

Limitovaním pre $m \to \infty$ a s využitím (5.9) získame rovnosť

$$\mu(A_n^C) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad \text{pre každé } n = 1, 2, \dots.$$

Po dosadení do (5.10) dostaneme

$$\mu(X) - \mu(A_\infty^C) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu(A_n) + \mu(A_n^C)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i) \right).$$

Máme tu dvojný rad nezáporných čísel. Pre jednotlivé hodnoty n máme takéto rady:

$$\begin{aligned} n = 1 \dots \quad & \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \dots, \\ n = 2 \dots \quad & \phantom{\mu(A_1) +{}} \mu(A_2) + \mu(A_3) + \dots, \\ n = 3 \dots \quad & \phantom{\mu(A_1) + \mu(A_2) +{}} \mu(A_3) + \dots, \\ \dots \quad & \end{aligned}$$

Môžeme sa na to pozerať ako na dvojrozmernú tabuľku *nezáporných* čísel, pričom našou úlohou je určiť sumu "riadkových" súm. V takej tabuľke sa však suma "riadkových" súm rovná sume "stĺpcových súm".[9] "Stĺpcové" sumy vieme ľahko určiť: v prvom stĺpci je $\mu(A_1)$, v druhom $2\mu(A_2)$, v treťom $3\mu(A_3)$ atď. Preto

$$\mu(X) - \mu(A_\infty^C) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mu(A_k)$$

(čo nielen dokazuje konvergenciu radu vpravo, ale aj jeho súčet). Porovnanie tohto výsledku so vzťahom (5.7) dokazuje prvú časť vety (hodnotu integrálu). Jej druhá časť z nej triviálne vyplýva. □

Poznámka 5.15. Ku Kacovej vete sa vrátime v Sekcii 7.3. Ukážeme tam, že pre tzv. ergodické systémy je $\mu(A_\infty^C) = 0$ a v takom prípade je teda $(t_A)_{\mathrm{str}} = \frac{\mu(X)}{\mu(A)}$, čiže pre body množiny A je stredný čas ich prvého návratu do množiny A nepriamo úmerný miere množiny A.

[9] Účtovníci tento trik používajú pri konečných dvojrozmerných tabuľkách. Pri nekonečných dvojrozmerných tabuľkách funguje tiež, ak sú všetky členy nezáporné.

5.4 Cvičenia a projekty

Cvičenie 5.1. Nech zobrazenie $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ je rekurentné (napr. nech zachováva konečnú mieru μ). Nech $f\colon X \to \mathbb{R}$ je kladná merateľná funkcia na X. Dokážte, že potom pre skoro každé $x \in X$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(T^k x) = +\infty.$$

Cvičenie 5.2. Čísla $x \in [0,1)$ majú dekadický rozvoj $x = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$, kde $a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ a $a_i \neq 9$ pre nekonečne veľa hodnôt i. Nech E_{10} je expandujúce zobrazenie na intervale $[0,1)$ (pozri Príklad 4.15). Dokážte nasledujúce tvrdenia:

(1) Ak $x = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$, tak $E_{10}(x) = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$.

(2) Nech A je množina tých bodov $x \in [0,1)$, ktorých dekadický rozvoj začína cifrou $a_0 = 7$. Dokážte, že skoro každý (v zmysle Lebesguovej miery) bod $x \in A$ má vo svojom dekadickom rozvoji nekonečne veľa cifier $a_i = 7$.

(3) Dokážte, že cifra 7 sa vyskytuje nekonečne veľa krát v dekadickom rozvoji skoro každého čísla $x \in [0,1]$.

Kapitola 6

Invariantné množiny a invariantné funkcie

6.1 Invariantné množiny

Pri štúdiu ergodičnosti je veľmi užitočnou nasledujúca jednoduchá lema.

Lema 6.1. *Pre zobrazenie $T\colon X \to X$ a rozklad $X = A \sqcup B$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné.*

(1) $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$.

(2) $T^{-1}(A) = A$.

(3) $T^{-1}(B) = B$.

(4) $T^{-1}(A) = A$, $T^{-1}(B) = B$.

Dôkaz. Z dôvodov symetrie zrejme stačí dokázať (1)⇒(4) a (2)⇒(1).

Nech platí (1). Potom $T^{-1}(A)$ neobsahuje žiaden bod z B (znamenalo by to, že nejaký bod z B sa zobrazí do A, čo je spor s tým, že $T(B) \subseteq B$) a podobne $T^{-1}(B)$ neobsahuje žiaden bod z A. Keďže každý bod z X sa niekam zobrazí, dostávame (4).

Nech platí (2). Potom neexistuje šípka z B do A (čím myslíme, že žiaden bod $b \in B$ sa nezobrazí do A; taký bod by totiž patril do $T^{-1}(A)$, spor s (2)). Lenže neexistuje ani šípka z A do B (keby existoval bod $a \in A$ taký, že $T(a) \in B$, mali by sme $a \notin T^{-1}(A)$, spor s (2)). To však znamená, že body z B sa zobrazujú do B a body z A sa zobrazujú do A, teda platí (1). $\square$

Množiny s vlastnosťou $T^{-1}(A) = A$ súvisia s ergodičnosťou. V ergodickej teórii sa také množiny nazývajú invariantnými. Zavedieme ešte príbuzný pojem, tzv. skoro invariantnosť.

Pripomeňme najskôr, že symetrický rozdiel dvoch množín je definovaný vzťahom (predstavte si Vennov diagram pre množiny A, B)

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Ak $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a $A, B \in \mathcal{B}$, tak budeme písať

$$A = B \mod \mu \qquad \text{ak} \quad \mu(A \triangle B) = 0,$$

teda ak A a B sa v zmysle miery nepodstatne líšia. Namiesto "mod μ" sa niekedy píše "mod 0". Všimnite si (v podstate stačí pohľad na Vennov diagram), že

$$A = B \mod \mu \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = \mu(B).$$

Niektoré vlastnosti symetrického rozdielu a rovnosti modμ zhrnieme v nasledujúcej leme.

Lema 6.2. *(1)* $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$.

(2) (Komutatívnosť) $A \triangle B = B \triangle A$.

(3) (Asociatívnosť) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, *takže môžeme písať* $A \triangle B \triangle C$ *bez zátvoriek.*

(4) $(A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = A \triangle C$.

(5) (Trojuholníková nerovnosť) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

(6) $\left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right) \triangle \left(\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} (A_\alpha \triangle B_\alpha)$.

(7) Ak $T \colon X \to Y$ *a* $A, B \subseteq Y$, *tak* $T^{-1}(A \triangle B) = T^{-1}(A) \triangle T^{-1}(B)$.

(8) Ak $T \colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ *zachováva mieru a ak* $A, B \in \mathcal{B}$, *tak platí implikácia*

$$A = B \mod \mu \;\Rightarrow\; T^{-1}(A) = T^{-1}(B) \mod \mu.$$

(9) $A = B \mod \mu$, $B = C \mod \mu \Rightarrow A = C \mod \mu$.

(10) Ak $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ *a* $A = B_i \mod \mu$ *pre každé* i, *tak* $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \mod \mu$.

Dôkaz. Cvičenie 6.3. Všimnite si, že (4) je dôsledok (1) a (3) a že (9) je dôsledok (5). □

Definícia 6.3. V ergodickej teórii, ak máme merateľné, nie nutne mieru zachovávajúce zobrazenie $T \colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$, tak množina $A \in \mathcal{B}$ sa nazýva[1]

(a) *invariantná* pre T, ak $T^{-1}(A) = A$. Všimnite si, že

$$T^{-1}(A) = A \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in X)(x \in A \Leftrightarrow T(x) \in A).$$

(b) *skoro invariantná* pre T, ak $T^{-1}(A) = A \mod \mu$, teda $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$.

Zobrazenie T má vždy nejaké invariantné množiny. Takými sú napr. $\emptyset$ a X.

Lema 6.4. *V mieru zachovávajúcom systéme* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *platí nasledujúce.*

(a) Vzor množiny plnej miery je množina plnej miery.

(b) Každá merateľná množina plnej miery je skoro invariantná.

[1] Pozor, niektorí autori namiesto "invariantná" a "skoro invariantná" hovoria "striktne invariantná" a "invariantná". Tiež dajte pozor na to, že v teórii dynamických systémov sa často pod invariantnou množinou rozumie niečo iné, totiž množina A taká, že $T(A) \subseteq A$, prípadne $T(A) = A$. Konečne, všimnite si, že pre definíciu v časti (a) nepotrebujeme žiadnu mieru, stačí mať množinu X a zobrazenie $T \colon X \to X$. Až v časti (b) potrebujeme mieru. Predpoklad, že T je merateľné, je však nadbytočný, k samotnej definícii ho nepotrebujeme.

Dôkaz. (a) Nech $A \in \mathcal{B}$ je plnej miery. Potom $X \setminus A$ je nulovej miery a keďže T zachováva mieru, je množina $T^{-1}(A) = X \setminus T^{-1}(X \setminus A)$ plnej miery.

(b) Nech A je plnej miery. Podľa (a) je aj $T^{-1}(A)$ plnej miery, preto $A \cap T^{-1}(A)$ je tiež plnej miery (použite de Morganovo pravidlo). Potom však

$$A \triangle T^{-1}(A) = (A \cup T^{-1}(A)) \setminus (A \cap T^{-1}(A)) \subseteq X \setminus (A \cap T^{-1}(A))$$

je nulovej miery a teda $A = T^{-1}(A) \bmod \mu$. □

Triviálne, každá invariantná množina je aj skoro invariantná. Zaujímavejšie je, že v systéme zachovávajúcom mieru sa zo skoro invariantnej množiny vždy dá z pohľadu miery 'zanedbateľnou' úpravou získať' invariantná množina. Aby sme toto tvrdenie dokázali, bude užitočná nasledujúca lema o množine tých bodov, ktoré nekonečne veľa krát vojdú do množiny A (namiesto "x navštívi A" hovoríme aj "x vojde do A").

Lema 6.5. *Nech X je množina a $T\colon X \to X$ zobrazenie. Nech $A \subseteq X$. Označme*

$$A_\infty^X := \{x \in X : x \text{ navštívi } A \text{ nekonečne veľa krát}\}.$$

Potom

(1) $A_\infty^X = \limsup_{n\to\infty} T^{-n}(A) = \bigcap_{N=0}^\infty \bigcup_{n=N}^\infty T^{-n}(A)$.

(2) Množina A_∞^X je T-invariantná, t.j. $T^{-1}(A_\infty^X) = A_\infty^X$.

Dôkaz. (1) Podľa definície, $x \in X$ patrí do A_∞^X práve vtedy, keď $x \in T^{-n}(A)$ pre nekonečne veľa $n \geq 0$. Na druhej strane, podľa definície limes superior postupnosti množín v X, je aj $\limsup_{n\to\infty} T^{-n}(A)$ množinou tých $x \in X$, ktoré ležia v nekonečne veľa množinách $T^{-n}(A)$. Zostáva využiť' fakt, že $\limsup_{n\to\infty} M_n = \bigcap_{N=0}^\infty \bigcup_{n=N}^\infty M_n$.

(2) Nech $x \in T^{-1}(A_\infty^X)$. Potom $T(x) \in A_\infty^X$, čo znamená, že $T(x)$ vojde do A nekonečne veľa krát. Potom však tým skôr aj x vojde do A nekonečne veľa krát, teda $x \in A_\infty^X$.

Obrátene, nech $x \in A_\infty^X$. To znamená, že x vojde do A nekonečne veľa krát. Potom $T(x)$ vojde od A možno o jeden raz menej, ale ešte stále nekonečne veľa krát. Teda $T(x) \in A_\infty^X$, odkiaľ $x \in T^{-1}(A_\infty^X)$.

Uvedieme ešte iný dôkaz: Keďže

$$A_\infty^X = \limsup_{n\to\infty} T^{-n}(A) = \bigcap_{N=0}^\infty \underbrace{\bigcup_{n=N}^\infty T^{-n}(A)}_{B_N}, \tag{6.1}$$

máme

$$T^{-1}(A_\infty^X) = T^{-1}\left(\bigcap_{N=0}^\infty B_N\right) = \bigcap_{N=0}^\infty T^{-1}(B_N) = \bigcap_{N=0}^\infty B_{N+1} = A_\infty^X,$$

pričom posledná rovnosť' vyplýva z toho, že $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$. □

Sme pripravení ukázať', že v mieru zachovávajúcom systéme sa zo skoro invariantnej množiny dá zanedbateľnou zmenou získať' invariantná množina.

Propozícia 6.6. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci dynamický systém a nech $A \in \mathcal{B}$ je* skoro invariantná *množina. Potom existuje* invariantná *množina $M \in \mathcal{B}$, ktorá sa zanedbateľne líši od A, t.j. $M = A \bmod \mu$.*

Dôkaz. Takých množín M môže existovať veľa. Ukážeme, že požadovanú vlastnosť má vždy napríklad množina $M = A_\infty^X$ z predchádzajúcej lemy. Overíme to.

Predovšetkým, $A_\infty^X \in \mathcal{B}$, lebo z Lemy 6.5(1) vyplýva, že je to prienik zjednotení merateľných množín. Z Lemy 6.5(2) navyše vieme, že A_∞^X je invariantná množina. Zostáva dokázať, že $A_\infty^X = A \bmod \mu$. Dokážeme to postupne.[2]

- $T^{-n}(A) = A \bmod \mu$, pre každé $n \geq 0$.

  Pre n=0 je to triviálne. Ďalej dokazujeme matematickou indukciou. Rovnosť $T^{-1}A = A \bmod \mu$ platí podľa predpokladu. Ak pre nejaké $n \geq 1$ je $T^{-n}A = A \bmod \mu$, tak podľa Lemy 6.2(8) je $T^{-(n+1)}A = T^{-1}A \bmod \mu$ a potom podľa Lemy 6.2(9) dostaneme $T^{-(n+1)}A = A \bmod \mu$.

- $B_N = A \bmod \mu$, pre každé $N \geq 0$ (pozri (6.1) pre definíciu B_N).

  Naozaj, podľa Lemy 6.2(6) je

  $$A \triangle B_N = A \triangle \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}A = \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A\right) \triangle \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}A\right) \subseteq \bigcup_{n=N}^{\infty} (A \triangle T^{-n}A)$$

  a využijúc monotónnosť a σ-subaditívnosť miery ako aj už dokázanú rovnosť $\mu(A \triangle T^{-n}A) = 0 \bmod \mu$, $n = 0, 1, \ldots$, dostaneme $\mu\left(A \triangle B_N\right) = 0$ pre každé N.

- $A_\infty^X = A \bmod \mu$.

  Z vyššie uvedeného máme

  $$A_\infty^X = \bigcap_{N=0}^{\infty} B_N, \quad B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots, \quad A = B_N \bmod \mu,\ N = 0, 1, 2, \ldots.$$

  Podľa Lemy 6.2(10) je potom $A = A_\infty^X \bmod \mu$.

□

6.2 Invariantné funkcie

Doposiaľ sme študovali (skoro) invariantné množiny. Zavedieme ešte pojem (skoro) invariantnej funkcie.

Definícia 6.7. Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie, nie nutne mieru zachovávajúce. Povieme, že merateľná reálna funkcia $f\colon X \to \mathbb{R}$ (prípadne komplexná funkcia $f\colon X \to \mathbb{C}$) je[3]

(a) *invariantná funkcia* pre T, ak je konštantná pozdĺž trajektórií, teda $f(T(x)) = f(x)$ pre každé $x \in X$, alebo inak zapísané

$$f \circ T = f \qquad \text{na} \quad X,$$

[2] Samozrejme bude treba využiť predpoklad, že A je skoro invariantná, lebo inak by to nemusela byť pravda. Vymyslíte taký príklad? Dá sa to už na dvojprvkovom priestore.

[3] Pozor na terminológiu. Namiesto "invariantná" a "skoro invariantná" sa často hovorí "striktne invariantná" a "invariantná". Teda ak niekde čítate o invariantných funkciách, musíte si presne pozrieť, čo sa tým myslí, aj keď z pohľadu teórie miery nie je medzi oboma pojmami podstatný rozdiel.

(b) *skoro invariantná funkcia* pre T, ak je μ-skoro konštantná pozdĺž trajektórií, teda $f(T(x)) = f(x)$ pre μ-skoro každé $x \in X$, alebo inak zapísané

$$f \circ T = f \qquad \mu\text{-skoro všade na} \quad X.$$

Namiesto "skoro invariantná funkcia" sa hovorí aj "funkcia invariantná mod μ" alebo "funkcia invariantná mod 0".

Teda merateľná funkcia f je invariantná, ak je konštantná pozdĺž trajektórií. Pozdĺž rôznych trajektórií to môžu byť rôzne konštanty (podľa predpokladu je však f merateľná, takže nejaké obmedzenia na hodnoty f existujú). Merateľná funkcia f je skoro invariantná, ak z tohto pravidla existuje, v zmysle miery, len málo výnimiek, t.j. ak množina tých $x \in X$, v ktorých $f(T(x)) \neq f(x)$, je nulovej miery.

Lema 6.8. *Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie, nie nutne mieru zachovávajúce. Nech $A \in \mathcal{B}$.*

(a) A je invariantná množina $\Leftrightarrow$ χ_A je invariantná funkcia.

(b) A je skoro invariantná množina $\Leftrightarrow$ χ_A je skoro invariantná funkcia.

Dôkaz. Predovšetkým, merateľnosť množiny A je ekvivalentná s merateľnosťou charakteristickej funkcie χ_A. V takom prípade platí nasledujúce.

(a) A je invariantná práve vtedy, keď $T^{-1}A = A$, čo je zase ekvivalentné s rovnosťou $\chi_{T^{-1}A} = \chi_A$. S využitím Lemy 3.25 je to ekvivalentné s rovnosťou $\chi_A \circ T = \chi_A$, čo znamená práve invariantnosť funkcie χ_A.

(b) A je skoro invariantná práve vtedy, keď $T^{-1}A = A \bmod \mu$, t.j. keď $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$. Na množine $A \triangle T^{-1}A$ sa charakteristické funkcie $\chi_{T^{-1}A}$ a χ_A líšia (v každom bode z tej množiny sa jedna z nich rovná jednej a druhá nule). Mimo tejto množiny sa rovnajú (v bodoch prieniku $A \cap T^{-1}A$ sa obe rovnajú jednej, mimo zjednotenia $A \cup T^{-1}A$ sa obe rovnajú nule). Teda $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$ je ekvivalentné s tým, že $\chi_{T^{-1}A} = \chi_A$ μ-skoro všade, čiže s tým, že $\chi_A \circ T = \chi_A$ μ-skoro všade. To práve znamená, že χ_A je skoro invariantná funkcia. $\square$

Lema 6.9. *Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie. Nech $f\colon X \to \mathbb{R}$ (alebo $X \to \mathbb{C}$) je merateľná funkcia.*

(a) Ak je f invariantná, tak je aj skoro invariantná.

(b) Ak je f konštantná, tak je invariantná.

(c) Ak je f skoro konštantná a T zachováva mieru, tak je f skoro invariantná.

Dôkaz. Tvrdenia (a) a (b) sú zrejmé.

(c) Podľa predpokladu existuje konštanta c a množina N nulovej miery tak že $f(x) = c$ pre každé $x \in X \setminus N$. Keďže T zachováva mieru, tak aj $M = N \cup T^{-1}(N)$ má nulovú mieru. Ak $x \in X \setminus M$, tak $x \notin N$ a $x \notin T^{-1}(N)$. Ak však $x \notin N$, tak $f(x) = c$ a ak $x \notin T^{-1}(N)$, tak $T(x) \notin N$, odkiaľ $f(T(x)) = c$. Ukázali sme, že $f \circ T = f$ na $X \setminus M$. $\square$

Poznámka 6.10. V Leme 6.9(c) nemožno vynechať predpoklad o zachovávaní miery. Nech napr. $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{B} = 2^X$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{0\}) = 0$, $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(X) = 1$. Potom $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou. Nech $T(0) = 1$, $T(1) = 0$. Potom $T\colon X \to X$ je merateľné zobrazenie (ale nezachováva mieru μ). Nech $f(0) = 2019$ a $f(1) = 2020$. Potom f sa skoro všade rovná 2020, teda je to skoro konštantná funkcia. Nie je však skoro invariantná, pretože $f \circ T = f$ neplatí pre žiadne $x \in X$.

