Metódy riešenia matematických úloh

Verzia z 21. marca 2023

Ľubomír Snoha

Obsah

Predhovor

Toto je záznam cvičení z letného semestra 2021/22 a zimného semestra 2022/23.

Banská Bystrica, 2022 Ľubomír Snoha

Kapitola 1

Matematické úlohy a ich riešenia

Ak som videl ďalej, bolo to preto, že som stál na pleciach obrov.

— Isaac Newton

… Vzdelávacie inštitúcie – nielen u nás, ale aj v mnohých krajinách vrátane Švédska – stratili autoritu a vážnosť, lebo v posledných rokoch sa až príliš začali venovať hľadaniu možností, ako robiť veci tak, nech tie detičky netrpia, nedostávajú informácie, ktoré by ich mohli rozrušiť, či nie sú v súlade s niektorým aspektom ich citlivej duše a ešte viac citlivej duše ich nahnevanej matky a agresívneho otca.
Školstvo je aj vo Švédsku, ako priznáva Wikforssová, v katastrofálnej situácii. Ani nie tak preto, že by prestarnutý učiteľský kolektív technologicky nezvládal svet digitálnych domorodcov, teda súčasných "smart" detí. Najväčší problém je, že snaha o prehnane politicky korektné a individualizované učenie cez rôzne projekty (konštruktivistická pedagogika – poznanie je konštrukt a učenie sa nemá prenášať z učiteľa na žiaka, ale pedagóg má viesť žiaka pri vlastnom získavaní poznania) vedie k samotnému popretiu princípu školy ako inštitúcie. Aj keď tézy o tom, ako má fungovať spolupráca učiteľ – študent, aké tvorivé má byť vyučovanie, ako treba podporovať individuálne záujmy, znejú dobre ako projektové náplne pre žiadosti o granty a fondy, výsledkom je, že úroveň poznania a kritického myslenia u žiakov rapídne klesá. Ako hovorí Isaac Newton, stojíme na pleciach svojich predchodcov. A ak sa o nich žiaci nedozvedia, pretože nedostanú základný súbor faktov, na ktorých stojí spoločnosť, jednoducho zablúdia. Ak majú robiť deti výskumné práce a nemajú základy metodológie a hlboké znalosti faktov, tak tie práce skončia ako kompilát z internetu (v čom je väčšina študentov zdatnejšia ako ich učitelia), alebo ako znôška informácií, ktoré študent obháji slovami – ja to tak vidím.

— Martin Kasarda: Pravda nie je nikdy jedna (recenzia na knihu Asa Wikforss: Alternatívne fakty), Magazín o knihách, September 2021, strana 4

V tejto kapitole sa pridŕžame knihy [FT], v časti 1.3 použijeme [La].

1.1 Matematické úlohy

Moje ideály, ktoré mi vždy žiarili na cestu a znova a znova ma napĺňali radostnou odvahou žiť, boli láskavosť, krása a pravda ... Prázdne ciele ľudského úsilia – majetok, povrchný úspech, prepych – sa mi vždy videli opovrhnutiahodné.

— Albert Einstein

Verte tým, ktorí hľadajú pravdu. Pochybujte o tých, ktorí ju našli.

— André Gide

1.1.1 Matematická úloha a jej analýza

Pravda sa nestáva pravdivejšou tým, že s ňou súhlasí celý svet, ani menej pravdivou, keď s ňou celý svet nesúhlasí.

— Maimonides

Matematická úloha je požiadavka alebo otázka, na ktorú treba nájsť odpoveď, využívajúc to, čo je zadané v úlohe. Ak chceme *vyriešiť úlohu*, teda nájsť požadovanú odpoveď, potrebujeme najskôr *analyzovať úlohu*, teda ujasniť si *podmienky úlohy* (to,čo je dané) a *požiadavky úlohy* (to, čo máme nájsť, určiť, na aké otázky máme uviesť odpovede). Potrebná hĺbka tejto analýzy závisí najmä od toho, či je nám známy *typ úloh*, ku akým patrí daná úloha. Ak áno, postačí jednoduchšia analýza a ak nie, potrebujeme hlbšiu analýzu. Umenie analyzovať matematickú úlohu, preniknúť do jej podstaty, to je to hlavné v akomkoľvek kurze riešenia matematických úloh. Tu je vhodné pripomenúť si výrok:

> Ak sa chcete naučiť plávať, smelo vojdite do vody. Ak sa chcete naučiť riešiť úlohy, riešte ich! (G. Polya)

Podmienky úlohy, teda to čo je dané, to sú nejaké *objekty* (jeden alebo viac) a nejaké ich *charakteristiky*. Požiadavka úlohy spočíva v tom, nájsť ešte nejakú (neznámu) charakteristiku nejakých objektov.

Možno sa pýtať, či je vôbec potrebná analýza úlohy. Veď keď v škole riešime úlohu (napr. hľadáme korene kvadratickej rovnice), obvykle sa nám nezdá, že by sme vôbec nejakú analýzu robili (napr. použijeme vzorec pre korene kvadratickej rovnice). To sa nám však len zdá, lebo sme napr. zvyknutý na typ úlohy a vieme ako postupovať — v skutočnosti však aj tak tú analýzu vykonávame, no napr. len ústne, počas chodu riešenia úlohy, len si to neuvedomujeme (musíme si predsa ujasniť, že ide o kvadratickú rovnicu a aké má koeficienty). *Bez analýzy úlohy nie je možné úlohu vyriešiť!* To sa stáva zrejmým, ak stojíme pred nejakou zložitou úlohou takého typu, s akým sme sa ešte nestretli.

1.1.2 Schematický zápis úlohy

Každá pravda má dve strany; je dobré pozrieť sa na obe, skôr než sa k jednej z nich prikloníme.

— Ezop

Výsledky našej analýzy úlohy je často vhodné nejako zafixovať, zapísať. Kvôli prehľadnosti, aby sme sa neutopili v záplave slov, je najvhodnejšou formou *schematický zápis úlohy*. Takýto zápis nie je potrebný napr. u úloh typu "riešte rovnicu", či iných úloh zapísaných symbolickým jazykom, lebo vtedy napr. stačí analýzu úlohy vykonávať ústne, počas chodu riešenia a nie je nutné ju zapisovať. Avšak napr. pri slovných úlohách či rôznych geometrických úlohách sa bez schematického zápisu neobídeme.

Pri schematickom zápise:

- Používame rôzne označenia, symboly, obrázky.
- Jasne vyznačíme všetky podmienky a požiadavky úlohy, pričom v zápise každej podmienky uvedieme príslušné objekty a ich charakteristiky.
- Uvádzame len to, čo je nevyhnutné pre riešenie úlohy, všetky ostatné podrobnosti vynechávame.

Pri schematickom zápise geometrických ale aj niektorých iných úloh je užitočné využívať *obrázky, náčrty* tých útvarov, o ktorých sa uvažuje v úlohe. Je pritom dobré dodržiavať niektoré zásady:

- Náčrt má predstavovať schematický obrázok hlavného objektu úlohy (geometrického útvaru, súboru útvarov, alebo nejakých častí týchto útvarov) s označeniami (pomocou písmen a iných znakov) elementov útvaru a ich charakteristík. Tieto označenia preberáme z textu úlohy a ak v texte úlohy uvedené nie sú, tak použijeme obvykle používané označenia alebo si nejaké vhodné označenia vymyslíme.
- Náčrt musí zodpovedať úlohe. Ak je napr. v úlohe základným objektom trojuholník a nie je uvedený jeho typ (pravouhlý, rovnostranný, ...), tak treba načrtnúť nejaký rôznostranný trojuholník.
- Náčrt by mal mať rozumnú mierku a mal by dodržiavať proporcie. Ak napr. je strana AB trojuholníka ABC podľa podmienok úlohy najväčšia, tak to treba zohľadniť aj na náčrte. Ak sa v úlohe hovorí o ťažnici, tak príslušná úsečka na náčrte má naozaj spájať vrchol trojuholníka približne so stredom protiľahlej strany trojuholníka. Tiež treba dodržiavať také charakteristiky ako rovnobežnosť, kolmosť apod.
- Pri náčrte priestorových útvarov treba dodržiavať príslušné pravidlá kreslenia takých útvarov. Okrem toho, či namiesto toho, je niekedy účelné črtať niektoré rovinné rezy takých útvarov.

Okrem náčrtu sa pri schematickom zápise geometrických a niektorých iných úloh používa ešte krátky zápis všetkých podmienok a požiadaviek úlohy. V nich sa, využívajúc označenia z náčrtu, zapisujú všetky charakteristiky a vzťahy z podmienok úlohy. Je vhodná úspornosť založená na definíciách útvarov, napr. namiesto slovnej informácie, že $ABCD$ je lichobežník, zapíšeme $AB \parallel CD$. V krátkom zápise možno používať štandardné matematické znaky ako napr. $A \in p$ (bod A patrí priamke p), $p = \pi \cap \varrho$ (priamka p je prienikom rovín π a ϱ) apod.

1.1.3 Praktické a matematické úlohy

Čím viac sa spoločnosť vzďaľuje od pravdy, tým viac bude nenávidieť tých, ktorí ju vyslovujú.
— George Orwell

V časoch klamstva je hovorenie pravdy revolučným činom.
— George Orwell

Úlohy sa v zásade delia do dvoch skupín. Ak aspoň jeden objekt vystupujúci v úlohe je reálny predmet (dom, traktor, pole, lano, chemická zlúčenina, kolónia baktérií, ...), hovoríme o *praktickej úlohe* alebo o slovnej úlohe. Ak všetky objekty v úlohe sú matematické (čísla, funkcie, geometrické útvary, ...), hovoríme o matematickej úlohe.

Poznamenajme, že v školskej matematike sa riešia len také praktické úlohy, ktoré sa dajú previesť na matematické úlohy.

1.2 Podstata a štruktúra riešenia matematických úloh

Všetko, čo počujeme, je názor, nie fakt. Všetko, čo vidíme, je pohľad na vec, nie pravda.
—Marcus Aurelius

Riešiť matematickú úlohu znamená nájsť takú postupnosť všeobecných matematických ustanovení (definícií, axióm, viet, pravidiel, zákonov, formúl), ktorých použitím na podmienky úlohy alebo na ich dôsledky (čiastočné výsledky riešenia) dostávame to, čo sa žiada v úlohe – odpoveď na úlohu.

Vo všeobecnosti možno proces riešenia úlohy rozdeliť na etapy. Obvykle sú to nasledujúce etapy, prípadne len niektoré z nich:

1. Analýza úlohy (pozri časť 1.1.1).

2. Schematický zápis úlohy (pozri časť 1.1.2).

3. Hľadanie spôsobu riešenia úlohy.

4. Samotné riešenie úlohy.

5. Skúška správnosti riešenia úlohy.

6. Diskusia úlohy (kedy má úloha riešenie, koľko existuje riešení).

7. Formulovanie odpovede na úlohu.

8. Analýza riešenia úlohy (skúmame, či neexistuje šikovnejšie alebo aspoň iné riešenie, či nemožno úlohu zovšeobecniť, či z riešenia úlohy nevyplývajú nejaké dôsledky).

1.3 Hľadanie plánu riešenia matematických úloh. Heuristika

Chyba neprestáva byť chybou, len preto, lebo ju názorovo zdieľa väčšina.

—Lev Nikolajevič Tolstoj

Pravda sa nesmie zamieňať s názorom väčšiny.

—Jean Cocteau

Hľadanie plánu (spôsobu) riešenia je centrálna časť celého procesu riešenia — pomocou analýzy úlohy a jej schematického zápisu chceme nájsť *ideu riešenia*. Samotné riešenie úlohy je potom už záležitosťou technického umenia, "remesla", ktorému sme sa naučili v kurze matematiky.

Neexistuje všeobecný recept na to, ako ako hľadať plán riešenia, preto to ani nemožno nikoho naučiť. Človek sa tomu môže len sám naučiť, prostredníctvom samostatného riešenia úloh a štúdiom riešení úloh, ktoré vyriešili iní.

Asi prvá vec, ktorú si treba ujasniť, je to, akého typu je daná úloha, pričom najčastejšími sú nasledujúce tri typy úloh.

1. Úlohy na nájdenie niečoho (veličiny, hodnoty funkcie, neznámej v rovnici, nejakej vlastnosti funkcie, veľkosti uhla, obsahu útvaru, objemu telesa apod.); takéto úlohy sa nazývajú určovacie.

2. Úlohy na dôkaz či objasnenie (úlohy typu "dokážte", "overte", či úlohy obsahujúce otázku "prečo ...?"); takéto úlohy sa nazývajú dôkazové.

3. Úlohy, v ktorých treba niečo upraviť alebo skonštruovať (úlohy, v ktorých treba upraviť nejaký výraz, zjednodušiť ho, vyjadriť v inom tvare, úlohy, v ktorých treba skonštruovať nejaký geometrický útvar apod.); úlohy na skonštruovanie sa v geometrii nazývajú konštrukčné úlohy.

Pri tzv. *štandardných* úlohách poznáme spôsob ich riešenia z kurzu matematiky. Horšie je to s tzv. *neštandardnými* úlohami, u ktorých neexistujú všeobecné pravidlá, ako ich riešiť.[1] Vo všeobecnosti však možno povedať, že *riešiť úlohu znamená previesť ju na úlohu, akú už vieme riešiť*. To sa ľahko povie, ťažšie zrealizuje. Ukazuje sa však, že proces riešenia neštandardnej úlohy spočíva v postupnej aplikácii dvoch základných operácií:

1. prevedenie neštandardnej úlohy (nejakou transformáciou alebo preformulovaním) na úlohu s ňou ekvivalentnú, ktorá je už štandardná.