6.3 Cvičenia a projekty

Cvičenie 6.1. Nech $T\colon X \to X$ je zobrazenie a nech $A \subseteq X$. Dokážte, že nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:

(1) $T^{-1}(A) = A$.

(2) $T^{-1}(A) \subseteq A$ a $T(A) \subseteq A$.

Cvičenie 6.2. Ak $T\colon X \to X$ je bijekcia, ukážte, že $A \subseteq X$ je invariantná množina (t.j. $T^{-1}(A) = A$) vtedy a len vtedy, keď $T(A) = A$.

Cvičenie 6.3. Dokážte Lemu 6.2.

Cvičenie 6.4. Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém. Pripomeňme, že podľa Lemy 6.4 je vzor množiny plnej miery opäť množina plnej miery.

(1) Ak množina plnej miery má merateľný obraz, je potom aj ten obraz plnej miery?

(2) Je vzor množiny nulovej miery množina nulovej miery?

(3) Ak množina nulovej miery má merateľný obraz, je potom aj ten obraz nulovej miery?

Kapitola 7

Ergodičnosť

7.1 Definícia ergodičnosti. Súvis s invariantnými množinami a invariantnými funkciami

Majme merateľné zobrazenie $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ (obvykle sa predpokladá, že zachováva mieru, ale zatiaľ taký predpoklad nepotrebujeme).

Ak nás zaujíma dynamika v systéme $(X,\mathcal{B},\mu,T)$, tak by nám zjavne uľahčilo prácu, keby bol systém rozložiteľný v tom zmysle, že by sa množina X dala rozložiť na dve disjunktné, navzájom neinteragujúce časti:

$$X = A \sqcup B, \quad \text{pričom} \quad T(A) \subseteq A,\ T(B) \subseteq B. \tag{7.1}$$

Naozaj, v takomto prípade by sme mohli osobitne skúmať dynamiku $T|_A$ a $T|_B$ (σ-algebru $\mathcal{B}$ aj mieru μ môžeme tiež zúžiť raz na A, raz na B). Namiesto jedného zložitejšieho systému by sme skúmali dva jednoduchšie. Keďže však v teórii miery nás takmer všetko zaujíma "až na množinu miery nula", našu úlohu sme si v podstate nezjednodušili, ak by niektorá z množín A, B mala nulovú mieru. Preto systém považujeme za *rozložiteľný* až vtedy, keď v (7.1) navyše platí

$$\mu(A) > 0,\ \mu(B) > 0.$$

Systém $(X,\mathcal{B},\mu,T)$, ktorý je *nerozložiteľný* v horeuvedenom zmysle (teda štúdium jeho dynamiky si nemôžeme zjednodušiť rozkladom na dva neinteragujúce podsystémy s kladnými mierami), sa nazýva ergodický.

Definícia 7.1. Nech $(X,\mathcal{B},\mu)$ je priestor s mierou a $T\colon (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ je merateľné zobrazenie. Systém $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ sa nazýva *ergodický*, ak je nerozložiteľný v tom zmysle, že sa X *nedá* vyjadriť v tvare

$$X = A \sqcup B, \quad \text{kde} \quad \mu(A) > 0, \mu(B) > 0 \quad \text{a} \quad T(A) \subseteq A, T(B) \subseteq B.$$

V takom prípade tiež hovoríme, že miera μ je *ergodická* pre T alebo že zobrazenie T je *ergodické* vzhľadom na μ.

Poznámka 7.2. V mnohých knihách z ergodickej teórie sa ergodičnosť definuje len pre mieru zachovávajúce zobrazenia, resp. len pre invariantné miery. Nie je to však nutné a možno hovoriť aj o ergodických mierach, ktoré nie sú T-invariantné. Väčšinou nás však bude zaujímať ergodičnosť pre invariantné miery.

Nasledujúce tvrdenie poskytuje ekvivalentné definície ergodičnosti.

Veta 7.3 (Ekvivalentné definície ergodičnosti – invariantné množiny). *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou a nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(1) Systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je ergodický.

(2) Každá invariantná množina pre T má nulovú mieru alebo plnú mieru.

Ak navyše T zachováva mieru μ, tak aj nasledujúca podmienka je s nimi ekvivalentná.

(3) Každá skoro invariantná množina pre T má nulovú mieru alebo plnú mieru.

Skôr než vetu dokážeme, pripomeňme, že (2) a (3) v danom poradí znamenajú toto:

(2') Ak $A \in \mathcal{B}$ a $T^{-1}(A) = A$, tak $\mu(A) = 0$ alebo $\mu(X \setminus A) = 0$.

(3') Ak $A \in \mathcal{B}$ a $T^{-1}(A) = A \bmod \mu$, tak $\mu(A) = 0$ alebo $\mu(X \setminus A) = 0$.

Ergodičnosť teda znamená, že neexistujú netriviálne invariantné (skoro invariantné) množiny.

Dôkaz. $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Nech platí (1) ale nech existuje taká množina $A \in \mathcal{B}$, že $T^{-1}(A) = A$ a $\mu(A) > 0$ aj $\mu(X \setminus A) > 0$. Potom, ak položíme $B = X \setminus A$, máme rozklad $X = A \sqcup B$, $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$. Keďže predpokladáme $T^{-1}(A) = A$, Lema 6.1(2)⇒(1) dáva $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Teda T nie je ergodické, čo je spor s (1).

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ Nech platí (2) ale nech systém nie je ergodický, teda existuje rozklad $X = A \sqcup B$, kde $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ a $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Podľa Lemy 6.1(1)⇒(2) je merateľná množina A invariantná. Keďže má kladnú mieru a aj jej komplement má kladnú mieru, dostávame spor s (2).

Predpokladajme odteraz, že T zachováva mieru μ.

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ Nech platí (2) ale nech existuje skoro invariantná množina $A \in \mathcal{B}$, ktorá má kladnú ale nie plnú mieru. Potom podľa Propozície 6.6 existuje invariantná množina $M \in \mathcal{B}$, ktorá má tú istú mieru ako A, teda kladnú ale nie plnú. To je spor s (2).

$\boxed{(3)\Rightarrow(2)}$ Toto platí triviálne, dokonca aj bez predpokladu, že μ je invariantná, lebo každá invariantná množina je skoro invariantná. □

Príklad 7.4 (Lebesguova miera v rovine nie je ergodická pre posunutie). Lebesguova miera v rovine je invariantná pre posunutie (pozri Príklad 4.3), ale nie je ergodická. Rovinu možno totiž pomocou priamky rovnobežnej s vektorom posunutia rozložiť na dve polroviny (uzavretú a otvorenú), ktoré sa zobrazujú do seba a obe majú kladnú (nekonečnú) mieru. Podľa definície ergodičnosti systém nie je ergodický (ekvivalentne povedané, miera nie je pre dané zobrazenie ergodická). Mohlo sa postupovať inak, napr. vziať len jednu z tých dvoch polrovín a uvedomiť si, že je invariantná (jej vzor je ona sama) a pritom nemá ani nulovú ani plnú mieru. Potom podľa Vety 7.3 systém nie je ergodický.

Modifikujte dôkaz pre prípad, keď je vektor posunutia nulový, teda ide o identitu. Zovšeobecnite do vyšších dimenzií. Všimnite si, že posunutie na priamke si vyžaduje iný dôkaz.

Príklad 7.5 (Racionálne rotácie kružnice nie sú ergodické). V Príklade 4.14 sme videli, že rotácie kružnice zachovávajú Lebesguovu mieru. Ak je rotácia racionálna, každý bod je periodický s tou istou periódou q. Potom ak vezmeme orbitu malého (!) okolia jedného bodu, dostaneme množinu pozostávajúcu z q rovnako dlhých oblúkov. Táto množina je invariantná, má kladnú mieru a aj jej komplement má kladnú mieru (ak sme zvolili okolie bodu naozaj malé). To podľa Vety 7.3 znamená, že zobrazenie nie je ergodické.

Príklad 7.6 (Diracova miera v pevnom bode je ergodická). Nech $T\colon (X,\mathcal{B},\mu)\to(X,\mathcal{B},\mu)$ je merateľné zobrazenie a nech $T(x)=x$, t.j. x je pevný bod pre T. Potom Diracova miera δ_x je invariantná a zrejme ergodická pre T. Poznamenajme, že ak x nie je pevný bod zobrazenia T, tak δ_x nie je invariantná, ale stále je ergodická. Priestor X totiž vôbec nemožno rozložiť na dve disjunktné množiny s kladnými mierami.

Príklad 7.7 (Miera sediaca v periodickej orbite je ergodická). Nech $T\colon (X,\mathcal{B},\mu)\to(X,\mathcal{B},\mu)$ je merateľné zobrazenie a nech miera μ je sústredená v periodickej orbite. Potom ako vieme je invariantná, ak váhy jednotlivých bodov v tej orbite sú rovnaké a nie je invariantná, ak nie sú rovnaké. V každom prípade však je ergodická, lebo ak $T^{-1}(A)=A$, tak buď A neobsahuje žiaden bod tej orbity a potom $\mu(A)=0$ alebo A obsahuje celú tú orbitu (vysvetlite) a potom $\mu(X\setminus A)=0$.

Horeuvedené príklady boli jednoduché. Vo všeobecnosti sa však ergodičnosť overuje ťažko. Také príklady uvidíme neskôr.

Veta 7.3 ukazovala, že ergodičnosť sa dá ekvivalentne definovať pomocou pojmu (skoro) invariantnej množiny. Ukážeme, že sa dá ekvivalentne definovať aj pomocou pojmu tzv. (skoro) invariantnej funkcie.

Ukážeme, že ergodičnosť je ekvivalentná s tým, že neexistujú netriviálne (skoro) invariantné funkcie.

Aby sme skrátili znenie nasledujúcej vety, neformulujeme podmienky s funkciou f zvlášť pre reálne a zvlášť pre komplexné funkcie. Dúfame, že nedôjde k nedorozumeniu ak namiesto dvoch podmienok píšeme len jednu, bez špecifikácie, či hovoríme o reálnych alebo komplexných funkciách (máme tak šesť podmienok (2) až (7), hoci každá z nich sa dá sformulovať pre funkcie $X\to\mathbb{R}$ alebo pre funkcie $X\to\mathbb{C}$, takže by sme po správnosti mali namiesto o týchto 6 podmienkach hovoriť o 12 podmienkach ekvivalentných s ergodičnosťou).

Veta 7.8 (Ekvivalentné definície ergodičnosti – invariantné funkcie). *Nech $(X,\mathcal{B},\mu)$ je priestor s mierou*[1] *a nech $T\colon (X,\mathcal{B},\mu)\to(X,\mathcal{B},\mu)$ je merateľné zobrazenie. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(1) Systém $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ je ergodický.

(2) Každá merateľná invariantná funkcia f je s.v. konštantná.

(3) Každá merateľná skoro invariantná funkcia f je s.v. konštantná.

Ak navyše X je priestor s konečnou *mierou, tak aj nasledujúce podmienky sú s nimi ekvivalentné.*

(4) Každá integrovateľná (t.j. patriaca do $L^1(X,\mathcal{B},\mu)$) invariantná funkcia f je s.v. konštantná.

[1] V ergodickej teórii predpokladáme, že $\mu(X)>0$. Inak by celá teória bola v podstate "o ničom". V dôkaze to využívame.

(5) Každá integrovateľná (t.j. patriaca do $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$) skoro invariantná funkcia f je s.v. konštantná.

(6) Každá invariantná funkcia $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ je s.v. konštantná.

(7) Každá skoro invariantná funkcia $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ je s.v. konštantná.

Dôkaz. Budeme predpokladať, že f je vždy reálna funkcia. Ak je f komplexná funkcia, stačí osobitne uvažovať jej reálnu a komplexnú časť.

$\boxed{(1)\Rightarrow(3)}$ Nech T je ergodické a nech $f\colon X \to \mathbb{R}$ je merateľná funkcia, pre ktorú $f \circ T = f$ μ-s.v. Ideme dokázať, že f je μ-s.v. konštantná. Pre $k \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$X_n^k = \left\{ x \in X\colon\ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\} = f^{-1}\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right).$$

Keďže f je merateľná, $X_n^k \in \mathcal{B}$. Tvrdíme, že

$$X_n^k \triangle T^{-1}(X_n^k) \subseteq \{x \in X\colon\ f(Tx) \neq f(x)\}. \tag{7.2}$$

Naozaj:

- Ak $x \in X_n^k \setminus T^{-1}(X_n^k)$, tak $x \in X_n^k$ a $T(x) \notin X_n^k$. To znamená, že $f(x)$ patrí a $f(Tx)$ nepatrí do intervalu $[k/2^n, (k+1)/2^n)$. Preto $f(x) \neq f(Tx)$.
- Ak $x \in T^{-1}(X_n^k) \setminus X_n^k$, tak $T(x) \in X_n^k$ a $x \notin X_n^k$ a zase $f(x) \neq f(Tx)$.

Podľa predpokladu má množina na pravej strane (7.2) nulovú mieru, preto je množina X_n^k skoro invariantná. Podľa Vety 7.3 však v ergodickom systéme má každá skoro invariantná množina nulovú mieru alebo plnú mieru. Teda

$$\mu(X_n^k) = 0 \quad \text{alebo} \quad \mu(X \setminus X_n^k) = 0.$$

Zároveň však, pre každé fixované n, je $X = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} X_n^k$. Ide o disjunktné zjednotenie, takže $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(X_n^k) = \mu(X) > 0$. Preto pre každé n existuje práve jedno k_n tak, že $X_n^{k_n}$ má plnú mieru. Potom však má plnú mieru aj množina

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^{k_n}.$$

Tvrdíme, že funkcia f je na množine Y konštantná. Naozaj, nech $x, y \in Y$. Potom pre každé n je $x, y \in X_n^{k_n}$, a teda $f(x), f(y) \in [k_n/2^n, (k_n+1)/2^n)$. Potom $|f(x) - f(y)| < 1/2^n$ a keďže toto platí pre každé n, tak $f(x) = f(y)$. Dokázali sme tak, že f je skoro všade konštantná.

$\boxed{(3)\Rightarrow(2)}$ Toto je triviálne.

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ Nech (2). Predpokladajme, že by T nebolo ergodické. Potom existuje rozklad $X = A \sqcup B$, kde $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ a $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Potom funkcia f rovná 1 na A a rovná 0 na B (teda charakteristická funkcia množiny A) je konštantná pozdĺž každej trajektórie, teda je invariantná pre T (f je merateľná, lebo A je merateľná). Funkcia f však nie je konštatntná μ-s.v., čo je spor s (2).

Nech teraz $\mu(X) < \infty$. Potom $L_2(\mu) \subseteq L_1(\mu)$. Okrem toho, každá funkcia z $L_1(\mu)$ je automaticky merateľná. Preto platia implikácie $\boxed{(3)\Rightarrow(5)\Rightarrow(4)\Rightarrow(6)}$ aj $\boxed{(5)\Rightarrow(7)\Rightarrow(6)}$. Na ukončenie dôkazu teda stačí dokázať (stále za predpokladu $\mu(X) < \infty$), že (6)$\Rightarrow$(1).

$\boxed{(6)\Rightarrow(1)}$ Dôkaz je rovnaký ako dôkaz implikácie (2)⇒(1), treba len využiť, že charakteristická funkcia merateľnej množiny A na priestore s konečnou mierou patrí do $L_2(\mu)$. To je zrejmé, lebo ak $A \in \mathcal{B}$, tak $(\chi_A)^2 = \chi_A$ a teda $\int |(\chi_A)^2|\, d\mu = \int \chi_A\, d\mu = \mu(A) \leq \mu(X) < \infty$.

□

Poznámka 7.9. Možno nahliadnuť, že do vety by sa dali pridať aj podmienky, v ktorých vystupujú priestory L^p, $p \geq 1$ (porovnaj s Poznámkou 4.18). My sme do vety okrem L^1 vybrali už len L^2. To má špeciálny význam. Skutočnosť, že na dôkaz ergodičnosti T (na priestore s konečnou mierou) stačí implikáciu

$$f \circ T = f \text{ na } X \Rightarrow f \text{ je konštantná s.v.}$$

overiť len pre funkcie $f \in L^2$ znamená, že môžeme využiť L^2 Fourierove rady. To často uľahčuje dôkaz ergodičnosti, pozri Sekciu 8.2.

7.2 Ergodičnosť a metrická tranzitívnosť

Pojem veľmi blízky k ergodičnosti je metrická (alebo mierová) tranzitívnosť.

Definícia 7.10. Merateľné zobrazenie $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ sa nazýva *metricky (mierovo) tranzitívne* vzhľadom na μ, ak pre každé dve množiny A, B s kladnými mierami existuje $n \geq 1$ tak, že $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$.[2]

Dobré je si uvedomiť, že

$$T^n(A) \cap B \neq \emptyset \iff (\exists x \in A)(T^n(x) \in B) \iff A \cap T^{-n}(B) \neq \emptyset.$$

Lema 7.11. *Metrická tranzitívnosť implikuje aj rekurentnosť aj ergodičnosť.*

Dôkaz. Použijeme skratky MT, REK, ERG.

$\boxed{\text{MT}\Rightarrow\text{REK}}$ Stačí v definícii metrickej tranzitívnosti zvoliť $B = A$.

$\boxed{\text{MT}\Rightarrow\text{ERG}}$ Predpokladajme, že T je metricky tranzitívne ale nie ergodické. Potom existuje taký rozklad $X = A \sqcup B$, že $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$ a $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$. Potom však množina A pri iterovaní nikdy nepretne množinu B, čo je spor s metrickou tranzitívnosťou (tá vyžaduje existenciu $n \geq 1$, pre ktoré $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$). □

Príklad 7.12 (Žiadne ďalšie implikácie medzi MT, REK, ERG). Medzi tromi vlastnosťami MT, REK, ERG môžeme skúmať 6 implikácií. Predchádzajúca lema ukazuje, že obe implikácie "vychádzajúce z MT" sú pravdivé. Teraz ukážeme, že už žiadna iná implikácia neplatí, a to ani v prípade, že miera je invariantná *alebo* konečná.

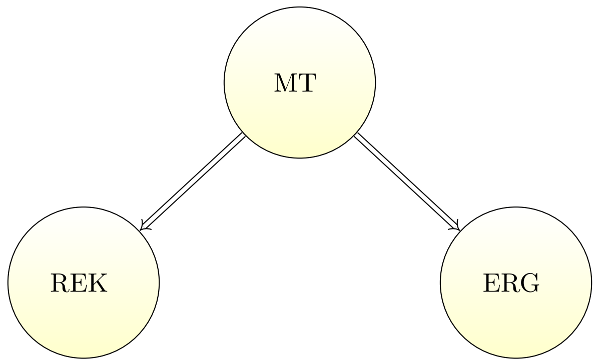
(a) Identita na $[0, 1]$ má vzhľadom na Lebesguovu mieru (ktorá je invariantná a dokonca zároveň konečná) vlastnosť REK, ale zrejme nemá vlastnosti MT, ERG.

(b) Zobrazenie $n \mapsto n+1$ na $\mathbb{Z}$ so sčítacou mierou na $2^{\mathbb{Z}}$ (ktorá je zrejme invariantná a σ-konečná, ale nie konečná) má vlastnosť ERG (lebo jediné invariantné množiny sú $\emptyset$ a $\mathbb{Z}$), ale nemá vlastnosti MT, REK (lebo $\mu(\{1\}) = 1 > 0$ ale $T^n(\{1\}) \cap \{1\} = \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$).

[2] Ide o analógiu topologickej tranzitívnosti. V topologickej dynamike, ak X je metrický (alebo, všeobecnejšie, topologický) priestor a $T\colon X \to X$ je spojité zobrazenie, tak hovoríme, že T je topologicky tranzitívne, ak pre každé dve neprázdne otvorené množiny A, B existuje $n \geq 1$ tak, že $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

(b') Podobne zobrazenie $n \mapsto n+1$ na $\mathbb{Z}$ s mierou definovanou na $2^{\mathbb{Z}}$ tak, že $\mu(\{n\}) = 1/(n^2+1)$ a teda $\mu(A) = \sum_{n\in A} 1/(n^2+1)$ pre $A \subseteq \mathbb{Z}$ (táto miera je konečná ale nie invariantná; vysvetlite) má vlastnosť ERG, ale nemá vlastnosti MT, REK.[3]

Výsledky z Lemy 7.11 a z Príkladu 7.12 možno prehľadne znázorniť vo forme diagramu ako na Obrázku 7.1.



Obr. 7.1: Súvis medzi metrickou tranzitívnosťou (MT), rekurentnosťou (REK) a ergodičnosťou (ERG). Žiadna ďalšia implikácia neplatí

Vieme už, že MT⇒(REK a ERG) a že žiadna z vlastností REK, ERG *samotná* neimplikuje MT. Ja zaujímavé, že REK a ERG *spoločne* sú už dosť silné na to, aby implikovali MT. Naozaj, nasledujúca veta okrem iného hovorí, že MT⟺(REK a ERG). Táto veta zároveň pomôže odpovedať aj na otázku, ktorá vyvstáva v súvislosti s Príkladom 7.12, aký je súvis medzi MT, REK, ERG v prípade, že miera je invariantná *a zároveň* konečná.

Veta 7.13 (**Ekvivalentné definície rekurentnosti a ergodičnosti, resp. ergodičnosti).** *Pre merateľné zobrazenie $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné.*

(1) T je rekurentné a ergodické.

(2) Ak $\mu(A) > 0$, tak množina A_∞^X je plnej miery.[4]

(3) Ak $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, tak existujú ľubovoľne veľké časy n tak, že $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$.[5]

(4) T je metricky tranzitívne.[6]

Navyše, ak T zachováva mieru μ a μ je konečná, tak aj nasledujúce tvrdenie je ekvivalentné s predchádzajúcimi.

(5) T je ergodické.

[3] Uvedieme iný príklad s týmito vlastnosťami. Uvažujme o funkcii $f(x) = cx(1-x)$ na intervale $[0,1]$, pričom $c = 3,67857\ldots$ je zvolené tak, že bod $1/2$ (tzv. kritický bod, derivácia v ňom je nula) sa za tri iterácie (ale nie skôr) dostane do kladného pevného bodu funkcie. Lebesguova miera na $[0,1]$ je konečná ale nie invariantná pre f. Z hlbokých výsledkov intervalovej dynamiky vyplýva, že zobrazenie f je ergodické. Je však zrejmé, že nemá vlastnosti MT, REK, pretože interval $f([0,1])$ je disjunktný s (ľavým) okolím bodu 1 (čo je množina s kladnou mierou).

[4] T.j. skoro každý bod z X vojde do A nekonečne veľa krát.

[5] T.j. množina tých bodov z A, ktoré vojdú do B v čase n, je kladnej miery.

[6] T.j. ak $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, tak existuje také $n \geq 1$, že $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$ alebo, ekvivalentne, $A \cap T^{-n}(B) \neq \emptyset$.

Dôkaz. Keďže podľa predpokladu je T merateľné a aj A a B sú merateľné, sú merateľné aj ostatné množiny vystupujúce vo vete: $A \cap T^{-n}(B)$ a A_∞^X (merateľnosť A_∞^X sme zdôvodnili už v dôkaze Propozície 6.6). Budeme ešte používať množinu

$$A_\infty^A = A \cap A_\infty^X$$

tých bodov z A, ktoré nekonečne veľa krát vojdú do A. Je zrejmé, že aj tá je merateľná.

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Nech platí (1), t.j. nech T je rekurentné a ergodické. Nech $\mu(A) > 0$. Chceme ukázať, že množina A_∞^X je plnej miery. Urobíme to v dvoch krokoch.

- Najskôr dokážeme, že A_∞^X je kladnej miery.

  Platí
  $$A_\infty^X \supseteq A_\infty^A.$$
  Keďže predpokladáme rekurentnosť, podľa Poincarého vety o rekurencii v silnej forme (pozri Vetu 5.4), je množina A_∞^A plnej miery v A. Keďže A je kladnej miery, vyplýva z toho, že aj A_∞^A je kladnej miery. Potom však aj väčšia množina A_∞^X je kladnej miery.

- Teraz už dokážeme, že A_∞^X je plnej miery.

  Podľa Lemy 6.5 je množina A_∞^X invariantná pre T a keďže už vieme, že je kladnej miery, predpoklad ergodičnosti zobrazenia T implikuje, že je plnej miery (pozri Vetu 7.3).

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Nech platí (2). Nech $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ a nech $N \in \mathbb{N}$. Potrebujeme dokázať, že pre nejaké $n \geq N$ je $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$. Označme

$$B_{(n)}^A := A \cap T^{-n}(B).$$

Je to množina tých bodov z A, ktoré vojdú do B v čase n (a možno aj v iných časoch) a je zrejme merateľná pre akékoľvek n.

Podľa predpokladu (2) skoro každý bod z X vojde do B nekonečne veľa krát. Špeciálne, potom aj skoro každý bod z A vojde do B nekonečne veľa krát. Inak povedané, existuje taká množina $M \subseteq A$, že $\mu(A \setminus M) = 0$ a každý bod z M vojde do B nekonečne veľa krát, teda určite aj v časoch $\geq N$. Z toho vyplýva, že

$$M \subseteq B_{(N)}^A \cup B_{(N+1)}^A \cup B_{(N+2)}^A \cup \dots.$$

Keďže M je plnej miery v A a A je kladnej miery, tak M je kladnej miery. Preto aj

$$\mu\left(B_{(N)}^A \cup B_{(N+1)}^A \cup B_{(N+2)}^A \cup \dots\right) > 0$$

a zo σ-subaditívnosti miery vyplýva, že existuje $n \in \{N, N+1, N+2, \dots\}$, pre ktoré je

$$\mu(B_{(n)}^A) > 0.$$

To sme práve potrebovali dokázať.

$\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ Predpokladáme (3). Nech $\mu(A) > 0, \mu(B) > 0$. Podľa (3) existujú ľubovoľne veľké časy, teda aj čas $n \geq 1$, pre ktorý je $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$. Potom je určite $A \cap T^{-n}(B) \neq \emptyset$, odkiaľ $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$. Dostali sme (4).

$\boxed{(4) \Rightarrow (1)}$ Toto sme už dokázali v Leme 7.11.

Predpokladajme teraz navyše, že T zachováva konečnú mieru μ.

$\boxed{(1)\Rightarrow(5)}$ Toto je triviálne (dokonca aj bez dodatočného predpokladu, že μ je T-invariantná a konečná).

$\boxed{(5)\Rightarrow(1)}$ Nech platí (5), čiže nech T je ergodické. Keďže T zachováva konečnú mieru μ, podľa Poincarého vety o rekurencii v slabej forme (pozri Vetu 5.2) je T rekurentné. Platí teda aj (1). □

Vzhľadom na Vetu 7.13 a Príklad 7.12 môžeme nakresliť nasledujúci diagram.

Obr. 7.2: Súvis medzi ergodickými, rekurentnými a mierovo tranzitívnymi systémami

Časť Vety 7.13 uveďme ešte v tvare dôsledku. Ten ukazuje, že v prípade invariantnej konečnej miery si ergodičnosť môžeme predstavovať tak, že z každej množiny kladnej miery sa vieme dostať do každej množiny kladnej miery v nejakom kladnom čase.

Dôsledok 7.14. *Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva konečnú mieru μ. Potom T je ergodické vtedy a len vtedy, keď je metricky tranzitívne.*

7.3 *Kacova veta pre ergodické systémy

Ako sme sľúbili v Poznámke 5.15, ukážeme, že pre ergodické (a konečnú mieru zachovávajúce) systémy je pre body množiny A stredný čas ich prvého návratu do množiny A nepriamo úmerný miere množiny A.

Dôsledok 7.15 (Kacova veta pre ergodické mieru zachovávajúce systémy). *Ak v Kacovej vete pre mieru zachovávajúce systémy (pozri Vetu 5.14) je zobrazenie T navyše ergodické, tak $\mu(A_\infty^C) = 0$. V takom prípade je*

$$\int_A t_A \, d\mu = \mu(X) \qquad \textit{a teda} \qquad (t_A)_{\mathrm{str}} = \frac{1}{\mu(A)} \int_A t_A \, d\mu = \frac{\mu(X)}{\mu(A)}.$$

Dôkaz. Keďže miera μ je konečná, tak podľa Vety 7.13, resp. jej Dôsledku 7.14, je T metricky tranzitívne. Potom je však zrejmé, že $\mu(A_\infty^C) = 0$. Naozaj, nech $\mu(A_\infty^C) > 0$ (chceme odvodiť spor). Ak využijeme, že aj $\mu(A) > 0$, tak podľa Definície 7.10 existuje bod $x \in A_\infty^C$ a taký čas $n \geq 1$, že $T^n(x) \in A$. To je spor s tým, že body z A_∞^C nikdy nevojdú do A (pozri definíciu množiny A_∞^C v Sekcii 5.3). □

Pozrite tiež Poznámku 10.3.

Poznámka 7.16 (Zermelov paradox). Majme v nádobe konečného objemu N molekúl plynu. Stav tohto systému možno opísať tak, že pre každú molekulu určíme polohu (3 súradnice polohového vektora) a moment hybnosti (opäť vektor s 3 súradnicami). Na to potrebujeme dohromady 6 čísel. Pre N molekúl potrebujeme $6N$ čísel. Keďže stav systému je určený $6N$ číslami, možno to povedať aj tak, že je určený bodom vo fázovom (stavovom) priestore $X = \mathbb{R}^{6N}$. Systém sa vyvíja v spojitom čase, ale môžeme si ho všímať v diskrétnych okamihoch, vždy po uplynutí jednej jednotky času, napr. sekundy – dostaneme tak diskrétny dynamický systém. Predpokladajme, ako sa to robí v klasickej štatistickej mechanike, že sa systém vyvíja podľa deterministických fyzikálnych zákonov klasickej mechaniky. Teda jeho vývoj je opísaný tzv. Hamiltonovými rovnicami, ide o tzv. hamiltonovský systém.

Ak poznáme počiatočný stav systému (bod v priestore X), tak vývoj systému je jednoznačne určený týmito zákonmi a celú históriu systému – jeho minulosť, prítomnosť aj budúcnosť– možno reprezentovať ako úplnú trajektóriu v priestore X. V praxi je ale prakticky nemožné, aby sme mali dosť informácií na takéto úplné určenie stavu systému a jeho vývoja.[7] Základná myšlienka štatistickej mechaniky, pochádzajúca od Gibbsa, je vzdať sa deterministického opisu vývoja *jedného* stavu (t.j. opisu trajektórie jedného bodu fázového priestoru X) a namiesto toho, aby sme sa pýtali "aký bude stav systému v čase t", sa pýtame, "aká je pravdepodobnosť, že v čase t bude stav systému patriť do danej podmnožiny fázového priestoru X". Dôležité sú hlavne otázky týkajúce sa asymptotického vývoja, t.j. "čo sa (pravdepodobne) stane so systémom, ak čas ide do $+\infty$".

Podľa tzv. Liouvillovej vety zo štatistickej mechaniky sa vie, že každý uzavretý hamiltonovský systém v konečnom objeme má konečnú invariantnú mieru (nejde o mieru, ktorá meria geometrický objem, sú v nej zohľadnené aj momenty molekúl plynu). Pre také systémy teda platí Poincarého veta o rekurencii.

Predstavme si teraz, že v našej nádobe s plynom máme prepážku uprostred a všetok plyn je len v ľavej časti, v spomínanom počte N molekúl. Odstráňme prepážku. V tom okamihu (čas 0) je všetok plyn v ľavej časti. Jeho stav je určený $6N$ číslami, teda bodom v X. Existuje ale veľa bodov v X, ktoré zodpovedajú tomu, že všetok plyn je v ľavej časti – tieto body tvoria v X množinu A. Z tvaru spomínanej invariantnej miery fyzici vedia, že miera množiny A je kladná. Je však nesmierne malá, ak N je veľmi veľké.[8] Vieme, čo sa po odstránení prepážky stane – plyn sa rozšíri do celého objemu nádoby. Zdá sa nemožné, aby sa po čase zase všetkých N molekúl nakopilo vľavo, teda aby sa bod (stav, $6N$-tica) z A, s ktorým sme začínali, zase vrátil do A. Vďaka Poincarého vete o rekurencii však vieme, že pre skoro každý bod z A (teda s pravdepodobnosťou 1 je to tak aj v našom pokuse, lebo s pravdepodobnosťou 1 ten náš bod z množiny A patrí do príslušnej množiny plnej miery v A) platí, že sa nekonečne veľa krát vráti do A. Inak povedané, v našom pokuse sa s pravdepodobnosťou 1 stane to, že všetok plyn sa znovu raz nahromadí v ľavej

[7] Napr. N býva veľmi veľké (za normálnych okolností 1 cm^3 plynu obsahuje nejakých 10^{20} molekúl) a okrem toho, dokonca aj v prípade, keby bolo N malé, je problém v danom počiatočnom čase zmerať tých $6N$ čísel, nehovoriac už o tom, že každé meranie je zaťažené chybou a drobná chyba v počiatočných podmienkach môže viesť k dramaticky odlišným vývojom (trajektóriám), teda systém môže byť v tomto zmysle chaotický.

[8] To je dosť zrejmé aj bez toho, aby sme zachádzali do fyzikálnych detailov. Predstavte si, že máme N molekúl, z ktorých každá sa v danom čase nachádza s pravdepodobnosťou $1/2$ v ľavej polovici nádoby a s pravdepodobnosťou $1/2$ v pravej polovici (objem tu interpretujeme ako pravdepodobnosť a niet fyzikálneho dôvodu na to, aby niektorá z dvoch polovíc nádoby bola niektorou molekulou uprednostnená). Potom pravdepodobnosť, že všetkých N molekúl je v ľavej polovici, je $(1/2)^N$, čo je nesmierne malá kladná hodnota. Z toho sa dá usúdiť, že aj miera množiny A je nesmierne malá kladná. Veď systém sa nachádza v stave patriacom do množiny A práve vtedy, keď všetky molekuly sú v ľavej polovici a na tom, aké sú v tej chvíli ich momenty, vôbec nezáleží. Ak sa Vám takéto zdôvodnenie nezdá dosť presvedčivé, máte ešte možnosť uspokojiť sa s tým, čo hovoria fyzici.

časti nádoby.

Toto sa dlho považovalo za paradox, veď to odporuje intuícii a nikto to ešte nepozoroval.[9] V skutočnosti to až taký paradox nie je, veď to, že sa niečo stane s pravdepodobnosťou 1, ešte nič nehovorí o *čase*, kedy sa to stane. Ako sme už povedali, celý fázový priestor X má konečnú kladnú mieru (hovoríme o tej invariantnej miere). Množina A, teda množina všetkých tých stavov, ktoré zodpovedajú situáciám, kedy je všetok plyn v ľavej časti, má síce kladnú mieru, ale nesmierne malú, lebo N je v praxi veľmi veľké. Preto možno predpokladať, že očakávaný čas prvého návratu do množiny A je obrovský (dlhší ako vek vesmíru). Keby sme vedeli, že náš systém je aj ergodický vzhľadom na spomínanú invariantnú mieru (a pokiaľ sa vie, plyn v nádobe je vzhľadom na spomínanú invariantnú mieru ergodický systém, alebo aspoň 'skoro' ergodický), mali by sme to aj teoreticky podložené Kacovou vetou. Podľa nej je očakávaný čas prvého návratu do množiny A obrovský, lebo množina A má veľmi malú kladnú mieru.[10]

7.4 Cvičenia a projekty

Cvičenie 7.1. Vyšetrite ergodičnosť zobrazení:

(a) $T(x) = x + 1$ na priestore $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, \mu)$, kde μ je sčítacia miera (teda $\mu(A)$ je počet prvkov množiny A).

(b) $T(x) = x + 1$ na priestore $\mathbb{R}$ s Lebesguovou mierou.

(c) $T(x) = x + 2$ na priestore $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, \mu)$, kde μ je sčítacia miera.

Cvičenie 7.2. Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie. Ak pre nejakú množinu $A \in \mathcal{B}$ je množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A))$ plnej miery (t.j. $\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)) = 0$), tak hovoríme, že množina A vyzametá alebo vysaje skoro celý priestor X, alebo že je to tzv. "sweep-out" množina. Dokážte, že vo Vete 7.13 je s podmienkami (1)-(4) ekvivalentná aj nasledujúca podmienka:

- Každá množina kladnej miery vyzametá skoro celý priestor X.

Cvičenie 7.3. Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľné zobrazenie (nepredpokladáme zachovávanie miery). Pre funkciu $f\colon X \to \mathbb{R}$ uvažujme o funkcii

$$\bar{f}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$$

(časový priemer alebo priemer funkcie f pozdĺž trajektórie bodu $x \in X$). Dokážte, že ak pre každú funkciu f tvaru $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{B}$, takto definovaná funkcia $\bar{f}$ existuje a je konštantná skoro všade, tak zobrazenie T je ergodické.

[9] Nepozoroval to však len preto, lebo v praxi je N veľmi veľké. Keby bolo N malé, dalo by sa to pozorovať. Stačí si predstaviť extrémny prípad $N = 1$. Ale aj keď N je rádovo v desiatkach, tak pravdepodobnosť, že všetky molekuly budú v ľavej polovici nie je až taká malá a uvedený jav by sa dal pozorovať. Napr. by sa to dalo modelovať pomocou počítača.

[10] Asi by sme sa teda nemali obávať ani toho, že sa všetok vzduch v triede nakopí v niektorom z horných kútov miestnosti a my sa začneme dusiť, hoci podľa Vety 10.4(1)⇒(3) sa to s pravdepodobnosťou 1 stane. Lenže z rovnakých dôvodov ako vyššie, potrvá nesmierne dlhý čas, kým sa to stane.

Kapitola 8

Dôkazy ergodičnosti

Dokazovať ergodičnosť systému je vo všeobecnosti ťažké (výnimkou sú veľmi jednoduché systémy, pozri napr. Príklady 7.6 a 7.7). Uvedieme dva nástroje, ktoré niekedy pri dokazovaní ergodičnosti pomôžu. Sú to Lebesguova veta o hustote a Fourierove rady.

8.1 Lebesguova veta o hustote a dôkazy ergodičnosti

V niektorých prípadoch sa pri dôkaze ergodičnosti dá využiť tzv. Lebesguova veta o hustote.

Definícia 8.1. Nech λ je d-rozmerná Lebesguova miera v $\mathbb{R}^d$. Symbolom $B(x,\varepsilon)$ označíme otvorenú guľu so stredom $x \in \mathbb{R}^d$ a polomerom ε. Nech $M \subseteq \mathbb{R}^d$ je lebesguovsky merateľná množina a nech $x \in \mathbb{R}^d$. Potom *hustotu množiny M v bode x* definujeme ako limitu (ak existuje)

$$d_x(M) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\lambda(M \cap B(x,\varepsilon))}{\lambda(B(x,\varepsilon))} \ . \tag{8.1}$$

Bod $x \in \mathbb{R}^d$ sa nazýva *(Lebesguov) bod hustoty pre množinu M*, ak $d_x(M) = 1$.[1]

Teda x je bodom hustoty pre M, ak pre malé guľové okolia bodu x platí, že veľká časť takého okolia (v zmysle miery) je tvorená bodmi množiny M. Pre $\varepsilon \to 0^+$ sa táto proporcia blíži k jednotke.

Príklad 8.2. Ak M je štvorec v rovine, tak hustota $d_x(M) = 1$ ak x je vnútorný bod štvorca, $d_x(M) = 1/2$ ak x leží na strane štvorca ale nie v jeho vrchole, $d_x(M) = 1/4$ ak x je vrcholom štvorca a $d_x(M) = 0$ ak x leží mimo štvorca.

Skutočnosť, že skoro každý bod štvorca M je jeho bodom hustoty, nie je náhoda. Podľa tzv. Lebesguovej vety o hustote, ktorú o chvíľu sformulujeme, to platí pre každú množinu $M \subseteq \mathbb{R}^d$ kladnej Lebesguovej miery, nech by už tá množina bola akokoľvek 'deravá' (napr. to môže byť Cantorova množina kladnej miery).