   Zvykne sa v tejto súvislosti hovoriť, že riešiť úlohu znamená previesť ju na takú úlohu, ktorú už vieme riešiť (už sme podobnú úlohu kedysi riešili).

2. rozdelenie neštandardnej úlohy na niekoľko štandardných podúloh.

Hoci neexistujú všeobecné pravidlá na riešenie neštandardných úloh (veď kvôli tomu ich tak nazývame) ani neexistujú presné pravidlá ako ich previesť na jednu či viac štandardných úloh, mnohí vynikajúci matematici a učitelia našli rad všeobecných návodov, odporúčaní, ktoré možno uplatniť pri riešení neštandardných úloh. Tieto návody sa obvykle nazývajú *heuristické pravidlá* alebo krátko *heuristiky*, pozrite [La], [EF], [Vr]. Ich použitie môže (ale aj nemusí) viesť k riešeniu úlohy. Existuje množstvo heuristických postupov. Uvedieme tu tie, ktoré sa uvádzajú v [La].

[1] Samozrejme, to, čo je pre niekoho neštandardná úloha, môže byť pre vzdelanejšieho či skúsenejšieho riešiteľa štandardná úloha.

1. **Hľadanie zákonitostí.**

   Analýzu problému začíname tým, že sa snažíme získať o ňom nejakú predstavu, utvrdiť sa v tom, že výsledok môže byť správny. Najlepšie to možno spraviť tak, že preskúmame najjednoduchšie špeciálne prípady. Ak to robíme systematicky, môžu sa objaviť zákonitosti, ktoré nás vedú k nápadu, ako problém riešiť.

2. **Kreslenie obrázkov.**

   Tam, kde je to možné, problém znázorníme graficky pomocou obrázka, diagramu alebo grafu. Údaje znázornené diagramom si ľahšie zapamätáme a ľahšie si všimneme všetky vzťahy a závislosti.

3. **Formulovanie ekvivalentných problémov.**

   Snažíme sa preformulovať problém do ekvivalentného ale jednoduchšieho tvaru. Vyžaduje si to predstavivosť a tvorivosť. Niektoré štandardné techniky používajú algebraické alebo trigonometrické úpravy, dosadzovanie alebo zmenu premenných, jednojednoznačné zobrazenie a novú interpretáciu v jazyku inej oblasti matematiky (algebry, geometrie, matematickej analźyzy, kombinatoriky apod.)

4. **Modifikácia problému.**

   Práca nad problémom A môže viesť ku skú maniu problému B. Pre túto zmenu problémov je charakteristické, že býva signalizovaná takými frázami ako "stačí ukázať, že ..." alebo "môžeem predpokladať, že ..." alebo "bez ujmy na všeobecnosti ...". V predchádzajúcom heuristickom princípe išlo o prípad, keď problémy A a B boli ekvivalentné. Tentoraz ide o prípad, keď vyriešenie modifikovaného (alebo pomocného) problému B nám dá riešenie pôvodného problému A (nie nevyhnutene obrátene).

5. **Výber efektívneho označenia.**

   Jedným z prvých krokov pri práci na nejakom matematickom probléme je preklad problému do reči matematických symbolov. Na začiatku treba rozlíšiť a označiť všetky kľúčové pojmy; nadbytočnosť v označení môžeme odstrániť po odhalení súvislostí.

6. **Využitie symetrie.**

   Prítomnosť symetrie v skúmanom probléme obyčajne umožňuje zmenšiť celkové množstvo práce potrebné na jeho vyriešenie. Všimnime si napr. súčin $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. Pretože každý z dvoch činiteľov je symetrický vzhľadom na a, b, c (výraz sa nezmení, ak medzi sebou zameníme ktorékoľvek dve z jeho premenných), platí to isté aj o súčine. To znamená, že keď sa v súčine vyskytne a^3, musí sa tam objaviť aj b^3 a c^3. Podobne, ak bude v súčine a^2b, budú v ňom aj členy a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b a pritom všetky s rovnakým koeficientom atď. Potom už nie je ťažké dokázať, že súčin má tvar

   $$A(a^2+b^2+c^2)+B(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+Cabc$$

   a skontrolovať, že $A=1$, $B=0$ a $C=-3$.

   Prítomnosť symetrie v probléme tiež sprehľadňuje situáciu a často umožňuje odhaliť také súvislosti, ktoré by sa ťažšie hľadali inými spôsobmni. Napríklad symetria napovedá, že maximum výrazu xy s podmienkou $x+y=1$ pre $x>0$, $y>0$ nastáva pre $x=y=1/2$ (premenné x a y sú viazané symetrickými vzťahmi). Využívame tu *princíp nedostatočného* *dôvodu*, ktorý možno stručne sformulovať takto: *"Kde nie je dostatočný dôvod na rozlíšenie, tam nemôže byť žiadny rozdiel."* Niet nijakého dôvodu očakávať, že maximum nastane, ak x bude rôzne od $1/2$, t.j. ak bude bližšie k 0 alebo 1. Overíme to: nech $x = 1/2 + e$. Potom $y = 1/2 - e$ a

$$xy = \left(\frac{1}{2} + e\right)\left(\frac{1}{2} - e\right) = \frac{1}{4} - e^2.$$

Teraz je zrejmé, že maximum (rovnajúce sa $1/4$) nastáva pre $e = 0$, teda pre $x = y = 1/2$.

7. **Rozdelenie problému na viaceré špeciálne prípady.**

   Často sa stáva, že problém možno rozdeliť na malý počet podproblémov a každý z nich riešiť osobitne spôsobom, ktorý sa od prípadu k prípadu mení. Platí to najmä vtedy, keď v probléme vystupuje všeobecný kvantifikátor ("pre všetky ..."). Napríklad dôkaz tvrdenia tvaru "pre všetky celé čísla ..." môžeme vykonať osobitne pre párne a osobitne pre nepárne čísla. Podobne nejaké tvrdenie o trojuholníkoch by sa mohlo dokazovať tak, že ho rozdelíme na tri prípady v závislosti od toho, či je trojuholník ostrouhlý, pravouhlý alebo tupouhlý. Niekedy môžeme podprípady hierarchicky zoradiť takým spôsobom, že prvý prípad, ak už je dokázaný, sa dá využiť pri ďalších prípadoch. Tento postup nazývame *pyramída*.

   Teda v začiatočnom štádiu analýzy problému je dobré rozmysliet si, ako by sa dal problém rozdeliť na malý počet (dúfajme) jednoduchších podproblémov. Táto heuristika sa dá zhrnúť aj takto: *"Ak sa nedarí problém vyriešiť, treba nájsť podobný ale jednoduchší problém a ten riešiť."*

8. **Spätný postup.**

   Spätný postup znamená, že predpokladáme platnosť toho, čo treba dokázať a snažíme sa z toho pomocou ekvivalentných úprav odvodiť niečo, čo už poznáme alebo čo možno ľahko dokázať. Ak prídeme k tomu, čo poznáme, alebo čo bolo dané, obrátime smer úvah a postupujeme zasa dopredu smerom k záveru (tvrdeniu, ktoré treba dokázať).

   Tento postup je bežný v stredoškolskej algebre a trigonometrii. Ak máme napríklad nájsť všetky reálne čísla, pre ktoré platí $2x+3 = 7$, postupujeme takto: Predpokladáme, že x spĺňa rovnicu $2x + 3 = 7$. Ak od obidvoch strán odpočítame 3 a obidve strany vydelíme číslom 2, dostaneme $x = 2$. Pretože každý krok v tomto postupe možno obrátiť (použili sme len ekvivalentné úpravy), vyplýva z toho, že 2 naozaj spĺňa rovnicu $2x + 3 = 7$, a že je to jej jediné riešenie.

9. **Nepriamy postup.**

   Pri nepriamom postupe predpokladáme, že tvrdenie neplatí a z toho odvodzujeme ďalšie závery, až kým neprídeme k niečomu, čo je v spore alebo s predpokladmi (nepriamy dôkaz) alebo s niečím, o čom sa vie, že platí (reductio ad absurdum). Ak chceme napríklad dokázať, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo, smieme predpokladať, že je racionálne a na tomto základe odvodiť spor.

   Táto metóda býva vhodná najmä vtedy, keď tvrdenie možno ľahko negovať, keď predpoklady dávajú veľmi málo možností na úpravy, alebo keď nemáme žiadnu predstavu o tom, ako postupovať.

10. **Využitie parity.**

Jednoduchá myšlienka parity – párne a nepárne – je silný nástroj na riešenie problémov so širokou škálou aplikácií. Namiesto “párne a nepárne” môžeme mať iné dve vylučujúce sa možnosti (pokrývajúce všetky možnosti), napr. “biele a čierne” (napr. pri úlohách na šachovnici).

Parita celého čísla hovorí, v akom vzťahu je toto číslo k číslu 2. Konkrétnejšie, číslo je párne alebo nepárne podľa toho, či jeho zvyšok po delení číslom 2 je nula lebo jedna. Ak takto formulujeme pojem parity, je prirodzené zovšeobecniť ho nasledujúcim spôsobom.

Dané je prirodzené číslo $n \geq 2$. Všetky celé čísla rozdelíme do zvyškových tried (alebo tried “kongruencie”) podľa toho, aký majú zvyšok po delení číslom n.

11. **Skúmanie extrémnych prípadov.**

    Keď začíname skúmať nejaký problém, býva často užitočné zistiť, čo sa stane, keď sa parametre problému menia od jednej krajnej hodnoty po druhú. Existencia extrémnych bodov je často kľúčom k pochopeniu existenčných výsledkov (týka sa to problémov typu: “Dokážte, že existuje x, pre ktoré platí $P(x)$”).

12. **Zovšeobecnenie.**

    Možno to znie paradoxne, ale často sa stáva, že problém možno zjednodušiť a spraviť ho zrozumiteľnejším a ľahšie spracovateľným, ak ho zovšeobecníme. Túto skúsenosť veľmi oceňujú matematici; abstrahovanie a zovšeobecňovanie je v skutočnosti základná charakteristika modernej matematiky. Všeobecnejší prístup umožňuje širšiu perspektívu, umožňuje zbaviť sa nepodstatných podrobností a poskytuje celkom nové techniky. Napr. ak máme vypočítať súčet $\sum_{k=1}^{n} k^2/2^k$, je výhodné počítať všeobecnejší súčet $S(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k$ a potom vypočítame $S(1/2)$.

1.4 Čo robiť, keď sa nedarí vyriešiť úlohu

Keď sa stretneme s neštandardnou úlohou, pri ktorej žiadne známe rady akosi nepomáhajú ani žiaden z heuristických princípov, s ktorými sme sa stretli nedokážeme využiť, znovu vyvstáva otázka, ako teda hľadať riešenie úlohy. Popri nápadoch typu “hľadajte v literatúre a na internete, či tam nenájdete túto alebo podobnú úlohu” je tu ešte nasledujúca rada.

Vyzbrojte sa trpezlivosťou a postupujte analogicky ako keď sa hľadá myš v kope kameňov. Môžete z kopy kameňov postupne odoberať jeden kameň za druhým, ažkým sa neukáže myš. Potom sa stačí na ňu vrhnúť a chytiť ju. Iná možnosť je chodiť a chodiť dookola kopy kameňov a pozorne sa pozerať, či niekde nezbadáte vytŕčať myší chvost. V takom prípade zaň vytiahnite myš.

Často hľadanie riešenia matematickej úlohy pripomína túto operáciu hľadania myši v kope kameňov. Chodíme okolo úlohy, pozeráme z rôznych strán, obhrýzame ju, riešime nejaké čiastočky úlohy, vymyslíme si podobnú, ale jednoduchšiu úlohu a najskôr riešime túto úlohu, ... V procese hľadania riešenia býva užitočné pamätať na nasledujúce odporúčania.

1. Ak sa v úlohe nachádzajú alebo z nej možno vytvoriť také časti, ktoré predstavujú ľahšie riešiteľné samostatné úlohy, treba ich vyčleniť ako podúlohy, vyriešiť ich a potom sa vrátiť k pôvodnej úlohe, prípadne v preformulovanom tvare (s ohľadom na spomínané podúlohy). Spravidla sa potom riešenie pôvodnej úlohy už dá ľahšie nájsť.

2. Väčšinou, aj keď nie vždy, sú všetky podmienky v úlohe potrebné na jej vyriešenie, preto si treba všímať, či ste už každú z nich využili.

3. Nešetrite sily a čas na analýzu úlohy. Medzi úlohamni, ktoré ste už v minulosti vyriešili hľadajte také úlohy, ktoré sa na danú úlohu aspoň v niečom podobajú. V riešeniach tých úloh hľadajte idey na riešenie danej úlohy.

4. Užitočné býva úlohu preformulovať, vytvoriť jej model. Napr. na to, aby sme vyriešili slovnú úlohu, vytvoríme sústavu rovníc, ktorá predstavuje model tejto úlohy. Uvedieme iný príklad. Majme nasledujúcu úlohu.

   Zbierka starých mincí je uložená v krabičkách, z ktorých každá má desať oddelení. V každom oddelení je jedna minca alebo tam minca nie je. Ukázalo sa, že pre každú možnosť máme práve jednu krabičku (od takej, kde je v každom oddelení minca až po takú, kde nie je vôbec žiadna minca). Koľko je krabičiek?

   Úlohu možno preformulovať a získať tak jej nasledujúci model.

   Koľko rôznych desaťciferných čísel možno vytvoriť z cifier 0 a 1? Pritom uvažujeme aj 'čísla' začínajúce nulou, ako 0111111111, 0010001110, či dokonca 0000000000. (Odpoveď: Zrejme $2^{10} = 1024$.)

1.5 Základné odporúčania pre hľadanie riešenia úlohy

Sformulujeme základné odporúčania pre hľadanie riešenia matematickej úlohy:

1. Prečítajte si (aj viackrát) úlohu a skúste určiť, k akému typu patrí.

2. Ak je to štandardná úloha, použite na jej riešenie známe všeobecné pravidlo, známy postup.

3. Ak je to neštandardná úloha, skúste niektoré z nasledujúcich postupov:

   (a) z úlohy vyčleňte alebvo ju rozdeľte na podúlohy štandardného typu (metóda rozdelenia);

   (b) zaveďte pomocné elementy: pomocné parametre, pomnocné konštrukcie (metóda pomocných elementov);

   (c) preformulujte úlohu, zameňte ju inou, rovnocennou úlohou (metóda modelovania).

4. Aby sa ľahšie použili uvedené metódy, je vhodné najskôr urobiť schematický zápis úlohy.

5. Pamätajte, že riešenie neštandardných úloh je umenie, ktorému sa možno naučiť len tréningom v riešení úloh čo najrozmanitejších druhov.

Riešenie úloh je druh tvorivej činnosti a hľadanie riešenia je objaviteľský proces.

Kapitola 2

Základné poznatky z logiky a teórie množín

Sudca: „Obžalovaný, urobili ste to alebo nie?"
Obžalovaný: „Nuž, pán sudca, to je tak: aj urobil, aj neurobil."
Sudca: „Nevykrúcajte sa. Na každú otázku sa dá odpovedať áno alebo nie."
Obžalovaný: „Nuž v takom prípade mi pán sudca odpovedzte na otázku, či ste už prestali brať úplatky. Áno alebo nie?"

—Slovenský rozhlas, 6.4.2003 *(citujeme po pamäti)*

Prvou obeťou vojny je pravda.

—Aischylos

Ak chceš byť skutočným hľadačom pravdy, je potrebné, aby si aspoň raz v živote čo najviac pochyboval o všetkých veciach.

— René Descartes

Logika je začiatkom múdrosti, nie jej koncom.

— Leonard Nimoy

Ak vylúčime všetko nemožné, to, čo zostane, nech by bolo akokoľvek nepravdepodobné, musí byť pravda.

— Sherlock Holmes

1. (Niečo medzi vtipom a logickou úlohou.) Žena posiela muža, matematika, do obchodu: "Choď kúpiť jednu klobásu. A ak budú mať vajíčka, kúp desať." Muž sa vrátil z obchodu s desiatimi klobásami. Otázka: Mali v obchode vajíčka?

2. Človek sa pozerá na obraz a hovorí: "Nemám súrodencov a predsa otec toho muža na obraze je syn môjho otca." Kto je na obraze?

3. Človek sa pozerá na obraz a hovorí: "Nemám súrodencov a predsa syn toho muža na obraze je syn môjho otca." Kto je na obraze?

4. V izbe je tma a v zásuvke bielizníka je 24 červených a 24 modrých ponožiek. Aspoň koľko ponožiek musím vybrať zo zásuvky, aby som mal istotu, že budem mať
   (a) aspoň dve ponožky rovnakej farby?
   (b) aspoň dve ponožky rôznych farieb?
5. V izbe je tma a v zásuvke bielizníka je 5 párov bielych, 10 párov čiernych a 15 párov hnedých ponožiek. Aspoň koľko ponožiek musím vybrať zo zásuvky, aby som mal istotu, že budem mať aspoň
   (a) 1 pár?
   (b) 1 pár bielych?
   (c) 2 páry?

   (Ponožky jednej farby sú rovnakej veľkosti. Dve ponožky jednej farby tvoria pár, nerozlišuje sa ľavá a pravá ponožka – u rukavíc by to bolo inak.)
6. (Paradox Kréťana. V skutočnosti to nie je paradox.) Kedysi dávno, v 6. storočí p.n.l., každý Kréťan bol buď pravdovravný alebo klamár. Pravdovravní vždy hovorili pravdu, klamári vždy hovorili nepravdu (klamali). Takí Kréťania, ktorí by niekedy hovorili pravdu a niekedy nepravdu, neexistovali. Jeden z Kréťanov, básnik Epimenides, prehlásil: *„Všetci Kréťania sú klamári!"*

   Otázky pre Vás: Bol Epimenides pravdovravný alebo klamár? A čo ostatní Kréťania?
7. Pri súdnom pojednávaní bolo zrejmé, že zločin spáchal niekto z kmeňa Bulu-Bulu. O príslušníkoch tohto kmeňa bolo známe, že buď sú pravdovravní (vždy hovoria pravdu) alebo sú klamári (vždy klamú). Obžalovaný povedal: "Ten, kto spáchal zločin, je klamár." Sudca dobre ovládal logiku, preto hneď vedel, či má obžalovaného poslať do väzenia alebo oslobodiť. Čo urobil sudca?
8. Každý domorodec na istom ostrove je buď pravdovravný (vždy hovorí pravdu) alebo klamár (vždy klame). Cestovateľ stretne na ostrove troch domorodcov A, B, C.

   Domorodec A povie: "Všetci traja sme klamári."

   Domorodec B povie: "Práve jeden z nás troch je pravdovravný."

   Čo sú A, B, C?
9. Na istom ostrove žijú dva kmene domorodcov veľmi podobných zovňajškom, ale úplne odlišných charakterov: kmeň pravdovravných (jeho príslušníci hovoria vždy pravdu) a kmeň klamárov (vždy klamú). Iní domorodci na ostrove nežijú.

   Cudzinec ide okolo troch domorodcov – A, B a C. Spýta sa domorodca A: „Ste klamár, alebo pravdovravný?" Domorodec A odpovie, ale nezreteľne, takže cudzinec nerozumie, čo povedal. Cudzinec sa potom spýta domorodca B: „Čo hovoril A?" B odpovie: „A povedal, že je klamár." V tej chvíli domorodec C povie: „Neverte B, ten klame!" Čo sa z toho dá tvrdiť o domorodcoch A, B, C?

10. (Einsteinova (?) hádanka, Carrollova (?) hádanka. Príklad logickej úlohy zvanej zebra.) Na ulici ide za sebou 5 domov v 5 rozdielnych farbách. V každom dome žije osoba rozdielnej národnosti. Týchto 5 obyvateľov má nápoj, cigarety a zviera, ktoré uprednostňuje. Nikto nepije, nefajčí ani nechová to čo ostatní. Poznáme 15 faktov:

    (F1) Angličan žije v červenom dome.
    (F2) Švéd chová psy.
    (F3) Dán pije čaj.
    (F4) Zelený dom je hneď naľavo od bieleho.
    (F5) Obyvateľ zeleného domu pije kávu.
    (F6) Ten, kto fajčí cigarety Pall Mall, chová vtáky.
    (F7) Obyvateľ žltého domu fajčí cigarety Dunhill.
    (F8) Ten, kto žije v prostrednom dome, pije mlieko.
    (F9) Nór žije v prvom dome.
    (F10) Ten, kto fajčí cigarety Blends, žije vedľa chovateľa mačiek.
    (F11) Ten, kto chová koňa žije vedľa toho, kto fajčí cigarety Dunhill.
    (F12) Ten, kto fajčí cigarety Blue Master, pije pivo.
    (F13) Nemec fajčí cigarety Prince.
    (F14) Nór žije vedľa modrého domu.
    (F15) Fajčiar cigariet Blends má suseda, ktorý pije vodu.

    Otázka: Kto chová ryby?

    (Návod: Postupne dopĺňajte tabuľku (vo vhodnom poradí využívajte fakty (F1)-(F15)):

Číslo domu	1	2	3	4	5
Farba domu					
Národnosť					
Nápoj					
Cigarety					
Zviera					

11. ([Po1, úloha 10, str. 9]) Na večierok bolo pozvaných 5 priateľov K, L, M, N, P. Ich odpovede na pozvanie možno zhrnúť do výrokov:

    (a) Príde K a príde L.
    (b) Príde L alebo príde M.
    (c) Ak príde M, tak príde aj N.
    (d) P príde práve vtedy, keď príde M.

    Kvôli nepriaznivému počasiu neprišiel nikto z nich. Rozhodnite, ktoré z výrokov (a) až (d) sú pravdivé. Ktorých z pozvaných nemožno odsudzovať za to, že neprišli?

12. ([Po1, úloha 26, str. 12, úloha 29, str. 13]) Vyjadrite negácie výrokov:

(a) Všetci žiaci našej triedy prospeli.

(b) Aspoň traja žiaci v našej triede majú vyznamenanie.

(c) Aspoň v jednej veci nie sú naše názory zhodné.

(d) Najviac štyri dni bude pršať.

(e) Napijem sa kávy alebo čaju.

(f) Nie som smädný ani hladný.

(g) Ak budú mať čerstvé ovocie, nekúpim kompót.

(h) Kúpim salámu práve vtedy, keď nebude šunka.

13. Znegujte:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \mathbb{R})(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

(Akú vlastnosť funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyjadruje pôvodný kvantifikovaný výrok?)

14. Zo 100 študentov sa učilo 30 nemčinu, 28 španielčinu, 42 francúzštinu, 8 španielčinu a nemčinu, 10 španielčinu a francúzštinu, 5 nemčinu a francúzštinu, 3 všetky tri jazyky.

(a) Koľko študentov neštudovalo nijaký z uvedených jazykov?

(b) Koľko študentov sa učilo len po francúzsky?

(c) Koľko študentov sa učilo po nemecky, ale nie súčasne po francúzsky?

15. Z 35 žiakov odoberá Matematický obzor 8 žiakov, Vedu a techniku 10 žiakov. 21 žiakov neodoberá ani jeden z týchto dvoch časopisov. Koľko z nich odoberá obidva časopisy?

16. Z 50 študentov riešilo aspoň jednu z dvoch olympiád (matematická MO a fyzikálna FO) 44 študentov. Matematickú neriešilo 19 študentov a 39 študentov riešilo práve jednu olympiádu. Koľko študentov riešilo a) MO, b) FO, c) obidve olympiády?

17. Zo 129 študentov chodí do jedálne pravidelne na obedy alebo na večere 116 študentov, 62 študentov nechodí na obedy alebo nechodí na večere. Pritom na obedy ich chodí o 47 viac ako na večere. Koľko z nich chodí na obedy aj večere, koľko len na obedy, koľko len na večere?

18. V triede navštevuje 27 žiakov nejaký krúžok. Tanečný krúžok navštevuje 14 žiakov, športový krúžok 21 žiakov a dramatický krúžok 16 žiakov. Tanečný a športový krúžok navštevuje 9 žiakov, tanečný a dramatický krúžok 6 žiakov, športový a dramatický krúžok 11 žiakov. Koľko žiakov navštevuje všetky tri krúžky?

19. (Medzinárodná matematická olympiáda 1966.) V matematickej súťaži boli dané tri úlohy A, B, C. Medzi účastníkmi bolo 25 žiakov, z ktorých každý vyriešil aspoň jednu úlohu. Zo všetkých účastníkov, ktorí nevyriešili úlohu A, bol počet tých, ktorí vyriešili úlohu B, dvojnásobkom počtu tých, ktorí vyriešili úlohu C. Počet žiakov, ktorí vyriešili len úlohu A, bol o 1 väčší než počet ostatných žiakov, ktorí vyriešili úlohu A. Zo všetkých žiakov, ktorí vyriešili jedinú úlohu, práve polovica nevyriešila úlohu A. Koľko žiakov vyriešilo len úlohu B?

Kapitola 3

Čísla

Čísla sú základom všetkého diania.

— Pytagoras

Matematika je kráľovnou všetkých vied, teória čísel je kráľovnou matematiky.

— Carl Friedrich Gauss

1. ([Po1, úloha 9, str. 38]) Prirodzené číslo 481 zapísané v desiatkovej sústave zapíšte v dvojkovej sústave.

   (Ako sa dá vysvetliť, o čo ide: My máme na rukách dokopy 10 prstov, preto vyjadrujeme čísla v desiatkovej sústave, pomocou mocnín 10. Napr. $481 = 481_{10}$ znamená 4 stovky, 8 desiatok, 1 jednotku. Ak Marťania majú na rukách dokopy 2 prsty (na každej z dvoch rúk jeden), je pre nich prirodzenejšia dvojková sústava. Počet, číslo, vyjadrujú pomocou jednotiek, dvojok, štvorák, osmičiek, šestnástok, ... Marťanovi dáme 481 cukríkov a vrecúška rôznych veľkostí: malé, do ktorých sa vojde len 1 cukrík, väčšie pre 2 cukríky, ešte väčšie pre 4 cukríky, potom pre 8 cukríkov, ďalej 16, 32, 64, 128, 256, 512 a ďalšie mocniny dvoch. Marťan má cukríky poukladať do vrecúšok tak, aby použil čo najmenší počet vrecúšok a aby každé použité vrecúško bolo plné. To tiež znamená, že z každej veľkosti použije len jedno alebo žiadne vrecúško, napr. dve štvorkové vrecúška naplnené cukríkami sa predsa dajú nahradiť jedným osmičkovým vrecúškom a tak použiť menej vrecúšok. Keď to Marťan urobí, bude vedieť vyjadrenie 481 v dvojkovej sústave. Dokončite.)

2. Sú nasledujúce čísla racionálne? Ak áno, zapíšte ich v tvare zlomku.
   (a) $0,\overline{12} = 0,121212\ldots$,
   (b) $1,9\overline{142857}$.

3. ([Po1, úloha 33, str. 40]) Sú čísla $n_1 = 1987$, $n_2 = 14\,147$ prvočísla alebo zložené čísla? Ak sú zložené, napíšte ich prvočíselný rozklad.