Všimnime si ešte, že v tomto príklade všetky body hustoty pre štvorec M sú bodmi M. Ak však $M^* = M \setminus \{c\}$ kde c je stred štvorca M, tak $c \notin M^*$ ale c je bodom hustoty pre M^*.

Veta 8.3 (Lebesguova veta o hustote). *Nech $M \subseteq \mathbb{R}^d$ je lebesguovsky merateľná množina a nech λ je d-rozmerná Lebesguova miera. Potom λ-skoro každý bod množiny M je bodom hustoty množiny M (a teda ak $\lambda(M) > 0$, tak v množine M naozaj existujú body hustoty množiny M).*

[1] Písmeno d v označení $d_x(M)$ pochádza z anglického slova density (hustota). V definícii nepožadujeme, aby x patril do M. Napriek tomu sa často hovorí "bod hustoty množiny M" namiesto správnejšieho "bod hustoty pre množinu M". Je to podobný problém ako s hromadnými bodmi množiny M (tiež by bolo správnejšie vravieť o hromadných bodoch pre množinu M).

Vetu nebudeme dokazovať, budeme ju však používať. Najskôr sformulujeme jednoduchý dôsledok (sformulujeme ho v dimenzii 1, ale analogické tvrdenie platí v dimenzii d).

Dôsledok 8.4. *Nech $M \subseteq \mathbb{R}$ je lebesguovsky merateľná množina kladnej miery a nech $x \in M$ je bod hustoty (existuje podľa Lebesguovej vety o hustote). Nech $\delta > 0$. Potom pre všetky dostatočne malé $\varepsilon > 0$, pre interval $I = I(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ platí*

$$\lambda(I \cap M) \geq (1 - \delta)\lambda(I).$$

V takom prípade budeme hovoriť, že interval I je $(1-\delta)$-vyplnený množinou M.[2]

Dôkaz. Keďže $\lambda(M) > 0$, podľa Lebesguovej vety o hustote naozaj existuje bod $x \in M$, ktorý je bodom hustoty množiny M, teda $d_x(M) = 1$ (dokonca skoro každý bod $x \in M$ je taký). Potom však z definície (8.1) dostávame nasledovné: Pre ľubovoľne malé $\delta > 0$ existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pre každé $\varepsilon < \varepsilon_0$ interval $I = I(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ spĺňa nerovnosť

$$\frac{\lambda(I \cap M)}{\lambda(I)} \geq (1 - \delta),$$

čím je dôkaz skončený. □

Teda ak $M \subseteq \mathbb{R}$ je kladnej Lebesguovej miery a $x \in M$ je bod hustoty, tak napr. pre $\delta = 0,01$ každý dostatočne krátky interval $I = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ spĺňa nerovnosť

$$\lambda(I \cap M) \geq 0,99\lambda(I).$$

To znamená, že interval I je aspoň na 99 percent vyplnený množinou M (v zmysle našej dohody hovoríme, že je $0,99$-vyplnený množinou M).

Lema 8.5. *Nech I a I_α, $\alpha \in J$ sú také (nedegenerované) intervaly, že $I = \bigsqcup_{\alpha \in J} I_\alpha$. Predpokladajme, že interval I je $(1-\delta)$-vyplnený (lebesguovsky merateľnou) množinou M. Potom aj niektorý z intervalov I_α je $(1-\delta)$-vyplnený množinou M.*

Dôkaz. Keďže intervaly sú nedegenerované, je indexová množina J konečná alebo nekonečná spočítateľná, takže bude mať zmysel hovoriť o sumách $\sum_{\alpha \in J}$.

Pripusťme, že tvrdenie neplatí, teda $\lambda(I_\alpha \cap M) < (1-\delta)\lambda(I_\alpha)$ pre každé $\alpha \in J$. Potom však

$$\begin{aligned}\lambda(I \cap M) &= \lambda\left(M \cap \bigsqcup_{\alpha \in J} I_\alpha\right) = \lambda\left(\bigsqcup_{\alpha \in J}(M \cap I_\alpha)\right) = \sum_{\alpha \in J} \lambda(M \cap I_\alpha) \\ &< \sum_{\alpha \in J}(1-\delta)\lambda(I_\alpha) = (1-\delta)\sum_{\alpha \in J}\lambda(I_\alpha) = (1-\delta)\lambda(I),\end{aligned}$$

čo je spor s tým, že interval I je $(1-\delta)$-vyplnený množinou M. □

Horeuvedené pojmy a fakty teraz využijeme na dôkaz ergodičnosti niektorých mieru zachovávajúcich systémov.

Podľa príkladu 4.14 všetky rotácie kružnice zachovávajú Lebesguovu mieru. Podľa Príkladu 7.5 racionálne rotácie nie sú ergodické. Teraz ukážeme, že iracionálne rotácie ergodické sú.

[2] Správnejšie by bolo vravieť, že je aspoň $(1-\delta)$-vyplnený množinou M.

Veta 8.6. *Iracionálne rotácie kružnice sú ergodické (vzhľadom na Lebesguovu mieru λ).*

Dôkaz. Nech T je iracionálna rotácia kružnice. Keďže T zachováva konečnú Lebesguovu mieru λ, podľa Dôsledku 7.14 stačí dokázať, že T je metricky tranzitívne. Nech teda $\lambda(A) > 0$, $\lambda(B) > 0$. Potrebujeme dokázať, že pre nejaké $n \geq 1$ je $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Zobrazenie T má peknú vlastnosť, že nielen vzor, ale aj obraz merateľnej množiny je merateľná množina s tou istou mierou (to vyplýva napr. z toho, že aj T^{-1} je iracionálna rotácia a teda zachováva mieru λ). Tiež pripomeňme, že každá orbita zobrazenia T je hustá (to vyplýva napr. z Príkladu 2.15 a Cvičenia 2.3). Navyše, kružnicu $\mathbb{S}^1$ môžeme chápať ako interval $[0, 1)$, a tak na množiny A, B môžeme aplikovať Dôsledok 8.4.

Nech a je bod hustoty pre množinu A a nech b je bod hustoty pre množinu B. Zvoľme $\delta > 0$.[3] Potom všetky dostatočne malé[4] okolia bodu a sú $(1-\delta)$-vyplnené množinou A a všetky dostatočne malé okolia bodu b sú $(1-\delta)$-vyplnené množinou B. Môžeme teda zvoliť okolie I_δ bodu a a okolie J_δ bodu b (sú to teda otvorené oblúky na kružnici a závisia od voľby δ) tak, že

$$\lambda(I_\delta \cap A) \geq (1-\delta)\lambda(I_\delta), \qquad \lambda(J_\delta \cap B) \geq (1-\delta)\lambda(J_\delta)$$

a I_δ je dvakrát kratší ako J_δ, teda

$$\lambda(I_\delta) = (1/2)\lambda(J_\delta).$$

Keďže stred intervalu I_δ má hustú orbitu, existuje $n \geq 1$ také, že jeho T^n-obraz je natoľko blízko stredu intervalu J_δ, že $T^n(I_\delta) \subseteq J_\delta$ (využili sme, že interval $T^n(I_\delta)$ má rovnakú dĺžku ako I_δ, teda polovičnú v porovnaní s dĺžkou J_δ).

V intervale J_δ s mierou $\lambda(J_\delta)$ teda leží množina $J_\delta \cap B$ s mierou $\lambda(J_\delta \cap B) \geq (1-\delta)\lambda(J_\delta)$, ale aj množina $T^n(I_\delta \cap A)$ s mierou $\lambda(T^n(I_\delta \cap A)) = \lambda(I_\delta \cap A) \geq (1-\delta)\lambda(I_\delta)$. Súčet ich mier je

$$\lambda(J_\delta \cap B) + \lambda(T^n(I_\delta \cap A)) \geq (1-\delta)\lambda(J_\delta) + (1-\delta)\lambda(I_\delta) = \frac{3}{2}(1-\delta)\lambda(J_\delta),$$

čo je ostro viac ako $\lambda(J_\delta)$, ak zvolíme δ dostatočne malé. Teraz si stačí uvedomiť, že ak teda δ zvolíme takéto, tak $J_\delta \cap B$ a $T^n(I_\delta \cap A)$ sa nevyhnutne pretínajú[5] (dokonca v množine kladnej miery). Preto sa pretínajú aj ich nadmnožiny B a $T^n(A)$ (dokonca v množine kladnej miery). Tým je dôkaz skončený. □

V Príklade 4.15 sme ukázali, že expandujúce zobrazenia kružnice zachovávajú Lebesguovu mieru. Sú aj ergodické. Ukážeme to teraz pre zobrazenie E_2.

Veta 8.7. *Expandujúce zobrazenie kružnice $E_2\colon [0,1) \to [0,1)$, $E_2(x) = 2x \mod 1$, je ergodické (vzhľadom na Lebesguovu mieru λ).*

Dôkaz. Kvôli jednoduchosti píšme T namiesto E_2. Predpokladajme, že T nie je ergodické, t.j. existuje rozklad $[0, 1) = A \sqcup B$ kde $\lambda(A) > 0$, $\lambda(B) > 0$, $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Odvodíme spor.

[3] Zatiaľ ľubovoľné, ale neskôr upresníme, aké malé.

[4] Toto je dôležité: Nielen pre ľubovoľne malé, ale pre všetky dostatočne malé. Teda nielen existujú ľubovoľne malé polomery, pre ktoré to platí, ale existuje také ε_0, že pre každý polomer $\varepsilon < \varepsilon_0$ to platí. Len vďaka tomu je jasné, že môžeme predpokladať $\lambda(I_\delta) = (1/2)\lambda(J_\delta)$.

[5] Idea bola: Ak v nejakom intervale je napr. 99% zafarbených na červeno (teda len 1% je nezafarbené na červeno) a v nejakom jeho podintervale s polovičnou dĺžkou je 99% zafarbených na modro, tak nejaký bod má obe farby, veď 99% z polovice celku je viac ako 1% z celku. To čo je modré sa nemohlo zmestiť do komplementu toho, čo je červené. Modré pretína červené.

Nech $x \in A$ je bod hustoty množiny A. Môžeme predpokladať, že $0 < x < 1$, pretože skoro každý bod množiny A je bodom hustoty. Fixujme $\delta > 0$. Podľa Dôsledku 8.4 môžeme vziať také $\varepsilon > 0$ (závisiace od δ), že $0 < x - \varepsilon < x + \varepsilon < 1$ a pre interval $I_\delta = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ platí

$$\lambda(I_\delta \cap A) \geq (1 - \delta)\lambda(I_\delta).$$

Interval I_δ nahradíme vhodnejším intervalom, s ktorým sa bude lepšie pracovať. Za tým účelom uvažujme o systéme všetkých dyadických intervalov

$$D_{n,k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$$

(číslo n nazývame rádom dyadického intervalu $D_{n,k}$). Je zrejmé (vysvetlite!), že náš otvorený interval I_δ možno vyjadriť v tvare disjunktného zjednotenia nejakého systému dyadických intervalov (je ich vo všeobecnosti nekonečne veľa, s rádmi idúcimi do nekonečna). Potom však na základe Lemy 8.5 existuje dyadický interval D, pre ktorý

$$\lambda(D \cap A) \geq (1 - \delta)\lambda(D). \tag{8.2}$$

Teraz si všimnime, ako zobrazenie $T = E_2$ zobrazuje dyadické intervaly (viď Obr. 8.1):

Obr. 8.1: Zobrazenie E_2 a dyadické intervaly

- každý z dvoch intervalov $\left[\frac{0}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)$ prvého rádu sa 'ľavou polovicou' alebo 'pravou polovicou' zobrazenia E_2, teda v každom prípade lineárnym zobrazením so smernicou 2 zobrazuje na celý interval $[0, 1)$;
- každý zo štyroch intervalov $\left[\frac{0}{2^2}, \frac{1}{2^2}\right)$, $\left[\frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^2}\right)$, $\left[\frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^2}\right)$, $\left[\frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^2}\right)$ druhého rádu sa zobrazuje na niektorý interval prvého rádu a teda druhou iteráciou sa zobrazuje na celý interval $[0, 1)$, pričom v každom kroku sa používa lineárne zobrazenie so smernicou 2;
- všeobecne, každý interval n-tého rádu sa n-tou iteráciou zobrazuje na celý interval $[0, 1)$, pričom v každom z n krokov sa používa lineárne zobrazenie so smernicou 2.

Uvedomme si ešte, že lineárne zobrazenie so smernicou 2 zobrazuje intervaly na intervaly dvakrát dlhšie, a teda merateľné množiny na množiny s dvojnásobnou Lebesguovou mierou. Ak náš dyadický interval D zo vzťahu (8.2) je rádu n (a teda má dĺžku $1/2^n$), tak $T^n(D) = [0, 1)$ a

$$\lambda(T^n(D \cap A)) = 2^n \lambda(D \cap A) \geq 2^n (1 - \delta)\lambda(D) = 1 - \delta. \tag{8.3}$$

Keďže $T(A) \subseteq A$, tak $T^n(D \cap A) \subseteq A \subseteq [0,1)$. Potom s využitím (8.3) dostávame, že

$$1 \geq \lambda(A) \geq \lambda(T^n(D \cap A)) \geq 1 - \delta.$$

Pretože $\delta > 0$ bolo ľubovoľné, máme odtiaľ $\lambda(A) = 1$, čo je spor s tým, že $\lambda(B) > 0$. $\square$

8.2 Fourierove rady a dôkazy ergodičnosti

Ukážeme, ako je možné použiť Fourierove rady spolu s Vetou 7.8 na dôkaz, že niektoré zobrazenia na kružnici $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ alebo na tóruse $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, sú ergodické. Takéto dôkazy ergodičnosti sú pomerne jednoduché a elegantné, potrebné je však vedieť niektoré základné fakty z teórie Fourierových radov. Uvedieme ich bez dôkazov.

8.2.1 Fourierove rady pre funkcie na kružnici

Uvažujme o kružnici $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ so σ-algebrou $\mathcal{B}$ borelovských množín a s Lebesguovou mierou λ. Potom $(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ je priestor s mierou. Vezmime funkciu $f\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$. Ak si predstavíme kružnicu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ako interval $[0,1]$ s koncami zlepenými do jedného bodu, vidíme, že si funkciu f môžeme predstaviť ako funkciu $[0,1] \to \mathbb{R}$, ktorá má v bodoch 0 a 1 rovnaké hodnoty. Takú funkciu však možno (jediným spôsobom) predĺžiť do periodickej funkcie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periódou 1. Obrátene, od takej periodickej funkcie sa dá prejsť k jej zúženiu na $[0,1]$. Toto zúženie má v bodoch 0 a 1 rovnaké hodnoty. Preto jednoznačne určuje funkciu na kružnici. Pozri Obrázok 8.2.

Obr. 8.2: (Reálna alebo komplexná) funkcia na kružnici indukuje (reálnu alebo komplexnú) 1-periodickú funkciu na $\mathbb{R}$ a obrátene.

Teda uvažovať o funkcii $f\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ je to isté ako uvažovať o periodickej funkcii $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periódou 1, teda $f(x+1) = f(x)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

Predpokladajme, že $f \in L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ alebo, ekvivalentne, nech f je 1-periodická funkcia na $\mathbb{R}$, ktorej zúženie na $[0,1]$ je lebesguovsky integrovateľné. K funkcii f priradíme tzv. *Fourierov rad*[6] funkcie f, t.j. rad

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x), \tag{8.4}$$

[6] Ak chceme byť presnejší, hovoríme o trigonometrickom rade. Pojem Fourierovho radu je všeobecnejší, nemusia v ňom vystupovať trigonometrické funkcie.

kde

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\, d\lambda, \qquad b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\, d\lambda. \tag{8.5}$$

Predpoklad $f \in L^1(\mathbb{T}^1, B, \lambda)$ zaručuje, že a_n a b_n, a teda aj Fourierov rad, sú dobre definované. Pozor, netvrdíme, že Fourierov rad funkcie f konverguje k funkcii f. Zatiaľ ide len o to, že ho k funkcii f formálne priradíme. Toto priradenie vyjadrujeme zápisom

$$f(x) \ \sim\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx). \tag{8.6}$$

Výhodné je vyjadriť tento rad pomocou komplexných funkcií, s využitím vzťahu

$$e^{i2\pi nx} = \cos(2\pi nx) + i\sin(2\pi nx),$$

z ktorého sa ľahko odvodí, že

$$\cos(2\pi nx) = \frac{1}{2}\left(e^{i2\pi nx} + e^{-i2\pi nx}\right), \qquad \sin(2\pi nx) = \frac{1}{2i}\left(e^{i2\pi nx} - e^{-i2\pi nx}\right).$$

Po dosadení sa (8.6) a (8.5) zmenia na

$$f(x) \ \sim\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx}, \quad \text{kde} \quad c_n = \int_0^1 f(x)e^{-i2\pi nx}\, d\lambda \tag{8.7}$$

(špeciálne, $c_0 = \int_0^1 f\, d\lambda$). Číslo c_n sa nazýva n-tý *Fourierov koeficient*. Ak chceme zdôrazniť závislosť c_n na f, píšeme $c_n(f)$.

Pre naše účely postačí, ak sa obmedzíme na Fourierove rady funkcií f z menšieho priestoru $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$.[7] Toto je Hilbertov priestor a preto skôr, než zhrnieme potrebné fakty o Fourierových radoch v $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$, bude užitočné zopakovať základné fakty o Fourierových radoch vo všeobecných Hilbertových priestoroch.

Hilbertov priestor $\mathcal{H}$ je taký lineárny (čiže vektorový) priestor nad poľom $\mathbb{C}$ (prípadne $\mathbb{R}$), v ktorom máme *skalárny súčin* $\langle .,. \rangle$ a od neho odvodenú *normu* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ a priestor je úplný vzhľadom na *metriku* odvodenú od normy, t.j. vzhľadom na metriku definovanú vzťahom $\varrho(u,v) = \|u - v\|$.

Množina vektorov $E \subseteq \mathcal{H}$ sa nazýva *ortonormálna*, ak každý vektor z E má normu 1 a každé dva rôzne vektory z E sú *ortogonálne*, t.j. majú skalárny súčin 0. Platí veta, že v takom prípade pre každý vektor $v \in \mathcal{H}$ je $\langle v, e\rangle = 0$ pre všetky vektory $e \in E$ s výnimkou spočítateľného množstva. Ak teda označíme

$$E_v = \{e \in E\colon\ \langle v, e\rangle \neq \emptyset\},$$

tak množina E_v je spočítateľná. Navyše, suma $\sum_{e\in E_v}\langle v, e\rangle e$ konverguje v $\mathcal{H}$ nezávisle na poradí členov.

[7] To preto, lebo Lebesguova miera na kružnici je konečná a tak podľa Vety 7.8(6)$\Leftrightarrow$(1) je ergodičnosť merateľného zobrazenia $T\colon (\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda) \to (\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ ekvivalentná s tým, že každá invariantná funkcia $f \in L^2(\mathbb{T}^1, B, \lambda)$ pre zobrazenie T je skoro všade konštantná. (Na dôkaz toho, že každá invariantná funkcia $f \in L^2(\mathbb{T}^1, B, \lambda)$ je skoro všade konštantná sa dajú využiť práve Fourierove rady.)

V každom Hilbertovom priestore existuje tzv. *ortonormálna báza*, teda ortonormálna množina s tou vlastnosťou, že pre každé $v \in \mathcal{H}$ je

$$v = \sum_{e \in E_v} \langle v, e \rangle e. \tag{8.8}$$

Táto formula sa nazýva *Fourierovým rozvojom/radom* vektora v vzhľadom na ortonormálnu bázu E. Koeficienty $\langle v, e \rangle$, $e \in E_v$, sa nazývajú *Fourierove koeficienty.* Súčet nekonečného radu v Hilbertovom priestore sa samozrejme definuje ako limita postupnosti čiastočných súčtov (teda ako limita istej postupnosti elementov metrického priestoru $\mathcal{H}$). Vzťah (8.8) ukazuje, že v Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$ sa k elementu $v \in \mathcal{H}$ (a ortonormálnej báze E) nielenže priraďuje Fourierov rad, ale tento rad má navyše tú príjemnú vlastnosť, že konverguje a jeho súčet je práve v.