4. Bez vyčísľovania približných hodnôt zistite, ktoré číslo je väčšie:
   (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ alebo $\sqrt{11}$,
   (b) $5\sqrt{3} - 1$ alebo $2\sqrt{11} + 1$,

(c) $\sqrt[3]{21}$ alebo $2\sqrt{5} - \sqrt{7}$,

(d) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ alebo $\sqrt{6}$,

(e) $2\sqrt{8-\sqrt{15}}$ alebo $\sqrt{30} + \sqrt[3]{3}$.

(f) $\sqrt{2} + \sqrt{10+\sqrt{5}}$ alebo $2\sqrt{5}$.

5. Usmernite zlomok (t.j. odstráňte iracionalitu z menovateľa):

   (a) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,

   (b) $\frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$,

   (c) $\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

6. Nasledujúce čísla vyzerajú komplikovane, ale v skutočnosti sú to celé čísla. Dokážte to (vypočítajte ich):

   (a) $a = \sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

   Niekedy, keď chceme číslo x vyjadriť v krajšom tvare, si stačí uvedomiť, či je $x \geq 0$ alebo $x < 0$ a vypočítať x^2. Potom v prvom prípade je $x = \sqrt{x^2}$ a v druhom prípade $x = -\sqrt{x^2}$ (pamätajte, že $\sqrt{x^2} = |x|$; ak by namiesto umocňovania na druhú bolo vhodnejšie umocňovanie na tretiu, nebolo by treba ani skúmať znamienko čísla x, lebo vždy je $\sqrt[3]{x^3} = x$). Použite to v nasledujúcom príklade.

   (b) $b = \sqrt{|12\sqrt{5}-29|} - \sqrt{12\sqrt{5}+29}$.

7. (Formula dvojnej odmocniny.) Dokážte formulu dvojnej odmocniny:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

   ak $A > 0$, $B > 0$, $A^2 \geq B$ a znamienka sa berú buď horné alebo dolné (A, B sú tu *reálne* čísla, nie nutne celé).

8. Použite formulu dvojnej odmocniny a pozorujte, či dostanete jednoduchší zápis čísla alebo nie (tj. či sa zbavíte do seba vnorených odmocnín):

   (a) $\sqrt{7+\sqrt{6}}$,

   (b) $\sqrt{6-\sqrt{11}}$,

   (c) $\sqrt{12-2\sqrt{11}}$.

   Kedy sa $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ (pre *prirodzené* A, B, $A^2 \geq B$) dá zapísať bez odmocnín do seba vnorených?

   (d) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$ (formulu dvojnej odmocniny použite viackrát za sebou),

(e) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$ (čísla A, B vo formule dvojnej odmocniny nemusia byť celé).

Formulu dvojnej odmocniny si netreba pamätať, ale jej dôkaz nie je ťažký. Preto Vás v prípade potreby možno napadne, ako postupovať, ak chcete inak (v pekných prípadoch dokonca jednoduchšie, bez odmocnín do seba vnorených) zapísať číslo $x = \sqrt{A+\sqrt{B}}$ alebo $y = \sqrt{A-\sqrt{B}}$ alebo $x+y$ alebo $x-y$. Overte si to na nasledujúcej úlohe.

9. Zapíšte pomocou menšieho počtu odmocnín:
   (a) $\sqrt{52-30\sqrt{3}}$,
   (b) $\sqrt{57-40\sqrt{2}}$,
   (c) $\sqrt{7+3\sqrt{5}}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}$,
   (d) $\sqrt{3\cdot\sqrt{2}+4}+\sqrt{3\cdot\sqrt{2}-4}$,
   (e) $\sqrt{3+2\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}$,
   (f) $\sqrt{4\sqrt{4+\sqrt{7}}+3-2\sqrt{14}}$.
10. Dokážte, že $\sqrt{2}$ a $\sqrt{6}$ sú iracionálne čísla.

Tvrdenia o iracionalite $\sqrt{2}$ a $\sqrt{6}$ sú len špeciálne prípady nasledujúcej vety z teórie čísel.

11. Nech N a $n \geq 2$ sú prirodzené čísla. Ak N nie je n-tou mocninou žiadneho prirodzeného čísla, tak číslo $\sqrt[n]{N}$ je iracionálne. (Ekvivalentná formulácia: Číslo $\sqrt[n]{N}$ je alebo prirodzené alebo iracionálne.) Dokážte.
12. Uvažujme o čísle $A = \sqrt[n]{\frac{P}{Q}}$, kde P, Q sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Nech $Q \neq 1$ (inak by išlo o prípad z predchádzajuúcej úlohy). Nech aspoň jedno z čísel P, Q nie je n-tou mocninou prirodzeného čísla. Potom A je iracionálne číslo. Dokážte.
13. Ak r_1, s_1, r_2, s_2 sú racionálne čísla a
$$r_1\sqrt{2}+s_1\sqrt{3}=r_2\sqrt{2}+s_2\sqrt{3},$$
tak $r_1 = r_2$ a $s_1 = s_2$. Dokážte.
14. (Metóda neurčitých koeficientov.) Číslo $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$ vyjadrite v tvare $A\sqrt{2}+B\sqrt{3}$, kde A, B sú racionálne čísla. (Podľa predchádzajúceho príkladu neexistujú dve riešenia.)
15. Dokážte, že ak čísla $x, y, \sqrt{x}+\sqrt{y}$ sú racionálne, tak aj čísla $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ sú racionálne.
16. Koľkokrát sa zväčší dvojciferné číslo, ak sprava k nemu pripíšeme také isté dvojciferné číslo?
17. Dokážte, že ak sa v 6-cifernom čísle rovnajú prvá a štvrtá cifra, druhá a piata cifra a tiež tretia a šiesta cifra, tak toto číslo je deliteľné každým z čísel 7,11 a 13.
18. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré majú tú vlastnosť, že ich tretia mocnina sa rovná súčtu tretích mocnín troch predchádzajúcich čísel.

19. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré majú tú vlastnosť, že ak nimi delíme čísla 45, 73, 115, dostaneme vždy zvyšok 3.

20. Koľkými nulami končí číslo 49! ?

Predchádzajúca úloha naznačuje, že môže byť užitočné vedieť efektívne zisťovať exponent, s akým sa dané prvočíslo p nachádza v rozklade čísla $n!$ na prvočísla. Pripomeňme, že ak x je reálne číslo, tak jeho *celá časť* $\lfloor x \rfloor$ je najväčšie celé číslo, ktoré je $\leq x$. Teda ak rozložíme reálnu os na intervaly $[n, n+1)$,

$$\mathbb{R} = \cdots \sqcup [-2,-1) \sqcup [-1,0) \sqcup [0,1) \sqcup [1,2) \sqcup [2,3) \sqcup \ldots$$

a x patrí do $[n, n+1)$, tak $\lfloor x \rfloor = n$. Napr. $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$, $\lfloor 2,6 \rfloor = 2$, $\lfloor -4,15 \rfloor = -5$.

21. Dokážte, že exponent α, s ktorým sa prvočíslo p nachádza v čísle $n!$, je

$$\alpha = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots .$$

(Teda p^α delí $n!$, ale $p^{\alpha+1}$ už nedelí $n!$. Tiež si všimnite, že v čitateľoch je n a nie $n!$. Pre dosť veľké k je $p^k > n$ a potom $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = \cdots = 0$, takže vo vzťahu pre α máme v skutočnosti len konečne veľa nenulových sčítancov.)

22. Určte s akým exponentom sa 3 nachádza v čísle 100!.

Vzorec pre exponent, s akým sa prvočíslo p nachádza v čísle $n!$ nemožno použiť, ak p nie je prvočíslo. Napr. zložené číslo 6 sa v čísle $3! = 6$ nachádza s exponentom 1, ale výpočet podľa vzorca by dal $\alpha = \left\lfloor \frac{3}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{6^2} \right\rfloor + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$. Ide o to, že tento výpočet nezachytáva tú skutočnosť, že v súčine $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ síce nie sú čísla $6, 6^2, \cdots$, ale aj $2 \cdot 3$ dáva 6. Teda keď zisťujete, s akým exponentom sa 6 nachádza v $n!$, nemôžete priamo použiť vzorec. Avšak môžete pomocou vzorca zistiť, s akým exponentom sa tam nachádzajú prvočísla 2 a 3.

23. Určte exponent α taký, že 6^α delí číslo 111!, ale $6^{\alpha+1}$ nedelí 111!.

24. Určte, aká najvyššia mocnina čísla 8 je deliteľom čísla 100!.

Kapitola 4

Základné poznatky z algebry

Úspech pozostáva z cesty od nezdaru k nezdaru bez ztraty nadšenia.

— Winston Churchill

Väčšina ľudí spotrebuje viac energie na rozhovory o problémoch než na ich riešenie.

— Henry Ford

1. Nech S je počet študentov a P počet profesorov na nejakej univerzite. Na každého profesora pripadá 6 študentov. Vyjadrite to rovnosťou pomocou S a P.

2. V reštaurácii na každých štyroch ľudí, ktorí si objednali tvarohový koláč, pripadlo päť ľudí, ktorí si objednali štrúdľu. Nech T je počet objednaných tvarohových koláčov a S je počet objednaných štrúdlí. Vyjadrite uvedené tvrdenie rovnosťou pomocou T a S.

(Ide o jednoduché úlohy na "preklad" textu do jazyka formúl. Keď v r. 1980 americkí didaktici matematiky P. Rosnick a J. Clement dali tieto úlohy študentom rôznych smerov štúdia, zistili, že v skupine 150 prvákov na technike len 63% vyriešilo správne úlohu o študentoch a profesoroch a len 27% vyriešilo správne úlohu o koláčoch. Študenti sociálnych vied dopadli ešte horšie. Len 43% z nich napr. vyriešilo správne úlohu o študentoch a profesoroch. Až v dvoch tretinách chybných riešení sa vyskytovala tá istá chyba: boli vymenené S a P, resp. T a S (napr. v prvej úlohe píšu $P = 6S$ namiesto $S = 6P$). Táto chyba sa označuje v literatúre niekedy ako *Rosnickov-Clementov fenomén*. Pozri P. Rosnick, J. Clement, Learning without understanding: the effect of tutoring strategies on algebra misconceptions, Journal of mathematical behavior 3(1980), no.1, 3-27 alebo R. Fischer, G. Malle, Človek a matematika, SPN Bratislava 1992, str. 36 a ďalšie. Bolo by zaujímavé odskúšať to napr. na našich prvákoch.)

Uvedieme teraz niekoľko jednoduchých úloh o polynómoch (mnohočlenoch) z Poláka, ako rozcvičku.

3. ([Po1, úloha 16, str. 87]) Deľte mnohočleny (premennej $x \in \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$)

   (a) $(5x^5 + 7x^4 - 20x^3 - 11x^2 + 23x - 6) : (x^2 + x - 3)$,

   (b) $\frac{4x^3-5x^2+9x-11}{x^2+2}$.

Pripomeňme, že podľa základnej vety algebry každý polynóm stupňa n (s reálnymi alebo dokonca) s komplexnými koeficientami má n (nie nevyhnutne navzájom rôznych) koreňov v obore $\mathbb{C}$. Ak polynóm $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ má koreň c, tak je deliteľný polynómom $x-c$, teda $x-c$ sa z neho dá vyňať. Z toho sa dá odvodiť, že ak polynóm $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ má (nie nutne navzájom rôzne) korene $c_1, c_2, \dots, c_n$, možno ho písať v tvare

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 = a_n(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n).$$

Teda polynóm (s reálnymi alebo dokonca) s komplexnými koeficientami sa dá *v obore* $\mathbb{C}$ rozložiť až na súčin lineárnych polynómov.

Ak všetky koeficienty polynómu $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ sú reálne, dá sa povedať viac – ak komplexné číslo $a+bi$ je koreň, tak aj $a-bi$ je koreň. Teda tie korene, ktoré nie sú reálne, sa vyskytujú v dvojiciach navzájom komplexne združených koreňov. Pritom, ak je $a+bi$ napr. k-násobný koreň, tak aj $a-bi$ je k-násobný koreň. Z toho sa dá odvodiť, že polynóm $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ s *reálnymi* koeficientami sa dá rozložiť na súčin polynómov s *reálnymi* koeficientami, ktoré sú lineárne alebo kvadratické so zápornými diskriminantami (hovoríme o rozklade polynómu s reálnymi koeficientami v obore $\mathbb{R}$).

Hľadať korene polynómov je vo všeobecnosti ťažké. Ak však $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ je polynóm s *celočíselnými* koeficientami, tak vieme hľadať jeho *racionálne* korene (ak také existujú). Platí totiž, že ak racionálne číslo p/q zapísané v základnom tvare (teda p je celé, q prirodzené a p, q sú nesúdeliteľné) je jeho koreňom, tak $p|a_0$ a $q|a_n$.

Jedným z dôsledkov základnej vety algebry je nasledujúce tvrdenie. Ak sa dva polynómy s reálnymi alebo komplexnými koeficientami rovnajú vo všetkých reálnych číslach, tak sa rovnajú *fotograficky*, t.j. majú rovnaké stupne a rovnaké koeficienty pri tých istých mocninách x (v opačnom prípade by ich rozdiel bol nenulový polynóm s nekonečne veľa koreňmi, čo odporuje základnej vete algebry).[1] Potom sa samozrejme tie polynómy rovnajú aj vo všetkých komplexných číslach.