Platí veta, že

- v každom Hilbertovom priestore existuje ortonormálna báza, teda
- v každom Hilbertovom priestore možno vektory vyjadrovať ako súčty svojich Fourierových radov.

Ortonormálna báza môže byť konečná, nekonečná spočítateľná alebo nespočítateľná. Každé dve ortonormálne bázy Hilbertovho priestoru $\mathcal{H}$ majú rovnakú kardinalitu a tá sa nazýva *dimenziou* $\mathcal{H}$.[8] Ortonormálna báza je spočítateľná[9] práve vtedy, keď $\mathcal{H}$ je separabilný.

Každý nekonečno-rozmerný (reálny, resp. komplexný) separabilný Hilbertov priestor je izometricky izomorfný s (reálnym, resp. komplexným) priestorom $L^2([0,1])$. Ide o priestor (reálnych, resp. komplexných) lebesguovsky merateľných funkcií f na $[0,1]$, pre ktoré je $|f|^2$ lebesguovsky integrovateľná. Pritom funkcie rovnajúce sa skoro všade stotožňujeme. Pripomeňme, ako sa v tomto Hilbertovom priestore definuje skalárny súčin a od neho odvodená norma a vzdialenosť (symbol λ tu označujeme Lebesguovu mieru na $[0,1]$ a pruh označuje komplexnú konjugáciu, $\overline{a+ib} = a - ib$):

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f\overline{g}\, d\lambda,$$

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle = \left(\int_0^1 |f|^2\, d\lambda \right)^{1/2},$$

$$d(f,g) = \|f-g\|_2 = \left(\int_0^1 |f-g|^2\, d\lambda \right)^{1/2}.$$

Zopakujme, že elementami priestoru $L^2([0,1])$ nie sú jednotlivé funkcie, ale triedy takých funkcí, ktoré sa rovnajú skoro všade. V týchto triedach môžeme ako reprezentantov zvoliť funkcie, ktoré majú vlastnosť $f(0) = f(1)$, lebo zmena funkcie v jednom bode z $[0,1]$ nemení merateľnosť, integrovateľnosť ani hodnotu integrálu. Teda s rozumnou mierou nepresnosti môžeme povedať, že

$$L^2([0,1]) = L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda).$$

[8] Nepleťte si pojmy ortonormálna báza Hilbertovho priestoru $\mathcal{H}$ a báza vektorového priestoru $\mathcal{H}$. Pre nekonečno-rozmerné Hilbertove priestory ortonormálna báza nie je bázou v zmysle lineárnej algebry (teda vektory z $\mathcal{H}$ nemusia byť konečnými lineárnymi kombináciami vektorov bázy; vo formule (8.8) ide len o konvergenciu takých konečných lineárnych kombinácií ku vektoru v).

[9] Aj konečnú množinu považujeme za spočítateľnú.

Preto si Fourierove rady (reálnych, resp. komplexných) funkcií na kružnici $\mathbb{T}^1$ predstavujeme ako Fourierove rady pre funkcie z (reálneho, resp. komplexného) priestoru $L^2([0,1])$, ktoré majú v 0 a 1 rovnaké funkčné hodnoty. Je dobre známym faktom, že v tomto priestore napr. funkcie e_n definované vzťahom

$$e_n(x) := e^{i2\pi nx} = \cos(2\pi nx) + i\sin(2\pi nx), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

tvoria ortonormálnu bázu. Práve Fourierove rady vzhľadom na túto ortonormálnu bázu budeme odteraz uvažovať.[10] Každú funkciu $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda) = L^2([0,1])$ teda možno vyjadriť v tvare

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n, \quad \text{kde} \quad c_n = \langle f, e_n \rangle,$$

pričom rovnocenne používame aj zápis

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi nx}, \quad \text{kde} \quad c_n = \int_0^1 f\overline{e_n}\, d\lambda = \int_0^1 f(x)e^{-i2\pi nx}\, d\lambda. \tag{8.9}$$

To sa od klasických vzorcov (8.7) pre funkcie z $L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ zdanlivo líši len veľmi málo, v skutočnosti je však rozdiel veľký:

- Zatiaľ čo v (8.7) je Fourierov rad len priradený k funkcii $f \in L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$, v (8.9) máme rovnosť medzi funkciou $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ a súčtom jej L^2-Fourierovho radu.
- Ak pre nejakú funkciu $f \in L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ píšeme, že $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx}$, tak len konštatujeme, že rad vpravo je Fourierov rad funkcie f. Nehovoríme nič o tom, či rad v tom či onom zmysle konverguje a ak konverguje, tak či konverguje k funkcii f. Vo všeobecnosti ten rad nemusí konvergovať ani v L^1 norme ani rovnomerne ani bodovo skoro všade, a už vôbec nie k funkcii f.

To bol klasický a ťažký problém v časti matematiky zvanej klasická harmonická analýza. Pre dostatočne pekné funkcie, napr. pre funkcie so spojitou deriváciou sa vie, že Fourierov rad bodovo konverguje v každom bode x, a to práve ku $f(x)$ (navyše, konvergencia je rovnomerná). Kolmogorov,[11] ako študent vo veku 19 rokov, vo svojej prvej vedeckej práci skonštruoval príklad L^1-funkcie, ktorej Fourierov rad diverguje skoro všade (neskôr to dokonca vylepšil (či vyhoršil?) na divergenciu všade). Problém, či Fourierov rad každej spojitej (podľa iných prameňov každej L^2) funkcie konverguje skoro všade bol sformulovaný Luzinom[12] v 20-tych rokoch 20. storočia a bol otvorený až do r.1966, kedy Carleson[13] publikoval kladnú odpoveď. Hlboká Carlesonova veta tvrdí, že Fourierov rad každej L^2-funkcie konverguje skoro všade ku $f(x)$.

Vo všeobecnosti je to tak, že v niektorých bodoch x Fourierov rad konverguje ku $f(x)$, v iných konverguje k niečomu inému ako $f(x)$ a v ostatných bodoch diverguje (a to nás ešte zaujíma, či v prípade konvergencie ide o rovnomernú konvergenciu, absolútnu konvergenciu apod.) V snahe opísať príslušné množiny bodov, matematici zistili, že im chýba aparát na opis takých množín. Je známe, že k vytvoreniu teórie množín priviedol Cantora práve jeho výskum trigonometrických radov.

[10] Dobre si zapamätajte, že funkcii $x \mapsto e^{i2\pi nx}$ sme dali meno e_n. Toto označenie budeme používať.

[11] Андрей Николаевич Колмогоров (Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903-1987)) bol ruský/sovietsky matematik, ktorého možno zaradiť medzi posledných polyhistorov v matematike. Patril medzi špičku vo viacerých odvetviach matematiky a fyziky, najmä v teórii pravdepodobnosti, topológii, intuicionistickej logike, teórii turbulencie, klasickej mechanike a výpočtovej zložitosti.

[12] Николай Николаевич Лузин (Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883-1950) bol ruský/sovietsky matematik známy svojimi prácami v deskriptívnej teórii množín a v aspektoch matematickej analýzy, ktoré súviseli s topológiou.

[13] Lennart Axel Edvard Carleson (nar. 1928) je švédsky matematik, vedúca osobnosť v harmonickej analýze. Jeho najslávnejší výsledok je dôkaz Luzinovej hypotézy. Pracoval aj v komplexnej dynamike.

- Ak f je L^2-funkcia a pre Fourierov rad funkcie f napíšeme $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ alebo $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi nx}$, tak tým nemyslíme to, že ten rad bodovo konverguje v každom bode ku $f(x)$.[14] Daným zápisom máme na mysli to, že $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ v L^2-norme, teda že v Hilbertovom priestore $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ má daný rad súčet f. Ide tu jednoducho o špeciálny prípad rozvoja (8.8). Presne to znamená, že ak označíme N-tý čiastočný súčet $S_N f = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e_n$ (čo je akási L^2-funkcia), tak $\|S_N f - f\|_2 \to 0$ pre $N \to +\infty$. Ak to chceme zdôrazniť, budeme (aj keď netradične) písať $f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ alebo $f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi nx}$. Prijmeme dohodu:

Ak f a g_n, $n \in \mathbb{Z}$ sú L^2-funkcie a v Hilbertovom priestore L^2 je f súčtom radu $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n$, tak namiesto $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n$ budeme niekedy používať obsažnejší zápis

$$f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n. \tag{8.10}$$

Špeciálne, ak budeme hovoriť o Fourierovom rade L^2-funkcie f, tak namiesto zápisu $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$ budeme používať obsažnejší zápis

$$f \underset{FR}{\overset{L^2}{=}} \sum_{n--\infty}^{\infty} c_n e_n, \quad \text{alebo} \quad f(x) \underset{FR}{\overset{L^2}{=}} \sum_{n--\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx}. \tag{8.11}$$

Ten vyjadruje nielen to, že $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$ je Fourierov rad priradený k funkcii f, ale aj skutočnosť, že tento rad v L^2-norme konverguje k f.

Porovnajme oba prístupy k problému konvergencie Fourierových radov funkcií $f \in L^1(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$. Pokiaľ chceme silou mocou riešiť problém v triede všetkých integrovateľných funkcií a v zmysle bodovej konvergencie, stretávame sa s veľkými komplikáciami. Ak sa však obmedzíme len na funkcie z menšieho priestoru $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ a zvolíme si ten “správny” typ konvergencie, v tomto prípade L^2-konvergenciu (alebo si dokonca zvolíme abstraktný Hilbertov priestor a konvergenciu v jeho norme), tak dostaneme peknú teóriu, pekné vety. Obišli sme ťažkosti. To má výhody aj nevýhody. Ilustruje to zároveň jeden zo základných princípov funkcionálnej analýzy: Pri riešení problému si treba zvoliť vhodný abstraktný priestor a taký typ konvergencie, ktorý je vhodný pre daný problém. To umožní dokázať pekné vety.

Zhrnieme teraz niektoré fakty o Fourierových radoch funkcií z Hilbertovho priestoru $L^2(\mathbb{T}^1, B, \lambda)$.

Propozícia 8.8. *O L^2-Fourierových radoch* (8.9) *platia nasledujúce tvrdenia.*

(1) (Riemannova-Lebesguova lema) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$, tak $c_n \to 0$ pre $|n| \to \infty$.

(2) (Konvergencia v L^2-norme k funkcii f) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$, tak Fourierov rad funkcie f konverguje k funkcii f v L^2-norme:

$$f(x) \underset{FR}{\overset{L^2}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx}$$

[14] Podľa Carlesonovej vety síce ide o bodovú konvergenciu skoro všade, ale nemusí to byť konvergencia všade.

t.j. ak označíme N-tý čiastočný súčet $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{i2\pi nx}$, tak $\|S_N f - f\|_2 \to 0$ pre $N \to +\infty$. [15]

(3) *(Jednoznačnosť Fourierovho radu) Ak $f, g \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$, tak*

$$f = g \ \ \lambda\text{-s.v.} \quad \Longleftrightarrow \quad c_n(f) = c_n(g) \ \text{ pre všetky } n \in \mathbb{Z}.$$

(Implikácia $\Leftarrow$ ukazuje, že Fourierov rad určuje jednoznačne funkciu, ak funkcie rovnajúce sa skoro všade stotožňujeme, ako je zvykom. Podstatne rôzne funkcie majú teda rôzne Fourierove rady, aspoň v jednom koeficiente sa líšia.)

(4) *(Ak rad 'vyzerajúci' ako Fourierov rad konverguje v L^2-norme k nejakej L^2-funkcii f, je to Fourierov rad tej funkcie) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ a*

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi nx},$$

tak tento rad je Fourierovým radom funkcie f, t.j. $d_n = c_n(f)$ pre každé $n \in \mathbb{Z}$, čiže

$$f(x) \underset{FR}{\overset{L^2}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi nx}.$$

8.2.2 Fourierove rady pre funkcie na tóruse

Uvažujme o d-rozmernom tóruse $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$. Opäť nech $\mathcal{B}$ je σ-algebra borelovských množín a nech λ je d-rozmerná Lebesguova miera na tóruse $\mathbb{T}^d$. Potom $(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \lambda)$ je priestor s mierou. V analógii s prípadom $d = 1$, chceme reprezentovať funkciu $f \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ pomocou jej Fourierovho radu.

Namiesto Fourierovho radu v tvare $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx}$ bude mať Fourierov rad v dimenzii d tvar

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} c_{n_1 n_2 \ldots n_d} e^{i2\pi n_1 x_1} e^{i2\pi n_2 x_2} \ldots e^{i2\pi n_d x_d}. \tag{8.12}$$

Podobne ako v Sekcii 2.6, použijeme na zjednodušenie zápisov vektory a skalárny súčin. Označme

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d), \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d), \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_d x_d$$

(teda $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle$ je štandardný, "stredoškolský" skalárny súčin v $\mathbb{R}^d$). Ak ešte namiesto $c_{n_1 n_2 \ldots n_d}$ budeme písať $c_{\mathbf{n}}$ a uvedomíme si, že $e^{i2\pi n_1 x_1} e^{i2\pi n_2 x_2} \ldots e^{i2\pi n_d x_d} = e^{i2\pi(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_d x_d)}$, tak môžeme rad (8.12) zapísať v tvare

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}} e^{i2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle} \ .$$

Ak $f \in L^1(\mathbb{T}^d, B, \lambda)$, priradíme k funkcii f jej Fourierov rad

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}} e^{i2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}, \qquad \text{kde} \qquad c_{\mathbf{n}} = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle} \, d\lambda \ . \tag{8.13}$$

[15] Keďže funkcie e_n sú z L^2, tak aj $S_N f$ je z L^2.

Opäť, čísla $c_{\mathbf{n}}$ sú tzv. Fourierove koeficienty funkcie f a ak môže dôjsť k nedorozumeniu, píšeme $c_{\mathbf{n}}(f)$ namiesto $c_{\mathbf{n}}$.

Podobne ako v prípade $d = 1$ sa obmedzíme na Fourierove rady funkcií f z Hilbertovho priestoru $L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \lambda)$. Analógom k Propozícii 8.8 je potom nasledujúca propozícia.

Propozícia 8.9. *O L^2-Fourierových radoch (8.13) platia nasledujúce tvrdenia.*

(1) (Riemannova-Lebesguova lema) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \lambda)$, tak $c_{\mathbf{n}} \to 0$ pre $\|\mathbf{n}\| \to \infty$, kde $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_d^2}$.

(2) (Konvergencia v L^2-norme k funkcii f) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \lambda)$, tak Fourierov rad funkcie f konverguje k funkcii f v L^2-norme:

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}} e^{i2\pi\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}.$$

(3) (Jednoznačnosť Fourierovho radu) Ak $f, g \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \lambda)$, tak

$$f = g \ \ \lambda\text{-s.v.} \quad \iff \quad c_{\mathbf{n}}(f) = c_{\mathbf{n}}(g) \ \text{ pre všetky } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

(4) (Ak rad 'vyzerajúci' ako Fourierov rad konverguje v L^2-norme k nejakej L^2-funkcii f, je to Fourierov rad tej funkcie) Ak $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \lambda)$ a

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} d_{\mathbf{n}} e^{i2\pi\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle},$$

tak tento rad je Fourierovým radom funkcie f, t.j. $d_{\mathbf{n}} = c_{\mathbf{n}}(f)$ pre každé $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, čiže

$$f(x) \underset{FR}{\overset{L^2}{=}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} d_{\mathbf{n}} e^{i2\pi\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}.$$

8.2.3 Dôkazy ergodičnosti pomocou Fourierových radov

Podľa Vety 7.8(6)⇔(1) je ergodičnosť merateľného zobrazenia $T\colon (\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \lambda) \to (\mathbb{T}^d, \mathcal{B}, \lambda)$, $d \geq 1$, ekvivalentná s tým, že každá funkcia $f \in L^2(\mathbb{T}^d, B, \lambda)$ invariantná pre zobrazenie T je skoro všade konštantná, t.j. s tým, že platí implikácia

$$f \in L^2(\mathbb{T}^d, B, \lambda),\ f \circ T = f \quad \Longrightarrow \quad f \text{ je konštantná } \lambda\text{-skoro všade.}$$

Pri dokazovaní tejto implikácie sa dá niekedy využiť nasledujúca lema.[16] Sformulujeme ju pre kružnicu, prípad $d \geq 2$ sa líši len potrebou používať vektorové značenie.

Lema 8.10. *Nech $T\colon (\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda) \to (\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ zachováva lebesguovu mieru λ a nech $f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ má Fourierov rad*

$$f \underset{FR}{\overset{L^2}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n, \quad t.j. \quad f(x) \underset{FR}{\overset{L^2}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx}.$$

[16] Nevedno prečo, ale v knihách o ergodickej teórii sa tento fakt explicitne neuvádza. Mlčky sa využíva, že ak do Fourierovho radu funkcie $f(x)$ dosadíme $T(x)$ namiesto x, tak dostaneme Fourierov rad funkcie $(f \circ T)(x)$. Je pravda, že v tých knihách v príslušných úvahách vyjdú rady takého tvaru ako majú Fourierove rady, ale to samotné ešte nie je dôkaz, že to čo dostaneme, je Fourierov rad funkcie $(f \circ T)(x)$. Náš dôkaz využíva, že T zachováva mieru, takže autor nemá pocit, že by to bol nejaký očividný fakt, ktorý netreba komentovať.

Vyčíslime tento rad v bode $T(x)$, teda namiesto x dosaďme $T(x)$. Predpokladajme, že po takomto dosadení a úprave dostaneme, pre nejaké čísla d_n, $n \in \mathbb{Z}$, že

$$c_n e^{i2\pi n T(x)} = d_n e^{i2\pi n x}, \quad t.j \quad c_n \cdot (e_n \circ T) = d_n \cdot e_n.$$ [17]

Potom aj $f \circ T \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ a má Fourierov rad

$$f \circ T \overset{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_n, \quad t.j. \quad (f \circ T)(x) \overset{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi n x}.$$ [18]

Dôkaz. To, že $f \circ T \in L^2$, vyplýva z Cvičenia 8.11. Aby sme dokázali $f \circ T \overset{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_n$, označme $S_N := \sum_{n=-N}^{+N} d_n e_n$. Zrejme $S_N \in L^2$. Podľa predpokladov platí

$$S_N = \sum_{n=-N}^{+N} d_n e_n = \sum_{n=-N}^{+N} c_n (e_n \circ T) = \left(\sum_{n=-N}^{+N} c_n e_n \right) \circ T = S_N f \circ T.$$

Keďže $f \overset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$, máme $\|S_N f - f\|_2 \to 0$ pre $N \to +\infty$. Potom však

$$\begin{aligned}
\|S_N - f \circ T\|_2 = \|S_N f \circ T - f \circ T\|_2 &= \left(\int |S_N f \circ T - f \circ T|^2 \, d\lambda \right)^{1/2} \\
&= \left(\int |S_N f - f|^2 \circ T \, d\lambda \right)^{1/2} = \left(\int |S_N f - f|^2 \, d\lambda \right)^{1/2} \\
&= \|S_N f - f\|_2 \to 0
\end{aligned}$$

(tretia rovnosť je triviálna (vysvetlite), štvrtá vyplýva z Vety 4.17(1)⇒(3), lebo T zachováva mieru a $|S_N f - f|^2$ je nezáporná merateľná funkcia). Tým sme dokázali, že v normovanom lineárnom priestore $L^2(\mathbb{T}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ platí

$$\lim_{N \to \infty} S_N = f \circ T \qquad \text{v } L^2\text{-norme.}$$

Ekvivalentne zapísané,

$$f \circ T \overset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_n.$$

Podľa Propozície 8.8(4) potom $f \circ T \overset{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_n$ a dôkaz je skončený. □

Je užitočné si lemu pamätať takto:

Ak zobrazenie T na kružnici zachováva Lebesguovu mieru a $f(x) \overset{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}$, tak potom môžeme vyrobiť Fourierov rad funkcie $f \circ T$ obyčajným dosadením:

$$(f \circ T)(x) = f(Tx) \overset{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i2\pi n (Tx)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi n x},$$

[17] Teda z Fourierovho radu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x}$ funkcie f dostaneme rad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi n x}$ takého tvaru, aký majú mať Fourierove rady, len zatiaľ nevieme, či jeho koeficienty d_n sú Fourierove koeficienty nejakej funkcie.