4. ([Po1, úloha 25, str. 89]) V obore $\mathbb{R}$ rozložte na súčin daný mnohočlen po jeho predchádzajúcej vhodnej úprave:
   (a) a^6-b^6,
   (b) x^4y+4y,
   (c) $x^3+4x^2-7x-10$,
   (d) x^3+x-2,
   (e) x^4+x^2+1,
   (f) x^3+2x^2+2x+1,
   (g) $a^2-x^2+2xy-y^2$,
   (h) $1-p^2-2pq-q^2$,
   (i) $a^2-b^2+c^2-d^2+2bd-2ac$.
5. ([Po1, úloha 26, str. 90]) V obore $\mathbb{C}$ rozložte dané mnohočleny:
   (a) x^2+2,
   (b) x^4-81.

[1] Rovnako sa dá zdôvodniť nasledujúce silnejšie tvrdenie: Ak sa dva polynómy (s komplexnými koeficientami) rovnajú vo väčšom počte (komplexných) čísel ako je maximum ich stupňov, tak sa rovnajú fotograficky.

6. ([Po1, úloha 30, str. 91]) Vhodnou úpravou ukážte, že dané mnohočleny nadobúdajú pre všetky reálne hodnoty premenných len nezáporné hodnoty:

   (a) $x^2 + 6x + 9$,
   (b) $2x^2 + 4x + 6$ (tzv. doplnenie na úplný štvorec),
   (c) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 9$,
   (d) $2x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$,
   (e) $4x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 3$.

7. ([Po1, úloha 32, str. 91]) Zistite, či je celé číslo tvaru

   (i) $a^2 + 11a$,
   (i) $a^3 + 11a$,

   pre každé $a \in \mathbb{Z}$ deliteľné šiestimi.

8. ([Po1, úlohy 10, 17, str. 94, 95]) Upravte (vykonajte výpočtové operácie) a uveďte podmienky, za ktorých majú vykonané úpravy zmysel v obore $\mathbb{R}$:

   (a) $\left(\frac{1}{n-1} - \frac{3}{n^3-1} + \frac{3}{n^2+n+1}\right)\left(n + \frac{2n+1}{n-1}\right)$,
   (b) $\left(\frac{x^2+xy}{x^3+x^2y+xy^2+y^3} + \frac{x}{x^2+y^2}\right) : \left(\frac{1}{x-y} - \frac{2xy}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}\right)$,
   (c) $\frac{6x-3}{2x+2}\left(\frac{2x}{1-4x+4x^2} - \frac{4x^2+2x}{8x^3-1}\right)$.

9. ([Po1, úloha 7c, str. 100]) Nech a, b, c, d sú reálne čísla, pričom b, d sú kladné. Dokážte, že platí:
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$
   (analogické tvrdenie platí s neostrými nerovnosťami).

   Zlomok $\frac{a+c}{b+d}$ je tzv. *mediant* (nie medián!) zlomkov $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. (Školáci niekedy chybne sčitujú zlomky tak, že sčítajú čitatele a sčítajú menovatele. Dostanú tak práve mediant zlomkov namiesto ich súčtu.) Úloha hovorí: Mediant zlomkov (kladných alebo aspoň) s kladnými menovateľmi leží medzi nimi.

10. ([Po1, úloha 15, str. 102]) Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť:
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

    Uvedieme niekoľko úloh o polynómoch.

11. Rozložte a) nad $\mathbb{R}$, b) nad $\mathbb{C}$:
$$f(x) = 2x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 8x - 8\ .$$

12. Rozložte a) nad $\mathbb{R}$, b) nad $\mathbb{C}$:
$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3.$$

13. Určte zvyšok pri delení:

$$(3x^{150} - 17x^{12} + 8x^3 + 1) : (x^2 - 1).$$

14. Nájdite zvyšok pri delení polynómu $f(x)$ polynómom $\varphi(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$ ak je známe, že pri delení polynómu $f(x)$ polynómami $x-2$, $x+3$ a $x-1$ dostávame v danom poradí zvyšky 7, 7, 11.

15. Nech $f(x)$ je polynóm, ktorý dáva zvyšok A pri delení polynómom $x-a$ a zvyšok B pri delení polynómom $x-b$, $a \neq b$. Nájdite zvyšok pri delení polynómu $f(x)$ polynómom $(x-a)(x-b)$.

Kapitola 5

Funkcie

Asi najvyšším prejavom ľudskej dôstojnosti je priznať, že som hlúpejší, keď iný je naozaj rozumnejší a vtipnejší.

— Fjodor Michajlovič Dostojevskij

Raz tolerancia dosiahne takej úrovne, že inteligentným ľuďom bude zakázané rozmýšľať, aby tým neurazili imbecilov.

— Fjodor Michajlovič Dostojevskij

Nútiť deti, aby robili veci, ktoré považujú za zbytočné a pre nikoho potrebné, znamená učiť ich zvyknúť si na to, že idiotská činnosť neznižuje ľudskú dôstojnosť.

— Lev Davidovič Landau

1. Čo si myslíte o nasledujúcich úlohách na priamu úmernosť a nepriamu úmernosť?
   (a) Dobre vycvičený hasič si oblečie nohavice za 5 sekúnd. Za aký čas si dobre vycvičený hasič oblečie 100 nohavíc?
   (b) Dvaja robotníci vykopú studňu za 5 dní. Za aký čas vykope studňu 10 000 robotníkov?
2. Pre $f(x) = 3x + 4$ nájdite $f(3)$, $f(0)$, $f(-2)$, $f(t)$, $f(-x)$, $f(2x)$, $f(1+x)$, $f(3x+4)$, $f(x^2)$, $f((x-4)/3)$, $f(f(x))$.
3. Móricko tvrdí, že našiel funkciu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou
$$f(x^2) = 2x - 1 \qquad \text{pre každé} \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Otázka pre Vás: Nekecá Móricko?
4. Nech $f(3x+4) = x$ $(x \in \mathbb{R})$. Určte $f(x)$.
5. Nech $f(2x-1) = x + 3$ $(x \in \mathbb{R})$. Určte $f(x^2+5)$.
6. Určte funkciu $f(x)$, ak
$$f\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = x \quad \text{pre každé } x \neq -1.$$

7. Vieme, že
$$f\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) = (x-3)^2 \quad \text{pre každé } x \neq 3.$$
Čomu sa rovná $f(7x+2)$?

8. Určte $f(x)$, ak
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \qquad (x > 0).$$

9. Nakreslite grafy funkcií:
   (a) $y = 2x - 1 - 3x^2$ (kvadratická funkcia, metóda doplnenia na úplný štvorec),
   (b) $y = \frac{1-2x}{x-3}$ (lomená lineárna funkcia),

Mocninová funkcia x^3 je definovaná pre $x \in \mathbb{R}$ a funkcia $x^{-3} = 1/x^3$ pre $x \neq 0$. Podobne pre iné celé čísla. S tým každý súhlasí. Každý, kto absolvoval kurz matematickej analýzy tiež vie, že ak a je iracionálne číslo, tak mocninová funkcia x^a sa nedá rozumne definovať pre $x < 0$.[1] Trochu je problém s mocninovými funkciami s racionálnym necelým exponentom, ako napr. $x^{2/5}$ či $x^{5/2}$. Sú definované pre $x < 0$ alebo nie? Tu sú dva tábory autorov.

Prvý tábor tvrdí, že ak $a = p/q$ je racionálne číslo a $q \neq 1$, tak $x^{\frac{p}{q}}$ sa nedá definovať, pokiaľ chceme zachovať vzťahy
$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p.$$
Argumentuje sa tak, že by sme sa dostávali do sporov typu (pre $a = 2/5 = 4/10$)
$$\underbrace{\sqrt[5]{x^2}}_{\text{def. pre } x\in\mathbb{R}} = \underbrace{(\sqrt[5]{x})^2}_{\text{def. pre } x\in\mathbb{R}} = x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{4}{10}} = \underbrace{(\sqrt[10]{x})^4}_{\text{def. len pre } x\geq 0} = \underbrace{\sqrt[10]{x^4}}_{\text{def. pre } x\in\mathbb{R}} . \tag{5.1}$$
Tu však treba povedať, že spor máme aj pre *celé* $a = 3 = 6/2$, lebo
$$-1 = (-1)^3 = (-1)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1, \tag{5.2}$$
alebo
$$-1 = (-1)^3 = (-1)^{\frac{6}{2}} = (\sqrt{-1})^6 = \text{nedefinované}.$$
Teda prvý tábor definuje $(-1)^3$, ale $(-1)^{\frac{6}{2}}$ už nedefinuje. Internet je plný zástupcov prvého tábora, ktorí tvrdia, že $x^{\frac{p}{q}}$ sa *nedá* rozumne definovať pre $x < 0$. Vo všeobecnosti však nie je pravdou, že sa to *nedá*. Niekedy sa to dá, ako vidieť z argumentácie druhého tábora.

Druhý tábor (kam sa zaradíme v tomto texte aj my) argumentuje, že funkcia
$$x^{\frac{5}{2}} := (\sqrt{x})^5, \quad \text{resp.} \quad x^{\frac{5}{2}} := \sqrt{x^5}$$
je síce zjavne definovaná len pre $x \geq 0$, ale funkcie
$$x^{\frac{2}{5}} := (\sqrt[5]{x})^2, \quad \text{resp.} \quad x^{\frac{2}{5}} := \sqrt[5]{x^2}$$
sú dobre definované pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a dokonca sa rovnajú, takže by sme sa nemali zbavovať možnosti definovať takýmto spôsobom funkciu $x^{\frac{2}{5}}$ na celej reálnej osi. Aby sa obišiel problém so sporom (5.1), treba si len uvedomiť, že racionálne číslo sa v teoretickej aritmetike definuje ako trieda ekvivalencie na množine celých čísel. Teda nie 2/5 a 4/10 sú racionálne čísla, ale množina
$$\{(2,5), (-2,-5), (4,10), (-4,-10), (6,15), (-6,-15), \cdots\}$$

[1] Ak iracionálne a je kladné, tak funkcia x^a je definovaná pre $x \geq 0$ a ak je záporné, tak dokonca len pre $x > 0$.

je jedno racionálne číslo. V tejto množine existuje práve jedna dvojica, ktorá zodpovedá obvyklému zápisu racionálneho čísla v základnom tvare, v tomto prípade je to $(2,5)$. Označíme

$$\left[\frac{2}{5}\right] := \{(2,5),(-2,-5),(4,10),(-4,-10),(6,15),(-6,-15),\cdots\}.$$

Všeobecne, ak p je celé, q prirodzené, p a q nesúdeliteľné, tak uvažujeme o racionálnom čísle v zmysle teoretickej aritmetiky,

$$\left[\frac{p}{q}\right] := \{(p,q),(-p,-q),(2p,2q),(-2p,-2q),(3p,3q),(-3p,-3q),\cdots\}$$

a definujeme

$$x^{\left[\frac{p}{q}\right]} := \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p. \tag{5.3}$$

Nie je ťažké dokázať, že naozaj $\sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$, teda obe funkcie majú rovnaký definičný obor a rovnaké funkčné hodnoty (preskúmajte prípady 1) p a q nepárne, 2) p párne a q nepárne, 3) p nepárne a q párne, a to aj keď p je kladné aj keď p je záporné).

Teda (5.3) je definícia mocninnej funkcie s racionálnym exponentom. Zdôraznime, že tu je p celé, q prirodzené, p a q nesúdeliteľné. Niečo ako $x^{\left[\frac{4}{10}\right]}$ sme nedefinovali, lebo niečo ako $\left[\frac{4}{10}\right]$ pre nás neexistuje (dvojica $(4,10)$ je prvkom množiny $\left[\frac{2}{5}\right]$).

Tu by sme mohli skončiť. Z praktických dôvodov je však dobré dohodnúť sa, že budeme písať (ako väčšinou aj inde v matematike, snáď s výnimkou teoretickej aritmetiky) len $\frac{p}{q}$ namiesto precíznejšieho $\left[\frac{p}{q}\right]$. Teda

$$x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p, \quad \text{(ak } x<0\text{, tak len pokiaľ je } \frac{p}{q} \text{ v základnom tvare).} \tag{5.4}$$

Ak q je párne (potom p je kvôli nesúdeliteľnosti nutne nepárne), tak pre $x<0$ funkcia definovaná nie je. Ak je však q nepárne, je funkcia definovaná aj pre $x<0$; táto funkcia je párna ak p je párne a nepárna ak p je nepárne.

Ak by niekto silou mocou chcel písať/definovať $x^{\frac{4}{10}}$, musíme mu vysvetliť, že definíciou mocninnej funkcie s racionálnym exponentom je (5.3), takže pod $x^{\frac{4}{10}}$ musí chápať $x^{\left[\frac{2}{5}\right]}$ resp., v menej poriadnom označení, $x^{\frac{2}{5}}$.

(c) $y = x^{2/5}$, $y = x^{5/2}$, $y = x^{-2/3}$, $y = x^{-3/2}$ (mocninové funkcie),

(d) $y = \operatorname{sgn} x$, $y = \frac{x}{|x|}$ (líšia sa tie funkcie alebo nie?)

(e) $y = -x|x|$,

(f) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = \sqrt{|x|}$,

(g) $y = \log_{10} x$, $y = \log_{10}(-x)$, $y = \log_{10}|x|$.

(h) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e^{|x|}$.

10. Nakreslite grafy funkcií:

(a) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$,

(b) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$, $y = \sqrt{x+2}$,

(c) $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$,

(d) $y = \cos x$, $y = \frac{1}{3}\cos x$, $y = \cos\frac{1}{3}x$,

(e) $y = \ln x$, $y = |\ln x|$, $y = \ln|x|$,

(f) $y = \sqrt[3]{x+1}$,

(g) $y = |x^2 - 1|$,

(h) $y = \operatorname{cotg} |x|$.