[18] Teda tvrdí sa, že $d_n = \int_0^1 (f \circ T)(x) e^{-i2\pi n x} \, d\lambda$ pre každé $n \in \mathbb{Z}$.

za predpokladu, že sa členy radu dajú tak upraviť.

Z Vety 8.6 vieme, že iracionálne rotácie kružnice sú ergodické. Uvedieme teraz dôkaz využívajúci Fourierove rady.

Veta 8.11. *Iracionálne rotácie kružnice sú ergodické (vzhľadom na Lebesguovu mieru λ).*

Dôkaz. Nech $T(x) = x + \alpha \bmod 1$ je iracionálna rotácia kružnice, teda $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Vieme, že T zachováva Lebesguovu mieru λ, teda budeme môcť využiť predchádzajúcu lemu. Nech $f \in L^2(\mathbb{T}^1, B, \lambda)$ je invariantná funkcia pre T, teda

$$f \circ T = f.$$

Potrebujeme dokázať, že f je skoro všade konštantná. Uvažujme o Fourierovom rade funkcie f:

$$f(x) \overset{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx}. \tag{8.14}$$

Použijeme Lemu 8.10. Počítajme

$$c_n e^{i2\pi nT(x)} = c_n e^{i2\pi n(x+\alpha \bmod 1)} = c_n e^{i2\pi n(x+\alpha)} = \underbrace{c_n e^{i2\pi n\alpha}}_{d_n} \cdot e^{i2\pi nx}.$$

(v druhej rovnosti sme využili, že modulo 1 možno ignorovať, lebo $e^{i2\pi k} = 1$ pre každé celé k). Podľa spomínanej Lemy je

$$(f \circ T)(x) \overset{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n e^{i2\pi n\alpha}}_{d_n} \cdot e^{i2\pi nx}. \tag{8.15}$$

Keďže platí $f = f \circ T$ a jedna a tá istá funkcia nemôže mať podľa Propozície 8.8(3) dva rôzne Fourierove rady, porovnaním (8.14) a (8.15) dostávame

$$c_n = c_n e^{i2\pi n\alpha} \qquad \text{pre každé } n \in \mathbb{Z}.$$

Odtiaľ máme $c_n(1 - e^{i2\pi n\alpha}) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Pre $n = 0$ dostávame $c_0 \cdot 0 = 0$, čo nedáva žiadnu informáciu o c_0.
- Pre každé $n \neq 0$ máme $c_n \cdot (1 - e^{i2\pi n\alpha}) = 0$. Pretože však α je iracionálne, tak pre každé $n \neq 0$ je $1 - e^{i2\pi n\alpha} \neq 0$ (vysvetlite). Teda pre každé $n \neq 0$ je $c_n = 0$.

To však znamená, že

$$f(x) \overset{L^2}{\underset{FR}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx} = c_0.$$

Teda $f \overset{L^2}{=} c_0$, čiže f a c_0 sa rovnajú ako elementy priestoru L^2.[19] Keďže rovnosť dvoch funkcií v L_2-norme znamená, že tieto funkcie sa rovnajú skoro všade,[20] dostávame, že $f(x) = c_0$ skoro všade, čiže f je konštantná skoro všade, čo sme práve potrebovali dokázať. □

[19]Formálne: Rad vektorov, ktorého jediný nenulový člen je c_0, konverguje v L^2-norme ku vektoru f, čiže $\|c_0 - f\|_2 \to 0$ pre $n \to \infty$. Keďže vektor $c_0 - f$ nezávisí od n, máme $\|c_0 - f\|_2 = 0$, čiže $f = c_0$ v priestore L_2.

[20]Spomeňte si, že v L^2 sa stotožňujú tie a len tie funkcie, ktoré sa rovnajú skoro všade.

8.3 Cvičenia a projekty

Cvičenie 8.1. Ukážte na príklade, že limita v (8.1) nemusí existovať (napr. pre $n = 1$).

Cvičenie 8.2. V Lebesguovej vete o hustote by sme mohli navyše tvrdiť, že pre skoro každý bod $x \in A^C$ je $d_x(A) = 0$. Ako dôsledok potom dostávame, že pre skoro každý bod $x \in \mathbb{R}^n$ hustota $d_x(A)$ existuje a rovná sa 0 alebo 1. Vysvetlite.

Cvičenie 8.3. Dokážte, ze zobrazenie stan je ergodické vzhľadom na Lebesguovu mieru.

Cvičenie 8.4. Sú zobrazenia z Cvičenia 4.16 ergodické vzhľadom na Lebesguovu mieru?

Cvičenie 8.5. Dokážte, že expandujúce zobrazenia kružnice E_m sú ergodické nielen pre $m = 2$ ale aj pre $m = 3, 4, \dots$.

Cvičenie 8.6. Ak všetky zobrazenia $T, T^2, T^3, \dots$ sú ergodické, tak hovoríme, že T je *totálne ergodické.* Dokážte, že iracionálne rotácie kružnice sú totálne ergodické.

Cvičenie 8.7. Je niektoré zo zobrazení z Cvičenia 7.1 totálne ergodické?

Cvičenie 8.8. Dokážte, že každé zo zobrazení E_m, $m = 2, 3, \dots$ je totálne ergodické.

Cvičenie 8.9. Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva mieru a nech f, g sú merateľné reálne (alebo komplexné) funkcie definované na X. Dokážte, že potom aj $f \circ T$ a $g \circ T$ sú merateľné funkcie a ak $f = g$ skoro všade, tak aj $f \circ T = g \circ T$ skoro všade.

Cvičenie 8.10. Nech $T\colon X \to X$ a nech f je reálna (alebo komplexná) funkcia na X. Ukážte, že $(f \circ T)^2 = f^2 \circ T$.

Cvičenie 8.11. Nech $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ zachováva mieru μ a nech $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Dokážte, že potom aj $f \circ T \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Kapitola 9

Birkhoffova ergodická veta

9.1 Birkhoffova ergodická veta

Odporúčame čitateľovi znovu si prečítať Sekciu 1.3. Ako sme už tam naznačili, Birkhoffova ergodická veta je jedna z hlavných viet ergodickej teórie. Motivácia pochádza z Boltzmannovej ergodickej hypotézy sformulovanej Boltzmannom v 30-tych rokoch 20. storočia. Pojem ergodičnosti bol zavedený práve v snahe dokázať túto hypotézu (resp. zistiť, pre ktoré systémy platí), z čoho sa potom zrodila ergodická teória.

Ukázalo sa, že Boltzmannova ergodická hypotéza samozrejme vo všeobecnosti neplatí. Ak však je systém ergodický (a miera je konečná), tak hypotéza platí. To je práve obsahom Birkhoffovej ergodickej vety. Funguje to aj obrátene – ak na priestore s konečnou mierou hypotéza platí, tak je systém ergodický.

Veta 9.1 (Birkhoffova ergodická veta pre mieru zachovávajúce systémy). *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém na priestore so σ-konečnou mierou. Nech f je integrovateľná funkcia na X.*[1] *Uvažujme o limite*

$$\bar{f}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x).$$

(časový priemer alebo priemer funkcie f pozdĺž trajektórie bodu $x \in X$). Potom platí nasledovné.

(1) $\bar{f}(x)$ existuje pre μ-skoro každé $x \in X$, teda funkcia $\bar{f}$ je definovaná skoro všade na X.

(2) Funkcia $\bar{f}$ je (merateľná a dokonca) integrovateľná.

(3) Funkcia $\bar{f}$ je skoro invariantná pre T, t.j.

$$\bar{f} \circ T = \bar{f} \qquad \text{skoro všade na } X.$$

(4) Ak $\mu(X) < \infty$, tak $\bar{f}$ a f majú rovnaký integrál,[2] *t.j.*

$$\int_X \bar{f}\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Vetu nebudeme dokazovať. Dôkaz je dlhý a komplikovaný, pozri napr. [Wa82].

[1] T.j. $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{B}, \mu)$, prípadne $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{B}, \mu)$.
[2] V prípade σ-konečnej miery platí len nerovnosť $\|\bar{f}\|_1 \le \|f\|_1$.

Veta 9.2 (Birkhoffova ergodická veta pre ergodické mieru zachovávajúce systémy). *Nech systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ v predchádzajúcej vete je ergodický. Potom navyše platí nasledovné.*

(5) Funkcia $\bar{f}$ je skoro všade konštantná.

(6) Ak $\mu(X) < \infty$, tak

$$\bar{f} = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu$$

skoro všade, a teda v takomto prípade platí Boltzmannova ergodická hypotéza, t.j.

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)}_{\text{časový priemer}} = \underbrace{\frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu}_{\text{priestorový priemer}} \qquad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X.^3 \qquad \text{(TASA)}$$

Táto veta ukazuje, že Boltzmannova ergodická hypotéza platí, ak časový vývoj je ergodický (a zachováva konečnú mieru).

Dôkaz. (5) Podľa Vety 9.1, $\bar{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ existuje s.v. a je to skoro invariantná funkcia pre T. Lenže T je ergodické, takže podľa Vety 7.8(1)⇒(3) je $\bar{f}$ konštantná skoro všade. Teda existuje c (reálne resp. komplexné, podľa toho či f je reálna alebo komplexná) tak, že

$$\bar{f}(x) = c \qquad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X.$$

(6) Nech teraz $\mu(X) < \infty$. Potom podľa Vety 9.1 je

$$\int_X \bar{f} \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

a ak využijeme, že $\bar{f} = c$ skoro všade, teda $\int_X \bar{f} \, d\mu = \int_X c \, d\mu = c\mu(X)$, dostaneme $c = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu$. Teda naozaj

$$\bar{f}(x) = c = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu \qquad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X,$$

čo je práve (TASA). □

Poznamenajme, že pre dané zobrazenie T a danú funkciu f sa veličina (funkcia, resp. ak fixujeme x tak číslo)

$$B_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \frac{1}{n} \big(f(x) + f(Tx) + \dots f(T^{n-1}x) \big)$$

niekedy nazýva *Birkhoffov priemer.* Limita Birkhoffových priemerov (pri fixovanom $x \in X$) je, ako sme už naznačili vyššie, tzv. *časový priemer* funkcie f pozdĺž trajektórie bodu x. Konečne, $\frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu$ je *priestorový priemer* funkcie f (nie je to nič iné ako stredná hodnota funkcie f tak, ako sa definuje v integrálnom počte, t.j. konštantná funkcia s takouto hodnotou má rovnaký integrál ako má funkcia f).

[3] Ak navyše μ je pravdepodobnostná miera, tak $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_X f \, d\mu$ pre μ-skoro každé $x \in X$.

9.2 Cvičenia a projekty

Cvičenie 9.1. Nech $T\colon [0,1] \to [0,1]$ je zobrazenie stan. Dokážte, že pre skoro každé $x \in [0,1]$ v zmysle Lebesguovej miery je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x) = \frac{1}{2}.$$

Cvičenie 9.2. Nech $T\colon [0,1] \to [0,1]$ je zobrazenie stan. Uveďte, čo sa dá povedať o veličine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{T^k(x)}.$$

Cvičenie 9.3. Nech $S(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Uveďte, čo sa dá povedať o veličine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S^k(x).$$

Kapitola 10

Dôsledky Birkhoffovej ergodickej vety

10.1 Frekvencie návštev

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém na priestore so σ-konečnou resp. konečnou mierou. Potom vieme všeličo povedať o frekvencii návštev typického bodu do merateľnej množiny A. Stačí v Birkhoffovej ergodickej vete za funkciu f dosadiť charakteristickú funkciu χ_A.

Veta 10.1. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém na priestore so σ-konečnou mierou. Nech $A \in \mathcal{B}$. Uvažujme o frekvencii* $\operatorname{frekv}_A(x)$*, s akou bod $x \in X$ navštevuje množinu A. Potom platí nasledujúce.*

(1) Frekvencia $\operatorname{frekv}_A(x)$ *existuje pre skoro každý bod $x \in X$.*

(2) Ak je miera μ konečná, tak

$$\int_X \operatorname{frekv}_A \, d\mu = \mu(A).$$

(3) Ak je miera μ konečná a systém je ergodický, tak vieme fekvenciu z bodu (1) určiť:

$$\operatorname{frekv}_A(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \qquad \textit{pre skoro každý bod } x \in X.$$

Dôkaz. Pripomeňme, že (pozri (1.4), (1.5) a (2.1))

$$\operatorname{frekv}_A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \le k \le n-1 \colon T^k(x) \in A\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x)$$

a keďže funkcia (pozorovateľná) $\chi_A \colon X \to \mathbb{R}$ je (merateľná, lebo $A \in \mathcal{B}$ a) integrovateľná (lebo $\int_X \chi_A \, d\mu = \mu(A) \le \mu(X) < +\infty$), podľa Birkhoffovej vety dostávame nasledujúce.

(1) Frekvencia $\operatorname{frekv}_A(x)$ existuje pre μ-skoro každé $x \in X$ (podľa Vety 9.1(1)).

(2) Ak je $\mu(X) < \infty$, tak $\int_X \operatorname{frekv}_A \, d\mu = \int_X \chi_A \, d\mu = \mu(A)$ (podľa Vety 9.1(4)).

(3) Ak je $\mu(X) < \infty$ a systém je ergodický, tak (podľa Vety 9.2(6)) je

$$\operatorname{frekv}_A(x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \chi_A(x) \, d\mu(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \qquad \text{pre skoro každý bod } x \in X.$$

□

Nech $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$. Podľa Vety 5.10 vieme, že skoro každý bod množiny A sa vracia do A s kladnou *hornou* frekvenciou. Ako sme už povedali v Poznámke 5.13, v skutočnosti sa skoro každý bod množiny A vracia do A s kladnou *frekvenciou.*

Dôsledok 10.2. *Nech* $T\colon (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ *zachováva* konečnú *mieru* μ *a nech* $\mu(A) > 0$. *Potom skoro každý bod množiny* A *sa vracia do* A *s* kladnou *frekvenciou (rovnou* $\mu(A)/\mu(X)$ *ak je miera* μ *konečná a systém je ergodický).*

Dôkaz. Podľa Vety 5.10 vieme, že skoro každý bod množiny A sa vracia do A s kladnou *hornou frekvenciou.* Podľa Vety 10.1(1) existuje dokonca *frekvencia* takýchto návratov pre skoro každé $x \in A$.[1] Prienik dvoch podmnožín plnej miery v A je podmnožina plnej miery v A a na nej existuje ako kladná horná frekvencia tak aj frekvencia. Teda tam existuje kladná frekvencia.[2] Tvrdenie v zátvorke potom vyplýva z Vety 10.1(2). □

Poznámka 10.3. Majme mieru zachovávajúci systém $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ s konečnou mierou a predpokladajme aj ergodičnosť. Nech $\mu(A) > 0$. Podľa Kacovej vety (pozri Dôsledok 7.15) sa stredná doba návratu bodov $x \in A$ do množiny A rovná

$$(t_A)_{\mathrm{str}} = \frac{\mu(X)}{\mu(A)}$$

Podľa Dôsledku 10.2 sa skoro každý bod množiny A vracia do A s frekvenciou

$$\mathrm{frekv}_A(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}.$$

Keď porovnáme oba výsledky, vidíme, že ide o navzájom prevrátené hodnoty. To je v súlade s predstavou, že ak je množina malá, tak bodom z nej dlho trvá, kým sa do nej vrátia a teda sa do nej vracajú zriedkavo. Ak je množina veľká, tak bodom z nej krátko trvá, kým sa do nej vrátia a teda sa do nej vracajú často.

10.2 Ďalšie ekvivalentné definície ergodičnosti

Najskôr pripomeňme, že ergodičnosť sme definovali v Definícii 7.1. S jej ekvivalentnými definíciami (teda s podmienkami ekvivalentnými s ergodičnosťou) sme sa stretli vo Vetách 7.3 a 7.8, pozri aj vetu 7.13. V tejto sekcii uvedieme ďalšie ekvivalentné definície ergodičnosti.

Veta 9.2 sa dá sformulovať aj tak, že v mieru zachovávajúcom systéme na priestore s *konečnou* mierou je ergodičnosť postačujúcou podmienkou k platnosti Boltzmannovej ergodickej hypotézy. Ukážeme, že v takých systémoch je aj nutnou podmienkou. To dáva novú ekvivalentnú definíciu ergodičnosti (pre mieru zachovávajúce systémy na priestoroch s konečnou mierou). Nasledujúca veta poskytuje túto aj dve ďalšie ekvivalentné definície ergodičnosti.

Veta 10.4. *Nech* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *je mieru zachovávajúci systém na priestore s* konečnou *mierou. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

(1) T *je ergodické.*

[1] Ak A je merateľná podmnožina priestoru X a ak niečo platí pre skoro každé $x \in X$, tak to platí aj pre skoro každé $x \in A$.

[2] Lebo existujúca frekvencia sa musí zhodovať s hornou frekvenciou.

(2) Pre každú integrovateľnú[3] *funkciu f platí Boltzmannova ergodická hypotéza, t.j.*

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)}_{\text{časový priemer}} = \underbrace{\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu}_{\text{priestorový priemer}} \qquad \textit{pre } \mu\textit{-skoro každé } x\in X.$$

(3) Pre každú množinu $A\in\mathcal{B}$, skoro každý bod $x\in X$ navštevuje množinu A so "správnou" frekvenciou, t.j. s frekvenciou úmernou miere množiny A:

$$\mathrm{frekv}_A(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \qquad \textit{pre skoro každé } x\in X.$$

(4) Pre každé $A,B\in\mathcal{B}$ platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mu(T^{-k}(A)\cap B)}{\mu(X)} = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}\cdot\frac{\mu(B)}{\mu(X)}.$$

Skôr než dokážeme túto vetu, uvedieme niekoľko poznámok.

Poznámka 10.5. Podľa Birkhoffovej vety pre ergodické mieru zachovávajúce systémy, pozri Vetu 9.2, vieme, že (1)⇒(2). Novinkou je, že platí aj obrátená implikácia. Podobne, z Vety 10.1(2) vieme, že (1)⇒(3). Opäť, čo je tu nové, je obrátená implikácia.

Poznámka 10.6. V súvislosti s podmienkou (3) zopakujme to, na čo sme v predstihu upozornili už v Sekcii 1.2. Ergodičnosť znamená, že pre každú množinu $A\in\mathcal{B}$ existuje *svoja* (t.j. závislá od A) množina M_A plnej miery s tou vlastnosťou, že každý bod $x\in M_A$ navštevuje túto jednu množinu A so správnou frekvenciou ako v (3). Ergodičnosť neznamená to, že by musela existovať jedna *univerzálna* množina M plnej miery s tou vlastnosťou, že každý bod $x\in M$ navštevuje každú množinu $A\in\mathcal{B}$ so správnou frekvenciou ako v (3). Samozrejme, ak je v σ-algebre $\mathcal{B}$ len konečne veľa množín[4], tak množina $M := \bigcap_{A\in\mathcal{B}} M_A$ je plnej miery a je takou univerzálnou množinou. Vo všeobecnosti však taká univerzálna množina existovať nemusí. Napr. ak T je iracionálna rotácia kružnice $\mathbb{T}^1$, tak T zachováva Lebesguovu mieru Leb (ktorá je na kružnici konečná) a je aj ergodické. Spomínaná univerzálna množina však v tomto prípade neexistuje. Dokonca *žiaden* bod x nemá tú vlastnosť, aby navštevoval *každú* merateľnú množinu A s frekvenciou $\mathrm{Leb}(A)/\mathrm{Leb}(\mathbb{T}^1)$. Napr. svoju orbitu $A := \mathrm{Orb}_T(x) = \{x, T(x), T^2(x), \dots\}$ navštevuje s frekvenciou 1, ale $\mathrm{Leb}(A) = 0$.

Pozor teda na poradie kvantifikátorov! Podmienka (3) hovorí, že "pre každú množinu $A\in\mathcal{B}$ skoro každý bod navštevuje A s frekvenciou $\mu(A)/\mu(X)$" a nie "skoro každý bod navštevuje každú množinu A s frekvenciou $\mu(A)/\mu(X)$".