11. Nakreslite grafy funkcií:

(a) $y = (\operatorname{sgn} x - 1)^2$,

(b) $y = \operatorname{sgn}(e^x)$,

(c) $y = \operatorname{sgn}(\log_{10} x)$,

(d) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$,

(e) $y = e^{\operatorname{sgn} x}$,

(f) $y = \ln(\operatorname{sgn} x)$,

12. Nakreslite grafy funkcií:

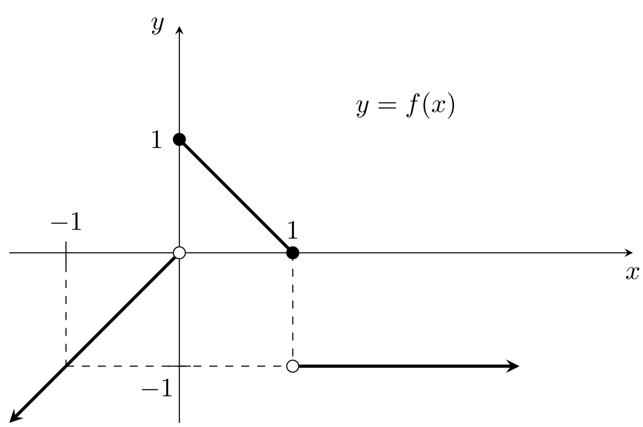
(a) $y = \log_{10}(x - 1)$,

(b) $y = |\log_{10}(x - 1)|$,

(c) $y = \log_{10}(|x| - 1)$,

(d) $y = \log_{10} |x - 1|$.

13. Je daná funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorej graf je na Obr. 5.1.



Obr. 5.1: Graf danej funkcie

Nakreslite graf funkcie

(a) $y = f(-x)$,

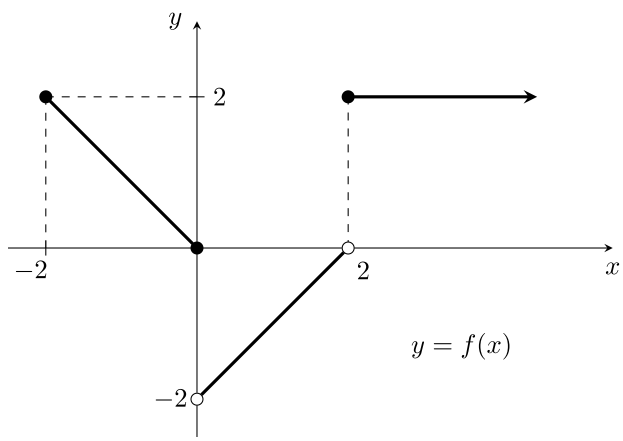
(b) $y = f(x + 1) - 1$,

(c) $y = f(2x - 1)$,

(d) $y = \frac{1}{2} f(x + 1)$,

(e) $y = f(|x| - 1|$,

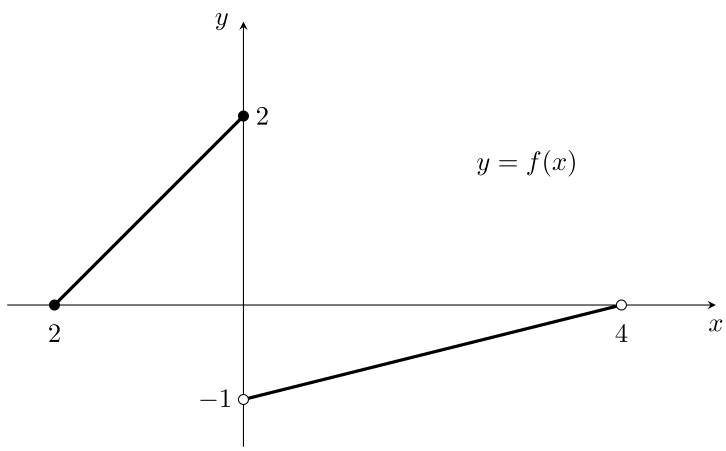
(f) $y = f(|x - 1|)$,



Obr. 5.2: Graf danej funkcie

(g) $y = |f(|x|)|$.

14. Je daná funkcia $f\colon [-2, \infty) \to \mathbb{R}$, ktorej graf je na Obr. 5.2.
Nakreslite graf funkcie
   (a) $y = f(x-2) + 1$,
   (b) $y = f(2x+4)$,
   (c) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$,
   (d) $y = f(|x+2|)$,
   (e) $y = |f(|x|)|$,
   (f) $y = f(2 - |x|)$.
15. Je daná funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorej graf je na Obr. 5.3.



Obr. 5.3: Graf danej funkcie

Nakreslite graf funkcie

$$y = f\left(2 + \left|\frac{x}{4}\right|\right).$$

16. Ak je funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastúca, je nevyhnutne
    (a) funkcia $2f$ rastúca?
    (b) funkcia $-f$ klesajúca?
    (c) funkcia f^2 (kde $f^2(x) = (f(x))^2$) rastúca?
    (d) funkcia $1/f$ klesajúca (pre všade nenulovú funkciu f)?
17. Nech sú funkcie $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastúce.
    (a) Je potom aj $f + g$ rastúca?
    (b) Je aj $f \cdot g$ rastúca?
18. Nech funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastnosť (t.j. je riešením funkcionálnej rovnice)
$$f(x+1) = f(x) + f(1) + 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
    (a) Čomu sa rovná $f(0)$?
    (b) Ak je navyše $f(1) = 1$, nájdite $f(2)$, $f(3)$, $f(-1)$.
19. Nech funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je riešením *Cauchyho funkcionálnej rovnice*
$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$
    (a) Čomu sa rovná $f(0)$?
    (b) Ukážte, že f je nepárna, t.j. $f(-x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
    (c) Ukážte, že $f(2x) = 2f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
    (d) Ak je navyše $f(1) = 1$, nájdite $f(2)$, $f(3)$, $f(1/2)$.

Pripomeňme, že $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

20. Nech $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) a $g(x) = 1/x$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Určte funkcie $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$.
21. Určte funkcie $f \circ g$, $g \circ f$, ak
$$f(x) = \begin{cases} 4, & x < 3 \\ (x-1)^2, & x \geq 3, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 2 \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$$
    (nakreslite aj grafy funkcií $f, g, f \circ g, g \circ f$).
22. Nech pre nejaké kladné reálne čísla a, b platí
$$\sqrt{a} - \frac{1}{a^2} = \sqrt{b} - \frac{1}{b^2}.$$
    Rozhodnite, či už potom musí platiť
$$a^2 + 3a - 1 = b^2 + 3b - 1.$$
23. Je daná funkcia $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

(a) Určte jej definičný obor a obor hodnôt.

(b) Existuje inverzná funkcia f^{-1}? Ak áno, nájdite ju.

(c) Nakreslite grafy f aj f^{-1}.

24. Je daná funkcia
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x^2 + 2x - 3, & x > 0. \end{cases}$$

(a) Nakreslite graf funkcie f.

(b) Existuje k funkcii f inverzná funkcia f^{-1}? Zdôvodnite.

(c) Ak neexistuje f^{-1}, nájdite čo najväčšie intervaly také, že zúženia f na tieto intervaly majú inverzné funkcie. Opíšte tie zúženia a nájdite k nim inverzné funkcie.

25. Určte definičný obor a nakreslite graf funkcie

(a) $y = \frac{2x+4+|x+5|}{2x-|x-3|}$.

(b) $y = \frac{|x-|2-x||}{|x|+1}$.

26. Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie
$$y = x + |x-3| - 3|x-1| + |2x - |x-3||.$$

27. Zjednodušte predpis funkcie
$$y = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x).$$

28. Vyjadrite funkciu $\sin 5x$ pomocou funkcií $\sin x$ a $\cos x$. (Návod: použite Moivreovu vetu.)

29. Graf funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má dva stredy symetrie. Dokážte, že funkcia f sa dá napísať ako súčet lineárnej a periodickej funkcie.

30. ([Po1, úlohy 120, 121, str. 100]) Nech $x > 0$, $a > 0$, $a \ne 1$, $b > 0$, $b \ne 1$. Dokážte, že

(a) $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$ (prechod od logaritmu pri jednom základe k logaritmu pri druhom základe),[2]

(b) $\ln x = \log_{10} x \cdot \ln 10 \approx 2{,}3 \cdot \log_{10} x$ (zvolili sme $b = e$, $a = 10$),

(c) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

[2] Mnemotechnická pomôcka: Vo vzorci pre prechod od logaritmu pri jednom základe k logaritmu pri druhom základe sa, napodiv, logaritmy správajú podobne ako zlomky: platí $\frac{x}{b} = \frac{x}{a} \cdot \frac{a}{b}$ a podobne $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$.

Kapitola 6

Rovnice

Je lepšie položiť otázku a vyzerať hlúpo päť minút, než sa vôbec nespýtať a byť hlúpy celý život.

— Konfucius

Je smutné, že hlupáci sú takí sebaistí a ľudia múdri plní pochybností.

— Bertrand Russell

1. Rozhodnite o pravdivosti výrokov:
   (1) $\sqrt{4} = 2$,
   (2) $\sqrt{4} = -2$,
   (3) $\sqrt{4} = \pm 2$, [1]
   (4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sqrt{x^2} = x)$,
   (5) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sqrt{x^2} = -x)$,
   (6) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sqrt{x^2} = \pm x)$,
   (7) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sqrt{x^2} = |x|)$.
2. V obore $\mathbb{R}$ riešte rovnicu $x^2 = 4$ rôznymi spôsobmi:
   (a) odmocnením,
   (b) úpravou na tvar $x^2 - 4 = 0$ a rozkladom polynómu na ľavej strane,
   (c) úpravou na tvar $x^2 - 4 = 0$ a použitím vzorca pre korene kvadratickej rovnice,
   (d) uhádnutím dvoch koreňov a zdôvodnením, prečo iné korene už neexistujú.

Pri riešení nasledujúcej rovnice postupujte precízne: Určte definičný obor, potom hľadajte obor pravdivosti umocnením (všimnite si, že je vhodné najskôr poprehadzovať členy, ak sa chcete odmocniny zbaviť už jedným umocnením). Je potrebná skúška správnosti? Prečo? Ak je potrebná, stačí overiť, či nájdené 'korene' patria do definičného oboru alebo to nestačí a naozaj je potrebné každý nájdený 'koreň' dosadiť do ľavej i pravej strany rovnice?

[1] Ak by sme 4 chápali ako komplexné číslo a pod druhou odmocninou chápali *množinu* všetkých komplexných čísel, ktorých druhá mocnina sa rovná danému číslu, tak by bolo $\sqrt{4} = \{-2, +2\}$. Tu však 4 chápeme ako reálne číslo a druhú odmocninu z nezáporného reálneho čísla definujeme ako to (jediné) nezáporne reálne číslo, ktorého druhá mocnina sa rovná danému číslu.

3. Riešte (v obore $\mathbb{R}$) rovnicu
$$\sqrt{5-x}-1=x.$$

4. Rovnicu z predchádzajúceho príkladu riešte graficky. (Znázornite grafy funkcií $f(x)=\sqrt{5-x}$ a $g(x)=x+1$. Z toho hneď uvidíte, koľko existuje koreňov. Nezabudnite, že z dobre nakreslených grafov sa dajú korene niekedy aj hádať a potom stačí overiť ich výpočtom.)

5. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

   (a) $x^5+2x^4-2x^3-7x+6=0$,
   (b) $\sqrt{x^3-2x+5}=x^2-8x+9$,
   (c) $|2x-1|+|x-3|=2x+1$,
   (d) $|x^2+1-|x-2||=x-3$,
   (e) $2\cdot\big|2-|x-3|\big|=|x-2|$,
   (f) $\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-|x|}=1-|x-1|$,
   (g) $\left|\sqrt{x-1}-\dfrac{2-x}{x}\right|=1$,
   (h) $\sqrt{x^2+5x+2}-\sqrt{x^2-3x+3}=3$,
   (i) $\sqrt{2x+2}+\dfrac{6}{5-2x}=0$,
   (j) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=4$.

6. Riešte v $\mathbb{R}^2$ rovnice a množinu riešení znázornite graficky v rovine:

   (a) $x+1-y=0$,
   (b) $xx=xy$.

7. Riešte v $\mathbb{R}^2$ sústavy rovníc:

   (a) $x^2+xy=6$, $xy-x+y=1$,
   (b) $x-2\cdot\sqrt{x-y}=1$, $y+\sqrt{2x-y}=4$,
   (c) $x+|x-y|=3$, $y+|x+y|=4$,
   (d) $x+y+|x-y|=2$, $\sqrt{x}=|y+2|$,
   (e) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+y+1}=1$, $y^2-2x^2=1$,
   (f) $x^2-|y-x|=1$, $7xy+5x-17y+5=0$,
   (g) $\sqrt{3x-y}+|x-1|=0$, $x+\sqrt{x+y}=y$,
   (h) $|x|+|y|=1$, $\sqrt{y-1}=x-x^2$,
   (i) $\sqrt{x-y}+x=3$, $\sqrt{y-x}+x^2-y=6$,
   (j) $\sqrt{x-y}+x=3$, $\sqrt{y-x}+x^2-y=5$,
   (k) $\sqrt{x-y}=1+|x-2y|$, $|x-y|+|x+1-y|+|x+2-y|=3x$.

8. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

(a) $2^x = 3^x$,

(b) $\dfrac{3}{2^x - 1} - \dfrac{6}{4^x - 1} = \dfrac{1}{2^x}$,

(c) $\dfrac{3}{2} \cdot \log(x) = \log\left(\dfrac{3}{2} \cdot x\right)$,

(d) $\sin^2 x = 2\cos x - 2$,

(e) $\mathrm{tg}(2x) = 2 \cdot \mathrm{tg}\, x$,

(f) $\dfrac{1 + \mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x - 1} = 2 + \sqrt{3}$,

(g) $\dfrac{2 \cdot \ln x}{\ln(5x - 4)} = 1$

(h) $\ln(x + 1) + \ln(x - 1) = \ln(x + 2) + \ln x$,

(i) $\sin(\pi + x) = \pi + \sin x$,

(j) $e^x = x + 1$,

(k) $\ln x = x - 1$.

9. ([Po1, úloha 5, str. 196]) Riešte v obore $\mathbb{R}$ exponenciálnu rovnicu:

$$9^x = 6^x + 4^x.$$

10. ([Po1, úloha 15e, str. 198]) Riešte v obore $\mathbb{R}$ logaritmickú rovnicu:

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$$

11. ([Po1, úloha 13, str. 202]) Riešte v obore $\mathbb{R}$ goniometrickú rovnicu:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

12. Pred šiestimi rokmi bola Eva trikrát staršia ako Adam. pred štyrmi rokmi bola Eva dvakrát staršia ako Adam. Koľko rokov má Eva teraz?

13. Loď a kotol majú spolu 49 rokov. Loď je dvakrát taká stará ako bol kotol vtedy, keď loď bola taká stará ako je kotol teraz. Koľko rokov má loď?

14. Janko ide na bicykli k babičke, ktorá býva na dedine vzdialenej 12 km. Na rovine ide rýchlosťou 24 km/hod, do kopca ide rýchlosťou 20 km/hod, z kopca 30 km/hod. Za aký dlhý čas prejde tam a naspäť?

15. Dvoma rôzne výkonnými mláťačkami možno vymlátiť celú úrodu za 4 dni. Keby sa vymlátila polovica úrody prvou mláťačkou a potom zvyšok druhou mláťačkou, mlatba by trvala 9 dní. Za koľko dní by sa vymlátila celá úroda každou mláťačkou osobitne?

16. (Newtonova úloha.) Tráva na celej lúke rastie rovnako husto a rýchlo. Je známe, že 70 kráv by ju spáslo za 24 dní a 30 kráv za 60 dní. Vypočítajte, koľko bolo kráv, keď ju spásli za 96 dní.

Kapitola 7

Nerovnice

Polovica pravdy je často veľká lož.

— Benjamin Franklin

Falošné rozhorčenie je najodpornejšou formou pokrytectva.

— Henry de Montherlant

1. Riešte nerovnice

   Nerovnicu $(x-1)(x-2) > 0$ možno riešiť tak, že sa rozoberú dva prípady: 1. prípad: $(x-1 > 0 \wedge x-2 > 0)$, 2. prípad: $(x-1 < 0 \wedge x-2 < 0)$.[1]. Matematicky je to správne, ale ak sa neukáže aj šikovnejšie riešenie, žiak z toho získava zlozvyk postupovať analogicky aj pri troch a viacerých činiteľoch, čo je veľmi nešikovné, komplikované. Takéto úlohy možno v skutočnosti riešiť za pár sekúnd, ak si na číselnú os nakreslíte nulové body jednotlivých lineárnych činiteľov a pozriete sa na znamienko výrazu v jednotlivých intervaloch, ktoré tým vzniknú. Prirodzené je začať v najpravejšom intervale (zisťujeme znamienko pre veľmi veľké x). Potom sa pohybujeme smerom doľava a vždy pri prechode cez nulový bod si uvedomíme, ktorý z výrazov zmenil znamienko a v akej mocnine sa výraz nachádza, teda koľko znamienok sa zmenilo (párny počet zmien nie je zmena!). Pri jednotlivých nulových bodoch si treba dať pozor, či patria do oboru pravdivosti alebo nie (niekedy nepatria ani len do definičného oboru), teda jednotlivé body treba vybaviť osobitne.

   (a) $(x+3)(3-x)(2x+1)(8-3x) \leq 0$,
   (b) $\frac{(x+3)(3-x)}{(2x+1)(8-3x)} \leq 0$,
   (c) $(x+3)^2(3-x)(2x+1)^7(8-3x)^{2022} \leq 0$,
   (d) $\frac{(x+3)^2(3-x)}{(2x+1)^7(8-3x)^{2022}} \leq 0$,
   (e) $(x+5)(1-x)(x^2+x+7) \leq 0$.

2. Riešte nerovnice:

   (a) $x^3 - 3x - 2 < 0$,

[1] Súčin dvoch reálnych čísel je kladný práve vtedy, keď obe čísla sú kladné alebo keď obe čísla sú záporné. Teda $(x-1)(x-2) > 0 \iff (x-1 > 0 \wedge x-2 > 0) \vee (x-1 < 0 \wedge x-2 < 0)$

(b) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \geq 0$,

(c) $\dfrac{2x}{x+3} \geq \dfrac{6-3x}{x-1}$,

(d) $\dfrac{4}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} \leq x - 2$,

(e) $\dfrac{2}{x-1} + x^2 > 2(x+1)$,

(f) $\dfrac{x^2+x}{x-1} \leq \dfrac{6x}{x+2} + \dfrac{x+1}{x-1}$,

(g) $\dfrac{x}{x+1} \geq \dfrac{2x-1}{x}$,

(h) $\dfrac{14}{1-x} - \dfrac{12}{4+x} \leq 2 - x$,

(i) $\dfrac{x-3}{2x^2-x+1} + \dfrac{4}{x+1} \leq 1$.

3. Riešte nerovnice:

(a) $x + 2 < \sqrt{-x}$,

(b) $\sqrt{x^2+3x-3} - x \leq \dfrac{x-1}{3}$,

(c) $x - 2 < 2 \cdot \sqrt{x+7}$,

(d) $\sqrt{x^3+2x^2-12x+9} \leq 2x - 3$,

(e) $3x - 2 \cdot \sqrt{x^2-15} \leq 10$,

(f) $\sqrt{x-1} + \sqrt{14-5x} \leq 3$,

(g) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$,

(h) $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} < x + 1$.

4. Riešte nerovnice:

(a) $\sqrt{x^3+1} \leq |2x-1|$,

(b) $\dfrac{4}{|x+2|} + \dfrac{6}{|x|-1} \leq 7$,

(c) $\sqrt{5 - \dfrac{10x}{x^2+1}} \leq x - 1$,

(d) $\dfrac{1}{x - \sqrt{x+2}} \leq \dfrac{2}{x+1}$ (Rada: zaveďte substitúciu $y = \sqrt{x+2}$.),

(e) $\sqrt{x^3-2x^2+1} \leq x^2 + x - 2$,

(f) $\sqrt{x - \sqrt{x+2}} \leq 2$,

(g) $(6x+5)^2 \cdot (3x+2) \cdot (x+1) \leq 35$.

5. Riešte nerovnice:

   Pri výrazoch tvaru $|f(x)|$ niektorí žiaci z doteraz nezistených príčin uvažujú o prípadoch $|f(x)| \geq 0$ a $|f(x)| < 0$. To je samozrejme nezmysel, lebo absolútna hodnota nie je nikdy záporná (teda pre každé x z definičného oboru funkcie f nastáva prvý prípad, pre žiadne x nenastane druhý prípad). Zmysel má však uvažovať o prípadoch $f(x) \geq 0$ (vtedy bude $|f(x)| = f(x)$) a $f(x) < 0$ (vtedy bude $|f(x)| = -f(x)$). Výhodné je nakresliť si číselnú os, tú rozdeliť na vhodné intervaly a v nich riešiť úlohu, napr. nerovnicu. Namiesto jednej nerovnice tak riešime niekoľko nerovníc, ale jednoduchších. Počas riešenia sa môže stať, že jednotlivé intervaly treba ešte rozdeliť na viacero menších intervalov, aby sme sa zbavili všetkých absolútnych hodnôt.

   (a) $|x - 13| \geq x^2 + 1$,
   (b) $|5x^2 + 4x - 7| \geq x^2 - 2x + 3$,
   (c) $|x^2 - 1| \leq |5x - 5|$,
   (d) $\big|x^2 - |x - 2|\big| \geq 3x + 2$,
   (e) $\big|x + 3 - 2 \cdot |x - 3|\big| > 5 - x$,
   (f) $\big|2x - |x - 3|\big| > 2 \cdot |x|$,
   (g) $|x^3 + x| + |x - 1| < 1$.

6. Máme k dispozícii m gramov $p\%$ roztoku jódu v liehu. Chceme mať väčšie množstvo roztoku, hoci aj menej koncentrovaného. Koľko gramov čistého liehu môžeme pridať, ak chceme, aby roztok bol aspoň p_1-percentný ($p_1 < p$)?

Kapitola 8

Postupnosti a rady

Matematik dosiahol najvyššiu priečku na rebríku ľudského myslenia.

— Havelock Henry Ellis

Najvyšším stupňom ľudskej múdrosti je, keď vieme, že nič nevieme.

— Sokrates

Všeobecný člen postupnosti

Často sa v literatúre (a v istej obmene aj v kútikoch rekreačnej matematiky v rôznych časopisoch) možno stretnúť s úlohami typu: Určte všeobecný člen postupnosti $1, 4, 9, 16, 25, \dots$. Očakáva sa odpoveď $a_n = n^2$. (Prípadne sa požaduje uhádnuť ďalší člen, vtedy sa za správnu odpoveď považuje 36.) Treba si však uvedomiť, že takáto odpoveď nie je celkom v poriadku, matematicky to je nezmysel. Zo znalosti prvých piatich členov postupnosti totiž nie je možné jednoznačne určiť ani len šiesty člen, nieto ešte všetky ostatné členy. Postupnosť so všeobecným členom $a_n = n^2$ nie je jediná, ktorá má prvých 5 členov $1, 4, 9, 16, 25$. V skutočnosti existuje nekonečne veľa takých postupností.

1. V časopise je úloha: Určte všeobecný člen postupnosti

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots .$$

Nájdite "vzorec" pre a_n, aby postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ začínala takto:

$$1, 4, 9, 16, 25, 2023, \dots .$$

2. Nájdite explicitné vyjadrenie nejakej postupnosti, ktorej prvých 5 členov sú nuly a šiesty člen je rok vášho narodenia. Koľko riešení má táto úloha?

Ohraničenosť postupnosti

3. Vyšetrite ohraničenosť (resp. ohraničenosť zdola a zhora) postupností:
   (a) $a_n = \frac{n^2+n+2}{n^2+4n}$,
   (b) $b_n = n - \sqrt{n}$,
   (c) $c_n = \frac{2^n}{3^n+1}$,

(d) $d_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n+1}$,

4. Nech $a_1 > 1$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Dokážte, že postupnosť $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená.

Monotónnosť postupnosti

5. Vyšetrite monotónnosť postupností:

   (a) $a_n = 1 + (-1)^n + n^2$,
   (b) $b_n = \frac{2n+3}{3n-2}$,
   (c) $c_n = \frac{3n^2+2}{3n^2+1}$,
   (d) $d_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$,
   (e) $f_n = \log(n+1) - \log n$,
   (f) $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$.

6. Vyšetrite monotónnosť postupnosti
$$a_n = n + \frac{\cos 2n}{\sqrt{3}}, \quad n \geq 1$$

Monotónne a ohraničené postupnosti

7. Dokážte, že postupnosť
$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}$$
(n odmocnín) je rastúca a zhora ohraničená (zdola je ohraničená triviálne).

8. Vyšetrite ohraničenosť a monotónnosť postupnosti
$$x_0 = 1000, \quad x_n = \sqrt{x_{n-1} + 30}.$$

Extrémne členy postupnosti

9. Nájdite najväčší člen postupnosti
$$a_n = \frac{n}{n^2 + 100}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

10. Nájdite najmenší člen postupnosti
$$a_n = n + \frac{50}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

11. Nájdite najmenší a najväčší člen (ak existujú) postupnosti
$$a_n = 3 + 23n - n^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Aritmetické a geometrické postupnosti

12. V aritmetickej postupnosti je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 7$, $d = -2$, $S_n = -20$ (súčet prvých n členov postupnosti). Určte n.

13. Tri čísla sú po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Ich súčet je 3, súčet ich druhých mocnín je 4. Určte tieto čísla.

14. Určte tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti, ktorá má diferenciu $d = \frac{13}{3}$, ak viete, že súčin týchto čísel sa rovná ich súčtu.

15. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky, ktorých dĺžky strán tvoria konečnú aritmetickú postupnosť.

Nasledujúca úloha ukazuje, že ak množinu všetkých prirodzených čísel akýmkoľvek spôsobom zoradíme do postupnosti, tak táto postupnosť bude obsahovať trojčlennú aritmetickú postupnosť.

16. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prirodzených čísel, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla. Dokážte, že existujú také $i < j < k$, že $a_k - a_j = a_j - a_i$.

17. Je daná geometrická postupnosť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Nech S_n je súčet prvých n členov. Určte S_5, ak $S_2 = 4$, $S_3 = 13$.

18. Nech $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť s kvocientom q. Určte b_1 a q, ak $b_1 + b_2 + b_3 = 31$, $b_1 + b_3 = 26$.

19. Nech $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť. Určte b_5, ak $b_2 - b_1 = 18$, $b_4 - b_3 = 162$.

20. Robotník obsluhuje 16 automatických stavov, z ktorých každý vyrobí za hodinu a metrov látky. Prvý stav uvedie do chodu o $8,00$ hod a každý nasledujúci vždy o 5 minút neskôr. Koľko metrov látky je vyrobené, keď zapína posledný stav ?