Poznámka 10.7. V poslednej formule Vety 10.4 by sme samozrejme mohli vykrátiť jedno $\mu(X)$, ale takto lepšie vidieť, čo formula hovorí:

- Množina B pri iterovaní pretína množinu A. Veličina $\frac{\mu(T^{-k}(A)\cap B)}{\mu(X)}$ je číslo z intervalu $[0,1]$, ktoré udáva, akú časť priestoru X (v zmysle miery) predstavuje tá časť množiny B, ktorá v čase k vojde do A.

[3] T.j. patriacu do $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mathcal{B},\mu)$, prípadne $L^1_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{B},\mu)$.

[4] Je známe, že každá σ-algebra je buď konečná alebo nespočítateľná.

- Veličina $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu(T^{-k}(A)\cap B)}{\mu(X)}$ udáva, akú časť priestoru X predstavuje *v priemere* tá časť množiny B, ktorá pri iterovaní pretína v tom-ktorom čase množinu A.

- Veličina $\frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \frac{\mu(B)}{\mu(X)}$, teda súčin "relatívnych" veľkostí množín A a B, udáva "férovú" hodnotu veličiny z predchádzajúceho bodu: Ak množina A predstavuje napr. jednu desatinu priestoru X, teda $\frac{\mu(A)}{\mu(X)} = \frac{1}{10}$, tak vo "férovom" prípade by v priemere práve jedna desatina množiny B mala v tom-ktorom čase vojsť do množiny A (a deväť desatín do jej komplementu $X \setminus A$). Miera tejto množiny je $\frac{1}{10}\mu(B)$, všeobecne $\frac{\mu(A)}{\mu(X)}\mu(B)$. Ak vyjadríme (číslom z intervalu $[0,1]$), akú časť priestoru X to predstavuje, dostaneme hodnotu $\frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \frac{\mu(B)}{\mu(X)}$.

Podľa Vety 10.4(1)⇔(4) teda ergodičnosť znamená, že merateľná množina B pri iterovaní pretína (v priemere) merateľnú množinu A tak, ako zodpovedá relatívnym veľkostiam týchto množín. Čím sú množiny A a B väčšími časťami priestoru X, tým väčšmi bude v priemere množina B pri iterovaní pretínať množinu A.

Teraz vetu dokážeme.

Dôkaz. $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ je Birkhoffova veta pre ergodické mieru zachovávajúce systémy, pozri Vetu 9.2.

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ Ak platí (2), tak špeciálne pre charakteristickú funkciu χ_A množiny $A \in \mathcal{B}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \chi_A \, d\mu.$$

Lenže na ľavej strane je frekvencia návštev bodu x do množiny A a na pravej strane je $\mu(A)/\mu(X)$.

$\boxed{(3)\Rightarrow(4)}$ Predpokladajme (3). Nech $A, B \in \mathcal{B}$. Podľa (3) platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \qquad \text{pre skoro každé } x \in X$$

a teda aj

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) \cdot \chi_B(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \chi_B(x) \qquad \text{pre skoro každé } x \in X.$$

Podľa Lemy 3.25 je $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}$, teda aj $\chi_A \circ T^k = \chi_{T^{-k}(A)}$. Ak ešte vezmeme do úvahy zrejmú rovnosť $\chi_C \chi_D = \chi_{C\cap D}$, tak dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{T^{-k}(A)\cap B}(x) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \chi_B(x) \qquad \text{pre skoro každé } x \in X$$

a odtiaľ

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{T^{-k}(A)\cap B} = \int_X \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \cdot \chi_B.$$

Integrál vpravo sa rovná $\frac{\mu(A)}{\mu(X)}\mu(B)$. Keďže aritmetický priemer charakteristických funkcii je nezáporná funkcia zhora ohraničená jednotkou, môžeme vľavo na základe Lebesguovej vety o dominantnej konvergencii zameniť poradie integrovania a limitovania. Dostaneme tak

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{T^{-k}(A)\cap B} = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}\mu(B)$$

a odtiaľ po jednoduchom výpočte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(T^{-k}(A)\cap B) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}\mu(B),$$

čo je (4).

$\boxed{(4)\Rightarrow(1)}$ Predpokladáme (4). Pripusťme, že by T nebolo ergodické. Potom existuje rozklad $X = A \sqcup B$, kde $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ a $T(A) \subseteq A$, $T(B) \subseteq B$. Pre tieto dve množiny je však ľavá strana (4) triviálne rovná nule, zatiaľ čo pravá strana je kladná, čo je spor. □

10.3 *Rovnomerná rozdelenosť a ergodičnosť

10.3.1 Rovnomerne rozdelené postupnosti v kompaktoch

Rovnomerne rozdelené postupnosti bodov sme študovali len v intervaloch v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^s$. Nedajú sa rovnomerne rozdelené postupnosti definovať v nejakých všeobecnejších priestoroch? Pre špeciálne typy priestorov to možné je. Opíšeme jeden taký prípad.

Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou, v ktorom

- X je kompaktný Hausdorffov priestor[5],
- $\mathcal{B}$ je σ-algebra borelovských množín v X a
- μ je regulárna konečná miera definovaná na σ-algebre $\mathcal{B}$.[6]

Nasledujúca definícia, pozri [KN74, str.171], je inšpirovaná Vetou 2.9(1)⇔(3) a je teda v súlade s teóriou rovnomerne rozdelených postupností čísel.

Definícia 10.8. Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodov priestoru X sa nazýva *rovnomerne rozdelená vzhľadom na mieru* μ, alebo μ*-rovnomerne rozdelená*, ak platí

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu \qquad \text{pre každú spojitú funkciu } X \to \mathbb{R}. \tag{10.1}$$

Integrál vpravo je abstraktný Lebesguov integrál.

Ak $M \subseteq X$, označme symbolom ∂M hranicu množiny M v priestore X. Nasledujúca veta, pozri [KN74, Theorem 1.2, str. 175], dáva ekvivalentné definície rovnomernej rozdelenosti.

[5] Teda napr. kompaktný metrický priestor.

[6] Miera μ definovaná na σ-algebre borelovských podmnožín topologického priestoru X a nazýva *regulárna*, ak pre každú borelovskú množinu E platí $\mu(E) = \sup\{\mu(K)\colon K \subseteq E,\ K \text{ je kompaktná}\} = \inf\{\mu(U)\colon E \subseteq U,\ U \text{ je otvorená}\}$. Vie sa, že ak náš kompaktný Hausdorffov priestor X má spočítateľnú bázu, teda ak je to napr. kompaktný metrický priestor, tak naša konečná miera μ na $\mathcal{B}$ je automaticky regulárna.

Veta 10.9. *Nech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov priestoru X. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(1) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je μ-rovnomerne rozdelená, teda platí (10.1)*.*

(2) Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ navštevuje so správnou frekvenciou každú takú množinu $M \in \mathcal{B}$, pre ktorú $\mu(\partial M) = 0$, teda

$$\operatorname{frekv}_M(x_n) = \frac{\mu(M)}{\mu(X)} \qquad \text{pre každú } M \in \mathcal{B}, \text{ pre ktorú } \mu(\partial M) = 0.$$

(3) Rovnosť (10.1) *platí pre charakteristické funkcie takých množín M ako v predchádzajúcej podmienke, teda*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_M(x_n) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \chi_M \, d\mu \qquad \text{pre každú } M \in \mathcal{B}, \text{ pre ktorú } \mu(\partial M) = 0.$$

Vetu nebudeme dokazovať, ale okomentujeme ju.

Ekvivalencia (2)⇔(3) je zrejmá, ekvivalencia (1)⇔(2) si dôkaz vyžaduje.

Propozícia 2.7 ukazuje, prečo sa vo Vete 10.9 v podmienke (2) nehovorí o všetkých borelovských množinách, ale len o 'dostatočne pekných'. Prečo sa však za 'dostatočne pekné' borelovské množiny môžu vybrať napríklad tie, ktoré majú hranicu nulovej miery? V špeciálnom prípade číselných postupností sa nám nič také vo Vete 2.6 neobjavilo. Nuž, explicitne sa nám to tam neobjavilo, ale implicitne to tam je. Vysvetlíme to.

Podľa Vety 2.6(1)⇔(4),

- postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne rozdelená v $[A, B]$ vtedy a len vtedy, keď navštevuje každú borelovskú jordanovsky merateľnú podmnožinu M intervalu $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{\operatorname{Jord}(M)}{\operatorname{Jord}([A,B])}$.

To môžeme prepísať pomocou dvoch faktov. Po prvé, množina je jordanovsky merateľná práve vtedy, keď jej hranica má Jordanovu mieru nula, a to je práve vtedy, keď jej hranica má Lebesguovu mieru nula. Po druhé, ak je množina S jordanovsky merateľná, tak je aj lebesguovsky merateľná a $\operatorname{Jord}(S) = \operatorname{Leb}(S)$. Dostaneme tak nasledujúcu formuláciu Vety 2.6(1)⇔(4):

- postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne rozdelená v $[A, B]$ vtedy a len vtedy, keď navštevuje každú borelovskú 'dostatočne peknú' množinu M v $[A, B]$ so správnou frekvenciou $\frac{\operatorname{Leb}(M)}{\operatorname{Leb}([A,B])}$. Pritom borelovská množina M je 'dostatočne pekná', ak jej hranica má Lebesguovu mieru nula.[7]

To však znamená, že Veta 2.6(1)⇔(4) je len špeciálny prípad Vety 10.9(1)⇔(2), keď všeobecný priestor $(X, \mathcal{B}, \mu)$ nahradíme priestorom $([A, B], \mathcal{B}_{[A,B]}, \operatorname{Leb}_{[A,B]})$, kde $\mathcal{B}_{[A,B]}$ je σ-algebra borelovských podmnožín intervalu $[A, B]$ a $\operatorname{Leb}_{[A,B]}$ je Lebesguova miera na $[A, B]$ (je regulárna a $[A, B]$ je kompaktný Hausdorffov priestor).

Takže nielen Definícia 10.8, ale aj Veta 10.9 je v súlade s teóriou rovnomerne rozdelených postupností čísel (a podobne bodov v $\mathbb{R}^s$).

[7] V literatúre sa nehovorí 'dostatočne pekná', ide o tzv. množiny μ-spojitosti, pozri [KN74, Definition 1.3, str. 174].

10.3.2 Ergodičnosť v kompaktoch ako rovnomerná rozdelenosť trajektórií

Začnime jednoduchým pozorovaním.

Propozícia 10.10. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém, pričom X je kompaktný Hausdorffov priestor, $\mathcal{B}$ je σ-algebra borelovských množín a miera μ je regulárna a konečná.*[8]

(1) Ak je bod $x \in X$ férový, tak jeho trajektória je μ-rovnomerne rozdelená.

(2) Ak má bod $x \in X$ μ-rovnomerne rozdelenú trajektóriu, tak ešte nemusí byť férový (a to ani za predpokladu ergodičnosti).

Dôkaz. (1) Ak je x férový, t.j. ak každú množinu $A \in \mathcal{B}$ navštevuje so správnou frekvenciou, tak z Vety 10.9(2)⇒(1) je zrejmé, že trajektória bodu x je μ-rovnomerne rozdelená.

(2) Nech T je zobrazenie stan na $[0, 1]$. Toto zobrazenie je ergodické (vzhľadom na Lebesguovu mieru). Preto podľa Birkhoffovej ergodickej vety, pozri Vetu 9.2(6), pre každú integrovateľnú funkciu f platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu \qquad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X.$$

Tým skôr to platí pre každú spojitú funkciu, teda podľa Definície 10.8 je trajektória skoro každého bodu $x \in [0, 1]$ μ-rovnomerne rozdelená. Podľa Propozície 1.4 však žiaden z týchto bodov nie je férový. □

Veta 10.11. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ je mieru zachovávajúci systém, pričom X je kompaktný Hausdorffov priestor, $\mathcal{B}$ je σ-algebra borelovských množín a miera μ je regulárna a konečná. Potom nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné.*

(1) T je ergodické.

(2) Skoro každý bod $x \in X$ má μ-rovnomerne rozdelenú trajektóriu.

Dôkaz. $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Zopakujeme argument z dôkazu Propozície 10.10(2). Podľa Birkhoffovej ergodickej vety, pozri Vetu 9.2(6), pre každú integrovateľnú funkciu f platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu \qquad \text{pre } \mu\text{-skoro každé } x \in X.$$

Tým skôr to platí pre každú spojitú funkciu, teda podľa Definície 10.8 je trajektória skoro každého bodu $x \in X$ μ-rovnomerne rozdelená.

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ Nech platí (2). Predpokladajme, že T nie je ergodické. Potom

$$X = A \sqcup B, \quad \text{kde} \quad \mu(A) > 0, \, \mu(B) > 0 \quad \text{a} \quad T(A) \subseteq A, \, T(B) \subseteq B.$$

Z toho však vyplýva, že žiaden bod z X nemá μ-rovnomerne rozdelenú trajektóriu, čo je spor s (2). (Naozaj, ak $x \in A$, tak x nikdy nenavštívi B, teda $\text{frekv}_B(x) = 0 < \frac{\mu(B)}{\mu(X)}$. Podobne postupujte ak $x \in B$.) □

[8] Predpoklady teda zabezpečujú, že môžeme využívať aj predchádzajúcu Subsekciu 10.3.1, aj Birkhoffovu ergodickú vetu.

10.4 Cvičenia a projekty

Cvičenie 10.1. Na príklade ukážte, že vo Vete 10.11 museli byť nejaké predpoklady o topologickom priestore X a o miere μ. (Návod: využite napr. Cvičenie 7.1(a).)

Kapitola 11

Aplikácie Birkhoffovej ergodickej vety

11.1 b-adické rozvoje čísel. Borelova veta o normálnych číslach

Nech $b \geq 2$ je celé číslo a nech x je reálne číslo. Budeme uvažovať o *b-árnom rozvoji čísla x* (resp. o jeho zápise v číselnej sústave so základom b) v tvare

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i}, \qquad a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

Samozrejme, štandardne sa aj $\lfloor x \rfloor$ vyjadruje pomocou mocnín b, ale nás to teraz nebude zaujímať, preto si v b-árnom rozvoji x všímame len necelú časť. Ak $x - y \in \mathbb{Z}$, tak sa necelé časti x a y zhodujú, preto sa až na celé časti $\lfloor x \rfloor$ a $\lfloor y \rfloor$ aj b-árne rozvoje čísel x a y zhodujú. To je dôvod, prečo sa teraz obmedzíme na reálne čísla z intervalu $[0, 1)$.

Sústredíme sa najskôr na prípad $b = 2$, kedy hovoríme o binárnom rozvoji.

Každé číslo $x \in [0, 1)$ má teda *binárny rozvoj* (zápis v dvojkovej sústave)

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots \; = \; \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, \qquad a_i \in \{0, 1\}.$$

V takom prípade sa čísla a_i volajú cifry čísla x v dvojkovej sústave. Píšeme $x = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_{(2)}$ alebo, ak je jasné, že hovoríme o binárnom rozvoji a nemôže dôjsť k nedorozumeniu, tak len $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$.

Binárny rozvoj čísel z intervalu $[0, 1)$ je jednoznačný s výnimkou spočítateľne veľa čísel tvaru $k/2^n$, $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$, $n = 1, 2, \dots$. Napríklad

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots = (0, 11000 \dots)_{(2)}$$

ale aj

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = (0, 10111 \dots)_{(2)}.$$

Takáto dvojznačnosť nastáva len u spočítateľne veľa čísel. Z pohľadu Lebesguovej miery má teda skoro každé číslo $x \in [0, 1)$ jednoznačný binárny rozvoj. Úplná jednoznačnosť binárneho rozvoja sa dá dosiahnuť tak, že zakážeme rozvoje končiace samými jednotkami (napr. z dvoch horeuvedených rozvojov čísla $3/4$ za binárny rozvoj považujeme len ten prvý). My to tiež tak urobíme, a teda v ďalšom už budeme uvažovať o jednoznačne definovaných binárnych rozvojoch.

Nasledujúci pojem pochádza od Borela.[1]

Definícia 11.1. Povieme, že číslo $x \in [0,1)$ je *normálne* vzhľadom na bázu 2 (alebo v báze 2), ak frekvencia výskytu cifry 0 ako aj frekvencia výskytu cifry 1 v binárnom rozvoji čísla x obidve existujú a rovnajú sa 1/2.

Veta 11.2 (Borelova veta o normálnych číslach). *V zmysle Lebesguovej miery skoro každé číslo $x \in [0,1)$ je normálne vzhľadom na bázu 2.*

Dôkaz. Využijeme expandujúce zobrazenie kružnice

$$T(x) = E_2(x) = 2x \bmod 1, \qquad x \in [0,1).$$

Všimnime si, že ak $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$, tak

$$T(x) = T\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots\right) = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \bmod 1 =$$
$$= \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \bmod 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i} \bmod 1.$$

V zmysle našej dohody o jednoznačnosti binárneho rozvoja, postupnosť $a_1, a_2, a_3, \dots$ nekončí samými jednotkami. Špeciálne, $a_2, a_3, \dots$ nie sú samé jednotky, a teda $\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \in [0,1)$. Ukázali sme tak, že

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \ \Rightarrow\ T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}.$$

Vidíme, že pre $x \in [0,1)$ sa trajektória bodu x ľahko počíta, ak použijeme binárne rozvoje:

$$\begin{aligned} x &= 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \\ T(x) &= 0, a_2 a_3 a_4 a_5 \dots \\ T^2(x) &= 0, a_3 a_4 a_5 a_6 \dots \\ &\dots. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že

$$a_1 = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$
$$a_2 = \begin{cases} 0 & \text{ak } T(x) \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{ak } T(x) \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$
$$a_3 = \begin{cases} 0 & \text{ak } T^2(x) \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{ak } T^2(x) \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$
$$\dots.$$

[1] Émile Borel, plným menom Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 – 1956) bol francúzsky matematik, spolu s Baireom a Lebesgueom jeden z priekopníkov teórie miery a jej aplikácií v teórii pravdepodobnosti. Pracoval aj v teórii čísel, teórii množín, teórii funkcií a ďalších matematických disciplínach. Je známy aj ako autor myšlienkového experimentu, dnes známeho väčšinou ako veta o nekonečnej opici, ktorý publikoval v jednej zo svojich kníh o pravdepodobnosti (samotná idea vraj ale siaha až k Aristotelovi). Veta hovorí, že opica náhodne udierajúca do klávesov písacieho stroja, by za nekonečný čas takmer určite napísala ľubovoľný predom určený text, napríklad kompletné dielo Williama Shakespeara. Súvisí to aj s normálnymi číslami, pozrite vo Wikipédii článok Infinite monkey theorem.

Odtiaľ máme

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\#\{1 \le k \le n\colon\ a_k = 0\} &= \frac{1}{n}\#\left\{1 \le k \le n\colon\ T^{k-1}(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{n}\#\left\{0 \le k \le n-1\colon\ T^{k}(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Potom

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{1 \le k \le n\colon\ a_k = 0\}}_{\text{frekvencia cifry 0 v bin. rozvoji } x \in [0,1)} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\left\{0 \le k \le n-1\colon\ T^{k}(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right\}}_{\text{frekvencia návštev } x \text{ do } [0,\frac{1}{2}) \text{ pri zobrazení } T}$$

a ak vezmeme do úvahy, že zobrazenie $T = E_2$ zachováva Lebesguovu mieru λ (ktorá je na $[0,1)$ konečná) podľa Príkladu 4.15 a je ergodické podľa Vety 8.7, tak nám Veta 10.1(2) okamžite dáva, že

$$\text{frekvencia cifry 0 v bin. rozvoji } x \;=\; \frac{\lambda[0,\frac{1}{2})}{\lambda[0,1)} = \frac{1}{2} \qquad \text{pre } \lambda\text{-skoro každé } x \in [0,1).$$

Rovnako sa ukáže, že[2]

$$\text{frekvencia cifry 1 v bin. rozvoji } x \;=\; \frac{\lambda[\frac{1}{2},1)}{\lambda[0,1)} = \frac{1}{2} \qquad \text{pre } \lambda\text{-skoro každé } x \in [0,1).$$

Pretože prienik dvoch množín plnej miery je množina plnej miery, skončili sme dôkaz. □

Poznámka 11.3. Ak má číslo dva binárne rozvoje, jeden končiaci samými nulami a druhý končiaci samými jednotkami, tak nie je normálne v báze 2, nech by sme už brali do úvahy ktorýkoľvek rozvoj. Nebolo preto nijako obmedzujúce uvažovať len rozvoje nekončiace samými jednotkami.

Poznámka 11.4. Podobne sa ukáže, že pre ľubovoľné iné celé $b \ge 2$ je skoro každé číslo $x \in [0,1)$ normálne vzhľadom na bázu b (každá spomedzi cifier $0, 1, \dots, b-1$ sa v zápise čísla x v číselnej sústave so základom b vyskytuje s frekvenciou $1/b$). Stačí namiesto E_2 vziať E_b. Pretože prienik spočítateľne veľa množín plnej miery je množina plnej miery, tak dostávame, že skoro každé číslo $x \in [0,1)$ je normálne vzhľadom na každú bázu $b \ge 2$. Konečne, ak si pripomenieme, že reálne čísla s tou istou necelou časťou majú v b-árnych rozvojoch rovnaké tie časti, čo sú za b-árnou čiarkou[3], tak môžeme hovoriť aj o normálnych číslach $x \in \mathbb{R}$. Z toho, čo sme už povedali, je zrejmé, že skoro každé číslo $x \in \mathbb{R}$ je normálne vzhľadom na každú bázu $b \ge 2$.

11.2 Rozvoje čísel do reťazových zlomkov

Gaussovo zobrazenie úzko súvisí s reťazovými zlomkami.

[2] Možno tiež použiť úvahu, že ak sa pre nejaké x frekvencia cifry 0 v binárnom rozvoji x rovná $1/2$, tak sa frekvencia cifry 1 rovná $1 - 1/2 = 1/2$.

[3] Analógia s desatinnou čiarkou v prípade $b = 10$.

11.2.1 O ret'azových zlomkoch

Každé *racionálne číslo* sa dá rozvinúť do tzv. konečného ret'azového zlomku. Dané číslo najskôr vyjadríme ako súčet jeho celej časti (čo je celé číslo, najlepšia dolná celočíselná aproximácia daného racionálneho čísla) a necelej časti, čo je zase racionálne číslo, avšak už z intervalu $[0, 1)$. Ak je toto nové racionálne číslo 0 alebo 1, skončili sme. Ak patrí do $(0, 1)$, je to kladný zlomok s čitateľom menším ako menovateľom. Napíšeme ho v tvare zlomku s čitateľom 1, takže v menovateli bude zlomok (racionálne číslo z $(1, \infty)$), ktorého čitateľ je väčší ako menovateľ. S ním zopakujeme celú procedúru. Takto pokračujeme, až kým neskončíme (t.j. kým sa nedopracujeme k 0 alebo 1). Keďže sme pôvodne začali s racionálnym číslom, dá sa ukázať, že po konečnom počte krokov skončíme, teda racionálne čísla majú konečné rozvoje do ret'azových zlomkov. Celá procedúra zodpovedá Euklidovmu algoritmu.[4] Uvedieme niekoľko príkladov takých rozvojov. Keďže sa objavujú "mnohoposchodové" zlomky, je rozumné používať aj označenia, ktoré sa zmestia do riadku. Začnime príkladom

$$-\frac{20}{7} = -3 + \frac{1}{7} =: [-3; 7].$$

Podobne,

$$-\frac{19}{7} = -3 + \frac{2}{7} = -3 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = -3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} =: [-3; 3, 2]$$

(všimnite si, že bodkočiarkou oddeľujeme len celú časť pôvodného čísla, potom používame čiarky). Ešte jeden príklad:

$$\frac{59}{21} = 2 + \frac{17}{21} = 2 + \frac{1}{\frac{21}{17}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{17}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{17}{4}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}} =: [2; 1, 4, 4]$$

Všimnite si, čo je podstatné na takomto rozvoji: všetky čitatele sú jednotky. Tie sa preto v "jednoriadkovom" zápise neobjavujú.

Všeobecne, pre každé racionálne číslo máme jeho rozvoj do konečného ret'azového zlomku:

$$x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

To znamená, že existuje také nezáporné celé číslo n, celé číslo a_0 (to je celá časť čísla x) a kladné celé čísla $a_1, \ldots, a_n$. Takýto rozvoj nie je celkom jednoznačný, lebo $[a_0; a_1, ..., a_{n1}, a_n] = [a_0; a_1, ..., a_{n1}, (a_n - 1), 1]$. Napr.

$$[0; 3, 2] = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = [0; 3, 1, 1].$$

[4]Skúste to vysvetliť.

Obvykle sa uprednostňuje prvý, kratší rozvoj. Pri dodržiavaní takej dohody je rozvoj racionálneho čísla do reťazového zlomku jediný.

Analogická procedúra sa dá robiť s *iracionálnymi* číslami. Postupujeme ako u racionálnych čísel. Zase začneme vyjadrením čísla v tvare súčtu celej časti a necelej časti. Necelá časť tentoraz nemôže byť nula, lebo je to iracionálne číslo, takže patrí do $(0,1)$. Vyjadríme ju v tvare zlomku s čitateľom 1. Menovateľ je potom iracionálne číslo väčšie ako 1. S ním celú procedúru zopakujeme (oddelíme celú časť, atď.). Takto postupujeme donekonečna, procedúra nikdy neskončí (konečný reťazový zlomok, keďže v ňom vystupujú len celé čísla, by bol racionálnym číslom). Teda každé iracionálne číslo má nekonečný rozvoj do reťazového zlomku. Pritom tento rozvoj je jediný (na rozdiel od racionálnych čísel netreba prijímať žiadnu dohodu, aby to tak bolo). Platí teda

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Longrightarrow x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots].$$

To znamená, že existuje také celé číslo a_0 (to je celá časť čísla x) a kladné celé čísla $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, že procedúra rozvoja x do reťazového zlomku dá horeuvedený výsledok. V teórii reťazových zlomkov sa dokazuje, že tento výraz nie je len zápisom akejsi procedúry, ale že x je limitou tzv. *zblížených zlomkov* čísla x:

$$x = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

Uvedieme príklad. Pre číslo $\sqrt{2}$ je začiatok rozvoja takýto (využívame, že $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$):

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}\,.$$

Keďže sa nám v menovateli objavilo číslo $\sqrt{2}+1$, ktoré sme už raz v menovateli mali a vzniklo z neho

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\,,$$

vidíme, že celý rozvoj je

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots].$$

V tomto prípade je nekonečný rozvoj $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ *periodický*. Tým sa myslí, že má tvar

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, \ldots, a_{k+n}}].$$

Podľa tzv. Lagrangeovej vety majú periodický rozvoj do reťazového zlomku tie a len tie iracionálne čísla, ktoré sú tvaru

$$\frac{P \pm \sqrt{N}}{Q}, \qquad \text{kde } P, Q \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}, \sqrt{N} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

(pritom v elementárnej teórii čísel sa dokazuje, že ak N je prirodzené, tak $\sqrt{N}$ je alebo prirodzené alebo iracionálne). Všimnite si, že iracionálne číslo má periodický rozvoj práve vtedy, keď je to koreň kvadratickej rovnice s racionálnymi koeficientami (a to je práve vtedy, keď je to koreň kvadratickej rovnice s celočíselnými koeficientami). Také čísla sa nazývajú *kvadratické iracionality.*

Príkladom neperiodického rozvoja do reťazového zlomku je

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ..., 1, 2n, 1, \dots].$$

Nie je to periodický rozvoj, ale ešte stále tu vidieť akési pravidlo $(1, 2n, 1)$. V rozvoji čísla π do reťazového zlomku však zatiaľ nik žiadne pravidlo neobjavil:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, ...].$$

11.2.2 Súvis reťazových zlomkov s Gaussovým zobrazením

Budú nás zaujímať vlastnosti reťazových zlomkov čísel z intervalu $[0, 1]$. Pre konkrétne číslo to môže byť ťažké (ako naznačuje napr. rozvoj čísla π), nás však bude zaujímať, čo sa dá povedať o rozvoji do reťazového zlomku pre skoro každé číslo z $[0, 1]$. Máme na mysli "skoro každé" v zmysle Lebesguovej miery $\mathrm{Leb} = \mathrm{Leb}_{[0,1]}$ alebo v zmysle nejakej miery μ, ktorá je s ňou ekvivalentná (lebo pre ekvivalentné miery nulové množiny a teda aj pojmy "skoro každý" vzhľadom k jednej či druhej miere splývajú). Takou mierou μ je napr. *Gaussova miera* z Príkladu 4.16, ktorá je rovnako ako Lebesguova miera definovaná na $\mathcal{L}_{[0,1]}$ a je ekvivalentná s Leb.

Pri takto formulovanej úlohe je jasné, že si nemusíme všímať racionálne čísla, ktorých je len spočítateľne veľa (a teda $\mathrm{Leb}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0 = \mu(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$). Ak ich vynecháme z intervalu $[0, 1]$, nezmení to miery podmnožín intervalu $[0, 1]$. Ak totiž označíme

$$\mathbb{J} := (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1],$$

tak množina $A \subseteq [0, 1]$ je lebesguovsky merateľná vtedy a len vtedy keď $A \cap \mathbb{J}$ je lebesguovsky merateľná a to isté platí pre μ-merateľnosť. Navyše, v prípade merateľnosti máme

$$\mathrm{Leb}(A \cap \mathbb{J}) = \mathrm{Leb}(A) = \mu(A) = \mu(A \cap \mathbb{J}).$$

Tiež si všimnime, že Gaussovo zobrazenie z Príkladu 4.16 definované vzťahom

$$T \colon [0, 1] \to [0, 1], \qquad T(x) := \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0, \\ \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & \text{ak } x \in (0, 1] \end{cases} \tag{11.1}$$

zobrazuje racionálne čísla do racionálnych a iracionálne do iracionálnych (to okrem iného znamená, že trajektória iracionálneho čísla sa nikdy nedostane do nuly). Môžeme ho preto zúžiť na množinu $\mathbb{J}$, teda na tú podstatnú časť intervalu $[0, 1]$, ktorá nás zaujíma. Dovolíme si nezmeniť označenie zobrazenia, takže dostaneme

$$T \colon \mathbb{J} \to \mathbb{J}, \qquad T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor. \tag{11.2}$$

Navyše, keďže nás bude zaujímať Leb-miera resp. μ-miera množín, budeme môcť stotožňovať množiny $A \subseteq [0,1]$ a $A \cap \mathbb{J} \subseteq \mathbb{J}$. Tiež si budeme môcť dovoliť stotožňovať tvrdenia tvaru "pre skoro každé iracionálne číslo z $[0,1]$ ..." (teda "pre skoro každé $x \in \mathbb{J}$ ...") a tvrdenia tvaru "pre skoro každé číslo z $[0,1]$ ...". Dokonca môžeme stotožňovať zobrazenia (11.1) a (11.2).

Konečne, ak $x \in \mathbb{J}$, tak má celú časť $a_0 = 0$, teda $x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. Dohodneme sa preto, že si zápisy zjednodušíme a budeme písať len $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ (nie je tam teda bodkočiarka a koeficient $a_0 = 0$ pred ňou).

Prečo hovoríme o Gaussovom zobrazení? Lebo súvisí s reťazovými zlomkami. Vysvetlíme tento súvis. Ak $x \in \mathbb{J}$, tak máme

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n(x) + \cfrac{1}{\cdots}}}}} = [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots]. \tag{11.3}$$

Pritom algoritmus na výpočet čísel $a_k(x)$ bol nasledujúci (pripomeňme, že $a_0 = \lfloor x \rfloor = 0$):

- $a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Označme

$$x_1 = \text{necelá časť } \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = T(x),$$

potom máme ekvivalentné vyjadrenia (porovnávajte s (11.3), aby ste videli, ktorá časť reťazového zlomku predstavuje x_1)

$$\frac{1}{x} = a_1(x) + x_1, \qquad x = \frac{1}{a_1(x) + x_1}$$

- $a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor$. Označme

$$x_2 = \text{necelá časť } \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1} - \left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor = T(x_1) = T^2(x),$$

potom máme ekvivalentné vyjadrenia

$$\frac{1}{x_1} = a_2(x) + x_2, \qquad x_1 = \frac{1}{a_2(x) + x_2}.$$

...

- $a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{x_{n-1}} \right\rfloor$. Označme

$$x_n = \text{necelá časť } \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n-1}} - \left\lfloor \frac{1}{x_{n-1}} \right\rfloor = T(x_{n-1}) = T^n(x),$$

potom máme ekvivalentné vyjadrenia

$$\frac{1}{x_{n-1}} = a_n(x) + x_n, \qquad x_{n-1} = \frac{1}{a_n(x) + x_n}.$$

...

Vidíme teda, že Gaussovo zobrazenie naozaj veľmi úzko súvisí s reťazovými zlomkami. Podstatné je všimnúť si, že

$$x = [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots] \Longrightarrow T(x) = [a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots].$$

To však znamená, že

$$\begin{aligned} x = [a_1(x), & a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots] \\ & \Longleftrightarrow a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \ a_2(x) = a_1(T(x)), \ a_3(x) = a_1(T^2(x)), \ldots. \end{aligned}$$

Odtiaľ máme

$$\begin{aligned} x = [a_1(x), & a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots] \\ & \Longleftrightarrow a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \ a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor, \ a_3(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^2(x)} \right\rfloor, \ldots. \end{aligned}$$

Podstatné je si teraz všimnúť, v ktorých bodoch $z \in (0,1]$ (stačilo by nám skúmať $z \in \mathbb{J}$, pozri diskusiu na začiatku tejto subsekcie) je $\left\lfloor \frac{1}{z} \right\rfloor = 1$, v ktorých bodoch je $\left\lfloor \frac{1}{z} \right\rfloor = 2$, atď (nula to samozrejme nikdy nie je, možné hodnoty sú len prirodzené čísla). Ľahko sa dá overiť, že rôzne hodnoty $\left\lfloor \frac{1}{z} \right\rfloor$ zodpovedajú intervalom $I_1, I_2, \ldots$, na ktorých sú definované jednotlivé vetvy $T_1, T_2, \ldots$ Gaussovho zobrazenia, pozri Obr. 4.5. Túto závislosť ukazuje nasledujúca tabuľka:

$z \in$	...	$I_k = (1/(k+1), 1/k]$	...	$I_3 = (1/4, 1/3]$	$I_2 = (1/3, 1/2]$	$I_1 = (1/2, 1]$
$\lfloor 1/z \rfloor =$	...	k	...	3	2	1

Tabuľku môžeme zhrnúť takto:

$$\left\lfloor \frac{1}{z} \right\rfloor = \text{poradové číslo intervalu } I_k, \text{ v ktorom sa } z \text{ nachádza.}$$

Prišli sme tak k pozoruhodnému záveru. Ak zvolíme $x \in \mathbb{J}$, tak jeho rozvoj do reťazového zlomku

$$x = [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots]$$

sa dá určiť tak, že sa pozrieme na trajektóriu bodu x vzhľadom na Gaussovo zobrazenie T (ide o trajektóriu v dynamickom systéme $(\mathbb{J}, T)$) a zapíšeme si, ktoré intervaly postupne bod x navštevoval:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \text{poradové číslo intervalu } I_k, \text{ v ktorom je } x, \\ a_2(x) &= \text{poradové číslo intervalu } I_k, \text{ v ktorom je } T(x), \\ a_3(x) &= \text{poradové číslo intervalu } I_k, \text{ v ktorom je } T^2(x), \\ &\ldots. \end{aligned}$$

11.2.3 Aplikácia: Vlastnosti reťazových zlomkov

Z Príkladov 4.16 a 4.25 vieme, že Gaussovo zobrazenie zachováva Gaussovu pravdepodobnostnú mieru

$$\mu(B) = \frac{1}{\log 2} \int_B \frac{1}{1+x}\, dx, \qquad B \in \mathcal{L}_{[0,1]}$$

Ide o ergodickú mieru.

Veta 11.5. *Gaussova miera je pre Gaussovo zobrazenie (pravdepodobnostná, invariantná a) ergodická.*

Dôkaz ergodičnosti je komplikovaný, nebudeme ho robiť, ale vetu využijeme na získanie zaujímavých faktov o reťazových zlomkoch.

Veta 11.6. *Pre čísla $x \in [0,1]$ (prísne vzaté, pre iracionálne x) uvažujme o ich reťazových zlomkoch*

$$x = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots].$$

Pre skoro každé $x \in [0,1]$ v zmysle Lebesguovej miery Leb *(ekvivalentne, pre skoro každé x v zmysle Gaussovej miery μ) sa prirodzené číslo k objavuje v postupnosti*

$$a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots$$

s (kladnou) frekvenciou

$$\mathrm{frekv}_{(k)}(x) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

Dôkaz. Ako sme už vysvetlili na začiatku Subsekcie 11.2.3, môžeme ignorovať racionálne čísla a pracovať s dynamickým systémom $(\mathbb{J}, T)$. Máme v ňom aj Gaussovu mieru, ktorá je pravdepodobnostná, invariantná a podľa vety 11.5 ergodická pre T. Sú splnené predpoklady Birkhoffovej ergodickej vety. Môžeme ju preto použiť, ako aj jej dôsledky, ktoré sme už odvodili.

Podľa záveru Subsekcie 11.2.3 platí, že hľadaná frekvencia nie je nič iné ako frekvencia, s akou bod x v našom dynamickom systéme navštevuje interval $I_k = (1/(k+1), 1/k]$. Teda

$$\mathrm{frekv}_{(k)}(x) = \mathrm{frekv}_{I_k}(x).$$

Keďže sme v ergodickom systéme zachovávajúcom konečnú Gaussovu mieru μ, podľa Vety 10.1(3) μ-skoro každý bod navštevuje μ-merateľnú množinu I_k so správnou frekvenciou, t.j.

$$\mathrm{frekv}_{I_k}(x) = \frac{\mu(I_k)}{\mu(\mathbb{J})} \qquad \text{pre } \mu\text{-skoro každý bod } x \in \mathbb{J}.$$

Keďže $\mu \sim$ Leb a pri každej z týchto mier má $\mathbb{J}$ plnú (teda jednotkovú) mieru v $[0,1]$, znamená to, že

$$\mathrm{frekv}_{(k)}(x) = \mathrm{frekv}_{I_k}(x) = \frac{\mu(I_k)}{\mu(\mathbb{J})} \qquad \text{pre Leb-skoro každý bod } x \in \mathbb{J}. \tag{11.4}$$

Platí $\mu(\mathbb{J}) = \mu([0,1]) = 1$ a

$$\begin{aligned}\mu(I_k) &= \frac{1}{\log 2} \int_{I_k} \frac{1}{1+x}\, dx = \frac{1}{\log 2} \left[\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.\end{aligned}$$

Po dosadení do (11.4) dostaneme požadovaný výsledok. □

11.3 Cvičenia a projekty

Cvičenie 11.1. Dokážte tvrdenia z Poznámky 11.4.

Projekt 11.2. Rozviňte úvahy o normálnych číslach tak, že si namiesto frekvencie cifier budete všímať frekvencie konečných blokov cifier.

Literatúra

[BoI] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. I*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[BoII] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. II*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[C13] D. L. Cohn, *Measure theory. Second edition*, Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

[Dav71] R. O. Davies, *Measures not approximable or not specifiable by means of balls*, Mathematika **18** (1971), 157–160.

[Fr82] A. Friedman, *Foundations of modern analysis*, Reprint of the 1970 original. Dover Publications, Inc., New York, 1982.

[KMS16] M. Kesseböhmer, S. Munday, B. O. Stratmann, *Infinite ergodic theory of numbers*, De Gruyter, Berlin, 2016.

[KN74] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience, New York-London-Sydney, 1974.

[Mi16] M. Mihoková, *Rovnomerne rozdelené postupnosti*, Bc práca, FPV UMB 2016.

[Sch05] R. L. Schilling, *Measures, integrals and martingales. Second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[SS99] B. Sivák, Ľ. Snoha, *Matematická analýza II*, skriptá, Univerzita Mateja Bela, 1999.

[VO16] M. Viana, K. Oliveira, *Foundations of ergodic theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[Wa82] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, 79, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Yeh14] J. Yeh, *Real analysis. Theory of measure and integration*, 3rd edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014.