21. Stroj stráca opotrebovaním každý rok p percent zo svojej ceny. Za koľko rokov klesne jeho hodnota na polovicu?

22. Polčas premeny rádioaktívnej látky je čas, za ktorý sa polovica jej pôvodného množstva premení na rozpadové produkty. Aký vek má archeologický nález, ak sa v spoločnej vrstve s ním našlo $2,1g$ rádioaktívneho uhlíka s polčasom premeny 5570 rokov a $300g$ rozpadových produktov? (Úbytok hmoty spôsobený žiarením pri premene zanedbajte.)

Rekurentné postupnosti

23. Postupnosť a_n definujeme rekurentne vzťahmi: $a_0 = a_1 = 1$ a $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-2}}{a_{n-1} + a_{n-2}}$ pre $n \geq 2$.

    (a) Vypočítajte niekoľko prvých členov postupnosti.

    (b) Vychádzajúc z bodu (a), odhadnite všeobecný vzorec pre a_n.

    (c) Matematickou indukciou dokážte vzorec z bodu (b).

24. Zopakujte predchádzajúce cvičenie pre postupnosti

    (a) $a_0 = 0$, $a_n = 3a_{n-1} - 2$,

    (b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{4}{4-a_n}$,

(c) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ pre $n \geq 2$,

(d) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1} - a_{n-2} + 3)^2$ pre $n \geq 2$.

25. Banka pripisuje na konci roka osempercentné úroky k sume, ktorá bola počas roka uložená na účte. Koľko budete mať na účte po n rokoch, ak

(a) na začiatku roka vložíte na účet 1000 eur a necháte ich tam počas celých n rokov,

(b) okrem počiatočného vkladu ako v (a) vždy na konci roka vložíte ešte 100 eur?

Pripomeňme definíciu Fibonacciho postupnosti:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pre } n \geq 3.$$

26. Chodbu o rozmeroch $n \times 2$ máme pokryť dlaždičkami o rozmeroch 2×1. Koľkými spôsobmi to môžme urobiť?

27. Nájdite rekurentný vzťah a počiatočné podmienky pre počet spôsobov, koľkými možno zoradiť autá do radu dlhého n parkovacích miest, ak môžeme použiť autá troch značiek: Cadillac, Continental a Ford. Cadillac alebo Continental zaberá dve miesta, Ford jedno miesto.

Konečné sumy

28. Sčítajte konečné sumy:

(a) $\sum_{i=1}^{10}(-1)^i$,

(b) $\sum_{k=0}^{3}(k^2 + 1)$,

(c) $\left(\sum_{k=0}^{3} k^2\right) + 1$,

(d) $\sum_{n=-2}^{5} 1$.

29. Vypočítajte:

(a) $3 + 8 + 13 + \cdots + (5n + 3)$,

(b) $\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{11}}{1+2+2^2+\cdots+2^5}$,

(c) $27,1\overline{02}$ (vyjadrite čo najjednoduchším spôsobom v tvare zlomku v základnom tvare).

30. Sčítajte: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$.

31. Sčítajte (pre $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$):

$$S = (a + b) + (a^2 + ab + b^2) + \cdots + (a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n).$$

32. Sčítajte:

$$S = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2.$$

33. Sčítajte sumu $S = 1 + 2.2 + 3.2^2 + \cdots + 100.2^{99}$ dvomi spôsobmi:

(a) účtovníckym trikom,

(b) tak, že od S odčítate vhodný násobok S.

Zovšeobecnite.

34. Sčítajte konečné sumy:

(a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + \frac{1}{k})$,

(b) $S_n = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)}$,

(c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{7k+7k^2}$,

(d) $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,

(e) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!}$. Zovšeobecnite.

Nekonečné geometrické rady

35. Vyjadrite v tvare zlomku v základnom tvare (použite geometrický rad): $27,1\overline{02}$.

36. ([Po2, úloha 24, str. 70]) *Goldbachova úloha:* Určte súčet všetkých racionálnych čísel, ktoré možno napísať v tvare zlomku

$$\frac{1}{(n+1)^m}, \qquad \text{kde} \quad n \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

37. ([Po2, úloha 28, str. 71]) Do štvorca o strane a je vpísaný kruh, do neho štvorec, do neho opäť kruh atď. do nekonečna. Vypočítajte:

(a) súčet obvodov a súčet obsahov všetkých týchto štvorcov,

(b) súčet obvodov a súčet obsahov všetkých týchto kruhov.

Kapitola 9

Kombinatorika

Neznalosť matematiky je vážnym obmedzením pre pochopenie sveta.

— Richard P. Feynman

Nie je možné byť matematikom bez toho, aby ste boli dušou básnikom.

— Sofia Kovalevská

Dirichletov princíp

Vždy si jasne uvedomte, aké prvky (objekty) máte, aké priehradky uvažujete a podľa akých pravidiel budete objekty vkladať do priehradok (inak povedané, ako *definujete* svoje priehradky).

1. ([Po2, úloha 31, str. 79]) Podľa antropológie neexistujú ľudia s väčším počtom vlasov ako 500 000. Praha má viac ako milión obyvateľov.
   (a) Dokážte, že medzi nimi existujú aspoň dvaja, ktorí majú rovnaký počet vlasov.
   (b) Pri akom počte obyvateľov Prahy máme istotu, že existujú traja s rovnakým počtom vlasov?
2. ([Po2, úloha 36, str. 79]) Na medzinárodnej konferencii bolo 96 účastníkov z 23 krajín. Dokážte, že aspoň 5 účastníkov pochádzalo z tej istej krajiny.
3. ([Po2, úloha 38, str. 80]) Dokážte: Ak je daných $n + 1$ prirodzených čísel (rôznych, nie nevyhnutne za sebou idúcich), tak medzi nimi vždy existujú dve čísla, ktorých rozdiel je deliteľný číslom n.[1]

Kombinatorické pravidlá súčtu a súčinu

Zdá sa, že vyučovanie kombinatoriky v škole zostane na formálnej úrovni (učenie sa definícií a vzorcov pre permutácie, variácie a kombinácie, s nízkou schopnosťou riešiť úlohy), pokiaľ žiaci skutočne nepochopia tieto dve základné kombinatorické pravidlá.

Pravidlo súčtu: Ak množiny $A_1, A_2, \dots, A_k$ sú po dvoch disjuntné a majú v danom poradí $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvkov, tak zjednotenie tých množín má $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ prvkov. Teda existuje $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ možností na výber jedného prvku z toho zjednotenia. Povedané kombinatoricky: Ak je n_1 možností na to, aby sme

[1] Teda ide o dve čísla, ktoré sú kongruentné modulo n.

vykonali $\mathcal{A}_1$,[2] n_2 možností na to, aby sme vykonali $\mathcal{A}_2$, ..., n_k možností na to, aby sme vykonali $\mathcal{A}_k$, pričom vždy ide o iné možnosti (to je tá disjunktnosť, teda vykonanie $\mathcal{A}_i$ nemôže znamenať, že som tým už automaticky vykonal aj $\mathcal{A}_j$ pre nejaké $j \neq i$), tak existuje $n_1+n_2+\cdots+n_k$ možností na to, aby sme vykonali jednu z tých činností. Ešte inak povedané: Ak je možné rozdeliť všetky konfigurácie kombinatorickej úlohy na niekoľko navzájom disjunktných skupín, tak počet všetkých konfigurácií sa rovná súčtu počtov konfigurácií v jednotlivých skupinách.

Pravidlo súčinu: Ak (nie nutne disjunktné) množiny $A_1, A_2, \ldots, A_k$ majú v danom poradí $n_1, n_2, \ldots, n_k$ prvkov, tak kartézsky súčin $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ má $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ prvkov. Teda existuje $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ možností na výber usporiadanej k-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ takej, že $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_k \in A_k$. Povedané kombinatoricky: Ak je n_1 možností na to, aby sme vykonali $\mathcal{A}_1$, n_2 možností na to, aby sme vykonali $\mathcal{A}_2$, ..., n_k možností na to, aby sme vykonali $\mathcal{A}_k$, potom existuje $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ možností na to, aby sme vykonali všetky tie činnosti. Toto platí za predpokladu, že počet spôsobov na vykonanie $\mathcal{A}_i$ je n_i, nezávisle od toho, aké možnosti sme si vybrali na vykonanie tých ostatných činností. Ešte inak povedané: Ak konfigurácie kombinatorickej úlohy zodpovedajú usporiadaným k-ticiam, tak ich počet sa rovná súčinu počtov možností, ktoré máme pre výber jednotlivých zložiek.

4. Z mesta A do mesta B sa dá cestovať tromi autobusovými spoločnosťami a dvomi železničnými, z mesta B do mesta C dvomi leteckými spoločnosťami a jednou železničnou. Chcem cestovať z A do B a potom do C. Koľko možností mám na zostavenie cestovného plánu?

   Riešenie. Počty možností sú:

   z A do B ... $3 + 2 = 5$ možností (pravidlo súčtu)

   z B do C ... $2 + 1 = 3$ možnosti (pravidlo súčtu)

   z A do C ... $5 \times 3 = 15$ možností(pravidlo súčinu)

   Odpoveď: Mám 15 možností.

Pravidlo súčinu sa dá zovšeobecniť.

Zovšeobecnené pravidlo súčinu: Nemáme množiny $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ale máme jednu množinu X a vytvárame usporiadané k-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ prvkov množiny X podľa nejakých pravidiel, z ktorých zistíme, že

1. prvok x_1 sa dá z množiny X vybrať n_1 spôsobmi,
2. po akomkoľvek výbere prvku x_1 sa dá prvok x_2 z množiny X vybrať n_2 spôsobmi,

   ...

j. po akomkoľvek výbere prvkov $x_1, \ldots, x_{j-1}$ sa dá prvok x_j z množiny X vybrať n_j spôsobmi,

   ...

k. po akomkoľvek výbere prvkov $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sa dá prvok x_k z množiny X vybrať n_k spôsobmi.

Potom počet možností na výber usporiadanej k-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$. Teda taký je počet k-tic vyhovujúcich daným pravidlám.

5. Určte počet všetkých prostých (injektívnych) zobrazení m-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny. (Predpokladáme $m \leq n$; pre $m > n$ také zobrazenie neexistuje.)

[2] Napr. vybrali prvok z množiny A_1.

Riešenie. Množinu $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ máme injektívne zobraziť do množiny $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Uvažujme postupne:

pre obraz bodu a_1 máme ... n možností (môže ním byť hociktorý z bodov $b_1, b_2, \ldots, b_n$);

pre obraz bodu a_2 máme ... $n-1$ možností (obraz bodu a_2 musí byť totiž iný ako už zvolený obraz bodu a_1, pretože zobrazenie má byť prosté);

pre obraz bodu a_3 máme ... $n-2$ možností;

...

pre obraz bodu a_m máme ... $n-(m-1)$ možností ($a_1, \ldots, a_{m-1}$ majú dokopy $m-1$ obrazov a tie sú zakázané ako obraz bodu a_m).

Odpoveď: Počet všetkých prostých zobrazení m-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny je $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-(m-1))$, čo sa dá písať aj v tvare $n!/(n-m)!$.

Literatúra

[BH1] G. Bizám, J. Herczeg, *Hra a logika v 85 príkladoch*, Alfa, Bratislava, 1979.

[BH2] G. Bizám, J. Herczeg, *Zaujímavá logika*, Alfa, Bratislava, 1982.

[BM] V. Burjan, M. Maxian, *Matematika – opakovanie pre gymnázium s triedami zameranými na matematiku*, SPN, Bratislava, 1989.

[Do] J. Doboš, *Rovnice a nerovnice*, Bolchazy-Carducci Publishers, Wauconda, 2003, `https://web.science.upjs.sk/jozefdobos/wp-content/uploads/2012/02/2003b.pdf`

[En] A. Engel, *Problem-solving strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[EF] M. J. Erickson, J. Flowers, *Principles of mathematical problem solving*, Prentice Hall, NJ, 1999.

[FT] Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий, *Как научиться решать задачи*, Просвещение, Москва, 1984.

[HS] T. Hecht, Z. Sklenáriková, *Metódy riešenia matematických úloh*, SPN, Bratislava, 1992.

[He] M. Hejný a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1990.

[La] L. C. Larson, *Metódy riešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava, 1990.

[No] С. И. Новоселов, *Специальный курс элементарной алгебры*, Высшая школа, Москва, 1965.

[Od] O. Odvárko a kol., *Metody řešení matematických úloh*, SPN, Praha, 1990.

[Po] J. Polák, *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha, 1991.

[Po1] J. Polák, *Středoškolská matematika v úlohách I*, Prometheus, Praha, 1996.

[Po2] J. Polák, *Středoškolská matematika v úlohách II*, Prometheus, Praha, 1999.

[Po-d] J. Polák, *Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně*, Fraus, Plzeň, 2014.

[Sm] R. M. Smullyan, *Jak se jmenuje tahle knížka?*, Mladá fronta, Praha, 1986.

[Sn-Sn] D. Snohová, Ľ. Snoha, *Paradox Krét'ana a metóda prípustných situácií*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 2/2003 (32), s. 1-10.

[Su] В. П. Супрун, *Нестандартные методы решения задач*, URSS, Москва, 2020.

[Va] А. Б. Василевский, *Обучение решению задач по математике*, Вышейшая школа, Минск, 1988.

[Vr] P. Vrábel, *Heuristika a metodológia matematiky*, UKF, Nitra, 2005.

[Ze] P. Zeitz, *The art and craft of problem solving*, John Wiley & Sons, NJ, 2017.